DOI：10.16783/j.cnki.nwnuz.2016.01.001

Gorenstein AC-投射复形的稳定性

赵仁育，权艳红
（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘要：证明了以 Gorenstein AC-投射复形为对象，利用定义 Gorenstein AC-投射复形方法构造出的复形仍然是 Gorenstein AC-投射复形. 其次，引入了复形的 Gorenstein AC-投射维数的概念，并对其进行了刻画.
关键词：Gorenstein AC-投射模；Gorenstein AC-投射复形；level 复形；Gorenstein AC-投射维数
中图分类号：O 153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1001-988Ⅹ(2016)01-0001-07

On stability of Gorenstein AC-projective complexes

ZHAO Ren-yu, QUAN Yan-hong
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: In this paper, it is proved that an iteration of the procedure used to define Gorenstein AC-projective complexes yields exactly Gorenstein AC-projective complexes. We also introduce and characterize the notion of the Gorenstein AC-projective dimension of complexes.
Key words: Gorenstein AC-projective modules; Gorenstein AC-projective complexes; level complexes; Gorenstein AC-projective dimension

0 引言

近年来，Gorenstein 同调代数受到了人们的极大关注[1-11]. 1998 年，Enochs 等[12]把 Gorenstein 投射(内射)模的概念推广到了复形的范畴中，引入并研究了 Gorenstein 投射(内射)复形，称复形 X 是 Gorenstein 投射复形. 如果存在投射复形的正合列

$$P=\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to\cdots,$$

使得 $X\cong\mathrm{Im}(P_0\to P_{-1})$，且对任意的投射复形 Q，$\mathrm{Hom}(P,Q)$ 正合. 对偶地，可以定义 Gorenstein 内射复形. 随后，Gorenstein 同调代数的许多结论被拓展到了复形范畴[3,11-15]. 作为平坦模和内射模的推广，Gao 等[16]研究了弱平坦模和弱内射模，这两类模也被称为 level 模和 AC-模[17]. 受 Ding 投射(内射)模[5-6]和 Ding 投射(内射)复形[14]研究思想的启发，Bravo 等[17]研究了两类特殊 Gorenstein 复形——Gorenstein AC-投射复形和 Gorenstein AC-内射复形，讨论了这两类复形与其各层次的模之间的关系. Xu 等[11]证明了对复形 X，若存在 Gorenstein 投射复形的正合列

$$P=\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to\cdots,$$

使得 $X\cong\mathrm{Im}(P_0\to P_1)$，并且对任意的投射复形 Q，$\mathrm{Hom}(P,Q)$ 是正合复形，则 X 仍是 Gorenstein 投射复形，即 Gorenstein 投射复形是稳定的[11]. 受此结果的启发，在本文的第 2 节，我们讨论了 Gorenstein AC-投射复形的稳定性，证明了以 Gorenstein AC-投射复形为对象，利用定义 Gorenstein AC-投射复形的方法构造出的复形仍然是 Gorenstein AC-投射复形. 在第 3 节中，通过引入复形 Gorenstein AC-投射维数的概念，并对复形的 Gorenstein AC-投射维数进行了刻画. 对

收稿日期：2015-08-05；**修改稿收到日期**：2015-10-29
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11361052)
作者简介：赵仁育（1977—），男，甘肃景泰人，副教授，博士. 主要研究方向为环的同调理论.
E-mail：zhaory@nwnu.edu.cn

Gorenstein AC-内射复形有对偶的结果，本文不再赘述.

1 预备知识

本文中，R 是具有单位元的环，除非特殊声明，所涉及的模均是左 R-模，复形均是左 R-模的复形. 用右上和右下两种表示符来区别模和复形. 例如，$\{G_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是一簇复形，G_i^n 表示复形 G_i 的第 n 层次上的模. 未说明的概念和记号参照文献[1-3,13,17].

