

广义逆多项式模的弱Co-Hopf性质

杨刚, 刘仲奎

(西北师范大学 数学与信息科学学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 设 R 是环, 但未必含有单位元, (S, \leq) 是 Artin 的严格全序么半群. 如果左 R -模 M 具有性质 (F), 则左 R -模 M 是弱 Co-Hopf 模当且仅当左 $[[R^{S, \leq}]]$ -模 $[M^{S, \leq}]$ 是弱 Co-Hopf 模.

关键词: 弱 Co-Hopf 模; 广义幂级数环; 广义逆多项式模

中图分类号: O 153.3

文献标识码: A

文章编号: 10 01-988 X (2004)03-0008-03

Weak Co-Hopf ficity of generalized inverse polynomials modules

YANG Gang, LIU Zhong-kui

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Let R be an associative ring not necessarily possessing an identity, and (S, \leq) is a strictly totally ordered monoid which is also Artinian. It is proved that if a left R -module M has the property (F), then M is weakly Co-Hopfian if and only if the left $[[R^{S, \leq}]]$ -module $[M^{S, \leq}]$ is weakly Co-Hopfian.

Key words: weakly Co-Hopfian module; generalized power series ring; generalized inverse polynomials module

1 引言

本文的环均是结合环, 但未必含有单位元, 模总是左模, 以 $K \leq_R M$ 表示 K 是左 R -模 M 的子模, 以 $K \leq_e M$ 表示 K 是 M 的基本子模. 称左 R -模 M 是 Co-Hopf 模, 如果任意 R -单同态 $f: M \rightarrow M$ 是满同态^[1]. 称左 R -模 M 是弱 Co-Hopf 模, 如果任意 R -单同态 $f: M \rightarrow M$ 是基本的, 即 $f(M) \leq_e M$ ^[2]. 我们已经知道弱 Co-Hopf 模是 Co-Hopf 模的真推广, 自然所有的 Co-Hopf 模 (例如 Artin 模) 都是弱 Co-Hopf 模^[1], 但整数环 \mathbb{Z} 上的正则模是弱 Co-Hopf 模而不是 Co-Hopf 模.

设 M 是左 R -模, 称 M 具有性质 (F)^[3], 如果对任意 $N \leq M$, 都有 $\{m \in M \mid Rm \subseteq N\} = N$. 易知 M 具有性质 (F) 当且仅当对任意 $m \in M$, 都有 $m \in Rm$. 文献^[4]证明了 M 具有性质 (F) 当且仅当对任意有限个元素 $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$, 存在 $e \in R$ 使得 $em_i = m_i, i=1, 2, \dots, n$.

设 M 是左 R -模, 若 M 具有性质 (F), 文献

^[3]证明了左 R -模 M 是 Co-Hopf 模当且仅当左 $[[R^{S, \leq}]]$ -模 $[M^{S, \leq}]$ 是 Co-Hopf 模. 受此启发, 本文将证明, 若 M 具有性质 (F), 则左 R -模 M 是弱 Co-Hopf 模当且仅当左 $[[R^{S, \leq}]]$ -模 $[M^{S, \leq}]$ 是弱 Co-Hopf 模. 其中 (S, \leq) 是 Artin 的严格全序么半群. 设 (S, \leq) 是偏序集, 称 (S, \leq) 是 Artin 的, 如果 S 中元素的任意降链是有限的; 称 (S, \leq) 是 Narrow 的, 如果 S 中的任意两两不可比较的元素构成的子集合是有限的. 设 S 是交换么半群, 除特别声明外, S 的运算记为加法, 么元记为 0, 下面的定义可见文献^[5].

设 (S, \leq) 是严格偏序么半群, 即 (S, \leq) 是偏序么半群且对于任意 $s, s', t \in S$, 若 $s < s'$, 则 $s + t < s' + t$. R 是环, 记 $A = [[R^{S, \leq}]] = \{f: S \rightarrow R \mid f \text{ 是映射, 且 } \text{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\} \text{ 是 Artin 的且 Narrow 的}\}$. 按照分量加法, A 可构成一个 Abel 加群. 对任意 $s \in S$ 和任意 $f, g \in A$, 记 $X_s(f, g) = \{(u, v) \in S \times S \mid s = u + v, f(u) \neq 0, g(v) \neq 0\}$, 则 $X_s(f, g)$ 是有限的^[6]. 因此可定义如

收稿日期: 2003-12-25; 修改稿收到日期: 2004-03-02

基金项目: 国家自然科学基金(10171082)资助项目

作者简介: 杨刚 (1980-), 男, 甘肃定西人, 在读硕士研究生. 主要研究方向为环理论.

下的乘法运算:

$$(fg)(s) = \sum_{(u,v) \in X_s(f,g)} f(u)g(v), \quad s \in S.$$

按照上述加法和乘法运算, A 可构成一个环, 称为广义幂级数环. A 中的元素称为系数在 R 中、指数在 S 中的广义幂级数. 例如, 若 $S = \mathbf{N}$ (非负整数集), \leq 是 \mathbf{N} 上通常的序, 则 $[[R^{\mathbf{N}, \leq}]]$ 同构于形式幂级数环 $R[[x]]$. 如果 S 是交换幺半群, \leq 是平凡序, 则 $[[R^{S, \leq}]]$ 同构于幺半群环 $R[S]$. 关于广义幂级数环的其它例子可见文献[5, 6].