将 R-模的复形

$$\cdots\to X^{n-1}\xrightarrow{\delta^{n-1}}X^n\xrightarrow{\delta^n}X^{n+1}\to\cdots$$

记为 (X,δ)，简记为 X. 复形 X 的第 n 层次的循环(边缘，同调模)记作 $Z_n(X)(B_n(X),H_n(X))$. 用 $\mathrm{Ch}(R)$ 代表 R-模的复形构成的 Abel 范畴. 设 $X,Y\in\mathrm{Ch}(R)$，用 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 表示 X 到 Y 的所有复形态射构成的 Abel 群；对任意的 $i\geqslant 1$，$\mathrm{Ext}^i(X,Y)$ 表示 Hom 的右导出函子. 用 $\mathcal{H}om(X,Y)$ 表示由 X 和 Y 确定的 Abel 群的复形，它的第 n 层次为

$$\mathcal{H}om(X,Y)^n=\prod_{t\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(X^t,Y^{n+t}),$$

第 n 层次的边缘算子是

$$\delta^n((f^t)_{t\in\mathbb{Z}})=(\delta_Y^{n+t}f^t-(-1)^nf^{t-1}\delta_X^t)_{t\in\mathbb{Z}}.$$

设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，$\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 中一些对象的类，据文献[2]，称 $\mathcal{X}$ 是投射可解的. 如果 $\mathcal{X}$ 包含 $\mathcal{A}$ 的所有投射对象，并且对 $\mathcal{A}$ 中的任意短正合列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$，若 $A''\in\mathcal{X}$，则 $A\in\mathcal{X}$ 当且仅当 $A'\in\mathcal{X}$. 称 $\mathcal{A}$ 中对象的复形 C 是 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{X})$ 正合的，是指对任意的 $X\in\mathcal{X}$，复形 $\mathrm{Hom}(C,X)$ 是正合的.

设 M 是左 R-模，据文献[17]，称 M 是 FP_∞ 型模；如果 M 具有有限生成的投射分解，称 M 是 level 模；如果对任意的 FP_∞ 型右 R-模 N，$\mathrm{Tor}_R^1(N,M)=0$，level 模的类记为 $\mathcal{L}(R)$，称 M 是 Gorenstein AC-投射模，简称为 GAC-投射模. 如果存在 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{L}(R))$ 正合的正合列

$$\cdots\to P^1\to P^0\to P^{-1}\to P^{-2}\to\cdots,$$

其中每个 P^i 是投射模，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^{-1}\to P^{-2})$. 由 Gorenstein AC-投射模的定义易见.

引理 1 设 M 是模. 则 M 是 Gorenstein AC-投射模，当且仅当对任意的 level 模 F，$\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}(M,F)=0$，并且存在 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{L}(R))$ 正合的正合列

$$0\to M\to P^{-1}\to P^{-2}\to\cdots,$$

其中 P^i 都是投射模.

引理 2 Gorenstein AC-投射模的类是投射可解的.

证明 类似于文献[10]定理 2.6 的证明可得. ∎

称复形 P 是投射复形，如果 P 是正合复形，并且每个 $Z_n(P)$ 是投射模. 据文献[17]，称复形 L 是 level 复形，如果 L 是正合复形，并且每个 $Z_n(L)$ 是 level 模，将 level 复形的类记作 $\mathcal{L}(\mathrm{Ch}(R))$；称复形 X 是 Gorenstein AC-投射复形，简称为 GAC-投射复形，如果存在 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{L}(\mathrm{Ch}(R)))$ 正合的正合列

$$\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to P_{-2}\to\cdots,$$

其中每个 P_i 都是投射复形，使 $X\cong\mathrm{Ker}(P_{-1}\to P_{-2})$.

2 Gorenstein AC-投射复形的稳定性

本节讨论 Gorenstein AC-投射复形的稳定性，为此先做一些准备工作.

引理 3 由文献[17]中定理 4.13，设 $X\in\mathrm{Ch}(R)$. 则 X 是 GAC-投射复形当且仅当对任意的 $i\in\mathbb{Z}$，X^i 是 GAC-投射模，且对任意的 level 复形 L，$\mathcal{H}om(X,L)$ 是正合复形.

引理 4 GAC-投射复形的类是投射可解的.

证明 显然，投射复形是 GAC-投射复形. 设 $0\to X\to Y\to Z\to 0$ 是复形的短正合列，其中 Z 是 GAC-投射复形. 设 L 是 level 复形，由 level 模的定义易见每个 L^i 是 level 模. 由引理 3 知每个 Z^j 是 GAC-投射模，所以由引理 1，对任意的 $n,t\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{Ext}^1(Z^t,L^{t+n})=0$. 于是对任意的 $n,t\in\mathbb{Z}$，有短正合列

$$0\to\mathrm{Hom}(Z^t,L^{t+n})\to\mathrm{Hom}(Y^t,L^{t+n})\to\mathrm{Hom}(X^t,L^{t+n})\to 0.$$

进而有复形的短正合列 $0\to\mathcal{H}om(Z,L)\to\mathcal{H}om(Y,L)\to\mathcal{H}om(X,L)\to 0$. 由引理 3，$\mathcal{H}om(Z,L)$ 是正合复形，所以由引理 2 和引理 3 可证得 X 是 GAC-投射复形，当且仅当 Y 是 GAC-投射复形，从而结论成立. ∎

引理 5 GAC-投射复形的类关于直和项和任意直和封闭.

证明 设 X 是 GAC-投射复形，且 $A\oplus B=X$. 则由引理 3 知，对任意 $i\in\mathbb{Z}$，A^i 是 GAC-投射模. 设 L 是 level 复形. 则由引理 3 知，$\mathcal{H}om(X,L)$ 是正合复形. 因为 $\mathcal{H}om(A\oplus B,L)\cong\mathcal{H}om(A,L)\oplus$

$\mathrm{Hom}(B,L)$，所以 $\mathrm{Hom}(A,L)$ 正合．于是由引理 3 知，A 是 GAC-投射复形．

设 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一簇 GAC-投射复形．由引理 3 知，对任意的 $i\in\mathbb{Z}$，$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda^i$ 是 GAC-投射模．设 L 是 level 复形，则对任意的 $\lambda\in\Lambda$，$\mathrm{Hom}(X_\lambda,L)$ 正合．于是 $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda,L)$ 正合．所以由引理 3 知，$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 是 GAC-投射复形．　】

引理 6　设 $0\to X\to Y\to Z\to 0$ 是复形的正合列．若 X 和 Y 是 GAC-投射复形，则 Z 是 GAC-投射复形，当且仅当对任意的 level 复形 L，$\mathrm{Ext}^1(Z,L)=0$．

证明　必要性显然，现证充分性．因为 X 是 GAC-投射复形，所以存在复形的正合列 $0\to X\to P\to G\to 0$，其中 P 是投射复形，G 是 GAC-投射复形．于是推出图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] & 0 \\
 & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

在短正合列 $0\to Y\to Q\to G\to 0$ 中，因为 G 和 Y 是 GAC-投射复形，所以由引理 4 知，Q 是 GAC-投射复形．又因为 P 是 level 复形，所以 $\mathrm{Ext}^1(Z,P)=0$．从而第二行的正合列可裂．由引理 5 知，Z 是 GAC-投射复形．　】

引理 7　设

$$0\to A\to G_1\xrightarrow{f}G_0\to X\to 0 \tag{1}$$

是复形的正合列，其中 G_1 和 G_0 是 GAC-投射复形．则

1）存在正合列

$$0\to A\to J\to G\to X\to 0 \tag{2}$$

和

$$0\to A\to F\to P\to X\to 0, \tag{3}$$

其中 J 和 P 是投射复形，G 和 F 是 GAC-投射复形．

2）如果（1）是 $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$ 正合的，那么（2）和（3）也是 $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$ 正合的．

证明　1）因为 G_1 是 GAC-投射复形，所以存在正合列 $0\to G_1\to J\to Q_1\to 0$，其中 J 是投射复形，Q_1 是 GAC-投射复形．考察推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}f \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & Q_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Q_1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由第三列和短正合列 $0\to\mathrm{Im}f\to G_0\to X\to 0$，有下列推出图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}f \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
 & Q_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Q_1 \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

由上面两个推出图的第二行得正合列 $0\to A\to J\to G\to X\to 0$．在正合列 $0\to G_0\to G\to Q_1\to 0$，因为 G_0，Q_1 是 GAC-投射复形，所以由引理 4，G 是 GAC-投射复形．

因为 G_0 是 GAC-投射复形，所以存在正合列 $0\to Q_2\to P\to G_0\to 0$，其中 P 是投射复形，Q_2 是 GAC-投射复形．考察拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Q_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Q_2 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}f \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

由该图中的第一列和短正合列 $0\to A\to G_1\to\mathrm{Im}f\to 0$，考察拉回图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & Q_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & Q_2 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}f \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由以上两个拉回图的第二行得正合列

$$0 \to A \to F \to P \to X \to 0,$$

并且由引理4，F 是 GAC-投射复形.

2）设 L 是 level 复形，并且(1)是 Hom$(-,L)$正合的，则 $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Im} f, L)=0$. 因为 Q_1 是 GAC-投射复形，所以 $\mathrm{Ext}^1(Q_1, L)=0$. 从而 $\mathrm{Ext}^1(B,L)=0$. 故 Hom$(-,L)$保持(2)的正合性. 因为 $\mathrm{Ext}^2(X,L)=0$ 且 P 是投射复形，所以 $\mathrm{Ext}^1(N,L)=0$. Hom$(-,L)$保持(3)的正合性. 】

引理8 设 n 是正整数，

$$0 \to A \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to X \to 0 \quad (4)$$

是复形的正合列，其中每个 G_i 是 GAC-投射复形. 则

1）存在复形的正合列

$$0 \to A \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to Y \to 0 \quad (5)$$

和 $0 \to X \to Y \to U \to 0$，其中每个 P_i 是投射复形，U 是 GAC-投射复形.

2）存在复形的正合列

$$0 \to B \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0 \quad (6)$$

和 $0 \to V \to B \to A \to 0$，其中每个 P_i 是投射复形，V 是 GAC-投射复形.

3）如果(4)是 Hom$(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$正合的，那么(5)和(6)也是 Hom$(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$正合的.

证明 1）对 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时，在正合列 $0 \to A \to G_0 \to X \to 0$ 中，因为 G_0 是 GAC-投射复形，所以存在正合列 $0 \to G_0 \to P_0 \to U \to 0$，其中 P_0 是投射复形，U 是 GAC-投射复形. 于是由推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & U \arrow[r, equal] \arrow[d] & U \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

可得所需的正合列 $0 \to A \to P_0 \to Y \to 0$ 和 $0 \to X \to Y \to U \to 0$.

设 $n \geqslant 2$ 且有正合列

$$0 \to A \to G_{n-1} \to G_{n-2} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to X \to 0,$$

其中每个 G_i 是 GAC-投射复形. 令 $K=\mathrm{Coker}(G_{n-1} \to G_{n-2})$. 则有正合列

$$0 \to A \to G_{n-1} \to G_{n-2} \to K \to 0$$

和

$$0 \to K \to G_{n-3} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to 0.$$

由引理7知存在正合列

$$0 \to A \to P_{n-1} \to G'_{n-2} \to K \to 0,$$

其中 P_{n-1} 是投射复形，G'_{n-2} 是 GAC-投射复形. 令 $A'=\mathrm{Im}(P_{n-1} \to G'_{n-2})$. 则有正合列

$$0 \to A' \to G'_{n-2} \to G_{n-3} \to \cdots \to G_0 \to X \to 0.$$

由归纳假设，存在正合列

$$0 \to A' \to P_{n-2} \to P_{n-3} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$$

和

$$0 \to X \to Y \to U \to 0,$$

其中每个 P_i 是投射复形，U 是 GAC-投射复形. 于是有正合列

$$0 \to A \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to Y \to 0,$$

其中每个 P_i 是投射复形.

2）类似于1)可证.

3）设 L 是 level 复形，并且 Hom$(-,L)$保持(4)的正合性. 当 $n=1$ 时，上面推出图的第一行与第二列是 Hom$(-,L)$正合的，故第二行是 Hom$(-,L)$正合的. 当 $n \geqslant 2$ 时，由引理7及归纳假设可得(5)是 Hom$(-,L)$正合的. (6)的 Hom$(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$正合性类似可证. 】

定理1 设 $X \in \mathrm{Ch}(R)$. 则 X 是 GAC-投射复形当且仅当存在 GAC-投射复形的正合列

$$G = \cdots \to G_1 \xrightarrow{\sigma_1} G_0 \xrightarrow{\sigma_1} G_{-1} \to \cdots,$$

使得 $X \cong \mathrm{Coker}\ \sigma_1$ 并且对任意的 level 复形 L，Hom(G,L)正合.

证明 $\Longrightarrow$. 显然.

$\Longleftarrow$. 设存在 Hom$(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$正合的 GAC-投射复形的正合列

$$G = \cdots \to G_1 \xrightarrow{\sigma_1} G_0 \xrightarrow{\sigma_1} G_{-1} \to \cdots,$$

使得 $X \cong \mathrm{Im}\,\sigma_0$. 对任意的 $i \in \mathbb{Z}$，令 $X_i=\mathrm{Im}\,\sigma_i$. 则 $X_0=X$，并且对任意的 $i \in \mathbb{Z}$，有 Hom$(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$正合的正合列 $0 \to X_{i+1} \to G_i \to X_i \to 0$. 下面证明 X 是 GAC-投射复形.

考察正合列

$$0 \to X \to G_{-1} \to X_{-1} \to 0.$$

由引理8，存在 Hom$(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$正合的正合列

$$0 \to X \to P_{-1} \to Y_{-1} \to 0$$

和

$$0 \to X_{-1} \to Y_{-1} \to V_{-1} \to 0,$$

其中 P_{-1} 是投射复形，V_{-1} 是 GAC-投射复形. 于

是由推出图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & V_{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & G_{-2} \arrow[r] \arrow[d] & U_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & V_{-1} \arrow[r] & 0 \\
 & X_{-2} \arrow[r, equal] \arrow[d] & X_{-2} \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

可得正合列

$$0 \to Y_{-1} \to U_{-1} \to X_{-2} \to 0.$$

因为 G_{-2} 和 V_{-1} 是 GAC-投射复形，所以由引理 4 知，U_{-1} 是 GAC-投射复形．因为

$$0 \to X_{-1} \to G_{-2} \to X_{-2} \to 0$$

是 $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$ 正合的，所以

$$0 \to Y_{-1} \to U_{-1} \to X_{-2} \to 0$$

是 $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$ 正合的．重复上述过程可得 $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$ 正合的正合列

$$0 \to Y_{-i+1} \to P_{-i} \to Y_{-i} \to 0,$$

其中 P_{-i} 是投射复形，$i=1,2,\cdots$，$Y_0=X$．于是有 $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$ 正合的正合列

$$0 \to X \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots, \qquad (*)$$

其中每个 P_{-i} 是投射复形．

对偶地，可以证明存在 $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$ 正合的正合列

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0, \qquad (**)$$

其中每个 P_i 是投射复形．

由 $(*)$ 和 $(**)$ 得 $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{L}(\mathrm{Ch}(R)))$ 正合的正合列

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots,$$

其中每个 P_i 是投射复形，使得 $X \cong \mathrm{Im}(P_0 \to P_{-1})$．因此 X 是 GAC-投射复形．　】

3　复形的 Gorenstein AC-投射维数

作为引理 7 的另一个应用，本节研究复形的 Gorenstein AC-投射维数．因为投射复形是 GAC-投射复形，所以每个复形都有 GAC-投射分解，从而可以定义复形的 GAC-投射维数．

定义 1　设 $X \in \mathrm{Ch}(R)$，X 的 GAC-投射维数 GAC-pd(X) 定义为：GAC-pd$(X)=\inf\{n \mid$ 存在正合列 $0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to X \to 0$，其中 G_i 是 GAC-投射复形$\}$．如果 X 没有长度有限的 GAC-投射分解，那么规定 GAC-pd$(X)=\infty$．

引理 9　设 $X \in \mathrm{Ch}(R)$．考察复形的正合列

$$0 \to H_n \to P_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \to X \to 0,$$
$$0 \to H'_n \to G'_{n-1} \to G'_{n-2} \to \cdots \to G'_0 \to X \to 0,$$

其中每个 P_i 是投射复形，每个 G'_i 是 GAC-投射复形．则 H_n 是 GAC-投射复形当且仅当 H'_n 是 GAC-投射复形．

证明　作映射锥，得复形的正合列

$$0 \to H_n \to P_{n-1} \oplus H'_n \to P_{n-2} \oplus G'_{n-1} \to \cdots \to P_0 \oplus G'_1 \to X \oplus G'_0 \to X \to 0,$$

进而有复形的正合列

$$0 \to H_n \to P_{n-1} \oplus H'_n \to P_{n-2} \oplus G'_{n-1} \to \cdots \to P_0 \oplus G'_1 \to G'_0 \to 0.$$

在此正合列中，除了 H_n 和 $P_{n+1} \oplus H'_n$ 外，其余项都是 GAC-投射复形．于是由引理 4 知，$L_{n-1}=\mathrm{Ker}(P_{n-2} \oplus G'_{n-1} \to P_{n-3} \oplus G'_{n-2})$ 是 GAC-投射复形．从而由引理 4 和引理 5 知，在正合序列 $0 \to H_n \to P_{n-1} \oplus H'_n \to L_{n-1} \to 0$ 中，H_n 是 GAC-投射复形，当且仅当 $P_{n-1} \oplus H'_n$ 是 GAC-投射复形，当且仅当 H'_n 是 GAC-投射复形．　】

推论 1　设 $X \in \mathrm{Ch}(R)$．考察复形的正合列

$$0 \to H_n \to G_{n-1} \to G_{n-2} \to \cdots \to G_0 \to X \to 0,$$
$$0 \to H'_n \to G'_{n-1} \to G'_{n-2} \to \cdots \to G'_0 \to X \to 0,$$

其中 G_i, G'_i 是 GAC-投射复形，$i=0,1,\cdots,n-1$，则 H_n 是 GAC-投射复形，当且仅当 H'_n 是 GAC-投射复形．

证明　由引理 9 可得．　】

定理 2　设 $X \in \mathrm{Ch}(R)$，$n \geqslant 0$．则以下条件等价：

1）GAC-pd$(X) \leqslant n$；

2）GAC-pd$(X) < \infty$，且对任意 level 维数有限的复形 L，$\mathrm{Ext}^{>n}(X,L)=0$；

3）GAC-pd$(X) < \infty$，且对任意 level 复数 L，$\mathrm{Ext}^{>n}(X,L)=0$；

4）对复形的任意正合列 $\cdots \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to X \to 0$，其中每个 G_i 是 GAC-投射复形，$K_n=\mathrm{Ker}(G_{n-1} \to G_{n-2})$ 是 GAC-投射复形；

5）对任意的 $0 \leqslant t \leqslant n$ 存在正合列 $0 \to P_n \to \cdots \to P_{t+1} \to G_t \to P_{t-1} \to \cdots \to P_0 \to X \to 0$，其中 G_t 是 GAC-投射复形，P_i 是投射复形．

证明　2）$\Longrightarrow$ 3），4）$\Longrightarrow$ 5）和 5）$\Longrightarrow$ 1）显然．

1）$\Longrightarrow$ 2）．因为 GAC-pd$(X) \leqslant n$，所以存在 X 的长度为 n 的 GAC-投射分解

$$0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to X\to 0.$$
由维数转移，对任意的 $m>n$ 和任意的 level 维数有限的复形 L，$\mathrm{Ext}^m(X,L)\cong\mathrm{Ext}^{m-n}(G_n,L)=0$.

3）$\Longrightarrow$ 4）. 设
$$\cdots\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to X\to 0$$
是 X 的一个 GAC-投射分解. 下证 $K_n=\mathrm{Ker}(G_{n-1}\to G_{n-2})$ 是 GAC-投射复形.

由 3），设 GAC-pd$(X)=m<\infty$. 则存在 X 的长度为 m 的 GAC-投射分解
$$0\to G'_m\to G'_{m-1}\to\cdots\to G'_1\to G'_0\to X\to 0.$$

i）若 $m\leqslant n$，将上述 X 的 GAC-投射分解扩充为长度为 n 的 GAC-投射分解
$$0\to G''_n\to G''_{n-1}\to\cdots\to G''_m\to G''_{m-1}\to\cdots\to G'_1\to G'_0\to X\to 0.$$
由推论 1 知，K_n 是 GAC-投射复形.

ii）若 $m>n$，令 $K'_i=\mathrm{Ker}(G'_{i-1}\to G'_{i-2}),i=1,2,\cdots,m$，其中 $K'_m=G'_m,G'_{-1}=X$. 下证 K'_n 是 GAC-投射复形. 对任意的 level 复形 L，由维数转移有，$\mathrm{Ext}^{i+1}(X,L)\cong\mathrm{Ext}^1(K'_i,L)=0,i=n,n+1,\cdots,m-1$. 于是由 3）及引理 6，可得 K'_n 是 GAC-投射复形. 从而由推论 1 知，K_n 是 GAC-投射复形.

1）$\Longrightarrow$ 5）. 对 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时，存在正合列 $0\to D_1\to D_0\to X\to 0$，其中 D_0,D_1 是 GAC-投射复形. 由引理 7（$A=0$ 的情形），存在正合列 $0\to P_1\to G_0\to X\to 0$ 和正合列 $0\to G_1\to P_0\to X\to 0$，其中 G_0,G_1 是 GAC-投射复形，P_0,P_1 是投射复形. 故 $n=1$ 时结论成立.

设 $n\geqslant 2$，且有复形的正合列 $0\to D_n\to D_{n-1}\to\cdots\to D_0\to X\to 0$，其中每个 D_i 是 GAC-投射复形. 令 $A=\mathrm{Ker}(D_1\to D_0)$. 则有正合列
$$0\to A\to D_1\to D_0\to X\to 0.$$
由引理 7，存在正合序列 $0\to A\to D'_1\to P_0\to X\to 0$，其中 D'_1 是 GAC-投射复形，P_0 是投射复形. 于是有正合序列
$$0\to D_n\to D_{n-1}\to\cdots\to D_2\to D'_1\to P_0\to X\to 0.$$
令 $Y=\mathrm{Ker}(P_0\to X)$. 则 GAC-pd$(Y)\leqslant n-1$. 由归纳假设，存在正合序列
$$0\to P_n\to\cdots\to P_{t+1}\to G_t\to P_{t-1}\to\cdots\to P_0\to X\to 0,$$
其中 G_t 是 GAC-投射复形，P_i 是投射复形，$i=0,1,\cdots,t-1,t+1,\cdots,n$. 下面证明 $t=0$ 的情形. 令 $B=\mathrm{Coker}(D_2\to D_1)$，由归纳假设，存在正合列
$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_2\to G'_1\to B\to 0,$$
其中 G'_1 是 GAC-投射复形，P_i 是投射复形. 令 $C=\mathrm{Coker}(P_3\to P_2)$，则有正合列
$$0\to C\to G'_1\to D_0\to X\to 0.$$
由引理 7，存在正合列 $0\to C\to P_1\to G_0\to X\to 0$，其中 G_0 是 GAC-投射复形，P_1 是投射复形. 于是有正合序列
$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_2\to P_1\to G_0\to X\to 0,$$
其中 P_i 是投射复形，$i=1,2,\cdots,n$. 】

推论 2 设 $0\to X'\to X\to X''\to 0$ 是复形的短正合列，$n\in\mathbb{N}$. 则

1）若 GAC-pd$(X'')\leqslant n$，则 GAC-pd$(X')\leqslant n$ 当且仅当 GAC-pd$(X)\leqslant n$. 进而，
$$\text{GAC-pd}(X')\leqslant\max\{\text{GAC-pd}(X),\text{GAC-pd}(X'')\},$$
$$\text{GAC-pd}(X)\leqslant\max\{\text{GAC-pd}(X'),\text{GAC-pd}(X'')\}.$$

2）若 GAC-pd$(X')>$ GAC-pd(X'') 或 GAC-pd$(X)>$ GAC-pd(X'')，则 GAC-pd$(X')=$ GAC-pd(X).

3）若 GAC-pd$(X'')>0$，X 是 GAC-投射复形. 则 GAC-pd$(X')=$ GAC-pd$(X'')-1$.

因此，在 $0\to X'\to X\to X''\to 0$ 中，如果任意两项的 GAC-投射维数有限，那么第三项的 GAC-投射维数也有限.

证明 1）当 $n=0$ 时，X'' 是 GAC-投射复形. 于是由引理 4 知，X' 是 GAC-投射复形当且仅当 X 是 GAC-投射复形. 故 $n=0$ 时结论成立.

假设 $n>0$. 作 X',X'' 的投射分解
$$\cdots\to P'_n\to P'_{n-1}\to\cdots\to P'_0\to X'\to 0,$$
$$\cdots\to P''_n\to P''_{n-1}\to\cdots\to P''_0\to X''\to 0.$$
由马掌引理有以下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K'_n \arrow[r] \arrow[d] & H_n \arrow[r] \arrow[d] & K''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P'_{n-1}\oplus P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d] & P'_0\oplus P''_0 \arrow[r] \arrow[d] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

在短正合列 $0\to K'_n\to H_n\to K''_n\to 0$ 中，因为

GAC-pd$(X'')\leqslant n$，所以由定理 2 知，K''_n 是 GAC-投射复形. 于是由引理 4 知，K'_n 是 GAC-投射复形当且仅当 H_n 是 GAC-投射复形. 所以 GAC-pd$(X)\leqslant n$，当且仅当 GAC-pd$(X')\leqslant n$. 下证 GAC-pd$(X')\leqslant\max\{$GAC-pd(X), GAC-pd$(X'')\}$，另一个不等式同理可证. 若 $\max\{$GAC-pd(X), GAC-pd$(X'')\}=\infty$，则 GAC-pd$(X')\leqslant\max\{$GAC-pd(X), GAC-pd$(X'')\}$. 若 $\max\{$GAC-pd(X), GAC-pd$(X'')\}=n<\infty$，则由上述结论可得 GAC-pd$(X')\leqslant\max\{$GAC-pd(X), GAC-pd$(X'')\}$.

2）设 GAC-pd$(X')>$GAC-pd(X''). 则由 1）中的第二个不等式知，GAC-pd$(X)\leqslant$GAC-pd(X'). 若 GAC-pd$(X)<$GAC-pd(X')则由 1）中的第一个不等式知 GAC-pd$(X')\leqslant\max\{$GAC-pd(X), GAC-pd$(X'')\}<$GAC-pd(X')，矛盾. 所 GAC-pd$(X')=$GAC-pd(X). 另一种情况同理可证.

3）由条件，若$\cdots\to G'_n\to G'_{n-1}\to\cdots\to G'_1\to G'_0\to X'\to 0$ 是 X'的一个 GAC-投射分解，则$\cdots\to G'_n\to G'_{n-1}\to\cdots\to G'_1\to G'_0\to X\to X''\to 0$ 是 X''的一个 GAC-投射分解. 因此，若 GAC-pd$(X'')=\infty$，则 GAC-pd$(X')=\infty$，此时结论成立. 设 GAC-pd$(X'')<\infty$. 则由中 1）的第一个不等式，GAC-pd$(X')<\infty$，因为 X 是 GAC-投射复形，所以对任意的 level 复形 L 和任意的 $m>0$，$\mathrm{Ext}^m(X',L)\cong\mathrm{Ext}^{m+1}(X'',L)$. 于是由定理 2，GAC-pd$(X')=$GAC-pd$(X'')-1$.

由 1)，2)，3)，最后一个事实成立.　　】

参考文献：

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. *Math Z*, 1995, **220**(1): 611.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. *Relative Homological Algebra* [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[3] CHRISTENSEN L W. *Gorenstein Dimension* [M]. Berlin: Springer, 2000.

[4] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. *J Pure Appl Algebra*, 2004, **189**(1): 167.

[5] DING N Q, LI Y L, MAO L X. Strongly Gorenstein flat modules [J]. *J Aust Math Soc*, 2009, **86**(3): 323.

[6] DING N Q, MAO L X. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules[J]. *J Algebra Appl*, 2008, **7**(4): 491.

[7] GILLESPIE J. Model structures on modules over Ding-Chen rings[J]. *Homology, Homotopy Appl*, 2010, **12**(1): 61.

[8] HUANG C H, HUANG Z Y. Gorenstein syzygy modules[J]. *J Algebra*, 2010, **324**(12): 3408.

[9] GENG Y X, DING N Q. W-Gorenstein modules[J]. *J Algebra*, 2011, **325**(1): 132.

[10] YANG G, LIU Z K, LIANG L. Ding projective and Ding injective modules [J]. *Algebra Colloq*, 2013, **20**(4): 601.

[11] XU A M, DING N Q. On stability of gorenstein categories[J]. *Comm Algebra*, 2013, **41**(7): 3793.

[12] ENOCHS E E, GARCÍA ROZAS J R. Gorenstein injective and projective complexes[J]. *Comm Algebra*, 1998, **26**(5): 1657.

[13] GARCÍA R J R. *Covers and Envelopes in the Category of Complexes of Modules* [M]. Boca Raton: CRC Press, 1999.

[14] YANG G, LIU Z K, LIANG L. Model structures of complexes over Ding-Chen rings [J]. *Comm Algebra*, 2013, **41**(1): 50.

[15] XIN D W, CHEN J L, ZHANG X X. Completely W-Resolved complexes [J]. *Comm Algebra*, 2013, **41**(4): 1247.

[16] GAO Z H, WANG F G. Weak injective and weak flat modules [J]. *Comm Algebra*, 2015, **43**(9): 3857.

[17] BRAVO D, GILLESPIE J. Absolutely clean, level, and Gorenstein AC-injective complexes [EB/OL]. [2015-07-28]http://arxiv.org/pdf/1408.7089v/.pdf.

（责任编辑　陆泉芳）