设 M 是左 R -模, 记 $[M^{S, \leq}] = \{ \varphi: S \rightarrow M \mid \varphi$ 是映射, 且 $\text{supp}(\varphi) = \{s \in S \mid \varphi(s) \neq 0\}$ 是有限的}. 定义 $[M^{S, \leq}]$ 中的加法为分量加法, 纯量乘法为

$$(f\varphi)(s) = \sum_{t \in S} f(t)\varphi(s+t), \quad s \in S,$$

其中 $f \in [[R^{S, \leq}]]$, $\varphi \in [M^{S, \leq}]$. 因为 $\text{supp}(\varphi)$ 是有限的, 所以上面的乘法是有意义的. 如果 \leq 是全序和 Artin 的, 则 $[M^{S, \leq}]$ 作成左 $[[R^{S, \leq}]]$ -模^[3, 7], 称之为广义逆多项式模, $[M^{S, \leq}]$ 中的元素称为系数在 M 中、指数在 S 中的广义逆多项式. 例如, 若 $S = \mathbf{N}$, \leq 是 \mathbf{N} 上通常的序, 则左 $[[R^{\mathbf{N}, \leq}]]$ 同构于左 $R[[x]]$ -模 $M[x^{-1}]$. 关于后者可见文献[8].

2 主要结果

以下设 (S, \leq) 是 Artin 的严格全序幺半群. 由文献[7]知, 此时对任意 $s \in S$, 有 $s \geq 0$. 对任意 $\varphi \in [M^{S, \leq}]$, 以 $\sigma(\varphi)$ 表示 $\text{supp}(\varphi)$ 中的最大元.

引理 1^[9] 设 M 是左 R -模, 则 $K \leq_e M$ 当且仅当对任意 $0 \neq x \in M$, 存在 $r \in R$, 使得 $0 \neq rx \in K$.

引理 2 设 $\alpha \in \text{Hom}_{[[R^{S, \leq}]]}([M^{S, \leq}], [N^{S, \leq}])$, 如果 N 具有性质(F), 则对任意 $\varphi \in [M^{S, \leq}]$, 若 $\alpha(\varphi) \neq 0$, 则 $\sigma(\alpha(\varphi)) \leq \sigma(\varphi)$. 特别地, 若 α 是单同态且 M 具有性质(F), 则有 $\sigma(\alpha(\varphi)) = \sigma(\varphi)$.

证明 设 $\varphi \in [M^{S, \leq}]$, $\sigma(\varphi) = s$, 反设存在 $t \in S$, 且 $s < t$, 使得 $\alpha(\varphi)(t) \neq 0$, 则由 N 具有性质(F)知, 存在 $e \in R$, 使得 $e\alpha(\varphi)(t) = \alpha(\varphi)(t)$. 定义 $d_e^t \in [[R^{S, \leq}]]$ 如下(下同):

$$d_e^t(x) = \begin{cases} e, & x = t; \\ 0, & x \neq t, \end{cases} \quad x \in S,$$

则对任意 $x \in S$, $0 \leq s$, 有 $(d_e^t\varphi)(x) = \sum_{y \in S} d_e^t(y)\varphi(x+y) = d_e^t(t)\varphi(x) = 0$, 即 $d_e^t\varphi = 0$, 从而

$d_e^t\alpha(\varphi) = \alpha(d_e^t\varphi) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi)(t) &= e\alpha(\varphi)(t) = d_e^t(t)\alpha(\varphi)(t) = \\ &= \sum_{y \in S} d_e^t(y)(\alpha(\varphi))(y+t) = \\ &= (d_e^t(\alpha(\varphi)))(0) = 0, \end{aligned}$$

矛盾! 所以对任意 $t \in S$, $t > s$, 有 $\alpha(\varphi)(t) = 0$, 亦即 $\sigma(\alpha(\varphi)) \leq \sigma(\varphi) = s$.

若 α 是单同态, 因为 $0 \neq \varphi(s) \in M$, 由 M 具有性质(F), 存在 $e \in R$, 使得 $e\varphi(s) = \varphi(s)$, 则

$$(d_e^s\varphi)(0) = \sum_{y \in S} d_e^s(y)\varphi(0+y) =$$

$$d_e^s(s)\varphi(s) = e\varphi(s) = \varphi(s) \neq 0,$$

而对任意 $0 \neq x \in S$, 有 $d_e^s\varphi(x) = 0$, 所以 $\sigma(d_e^s\varphi) = 0$. 由上述证明知 $\sigma(\alpha(d_e^s\varphi)) \leq \sigma(d_e^s\varphi) = 0$, 又因为 α 是单同态, $\alpha(d_e^s\varphi) \neq 0$, 故

$$\begin{aligned} 0 \neq \alpha(d_e^s\varphi)(0) &= d_e^s\alpha(\varphi)(0) = \\ &= \sum_{y \in S} d_e^s(y)(\alpha(\varphi))(y+0) = \\ &= d_e^s(s)\alpha(\varphi)(s) = e\alpha(\varphi)(s), \end{aligned}$$

从而 $\alpha(\varphi)(s) \neq 0$, 即 $\sigma(\alpha(\varphi)) = s$. **】**

定理 1 设左 R -模 M 具有性质(F), 则下面条件等价:

- (1) 左 R -模 M 是弱 Co-Hopf 模;
- (2) 左 $[[R^{S, \leq}]]$ -模 $[M^{S, \leq}]$ 是弱 Co-Hopf 模.

证明 (1) \implies (2). 设 $\alpha \in \text{End}_{[[R^{S, \leq}]]}([M^{S, \leq}])$ 是单同态, 对任意 $m \in M$, $s \in S$, 定义 $\varphi_{s,m} \in [M^{S, \leq}]$ 如下(下同):

$$\varphi_{s,m}(t) = \begin{cases} m, & t = s, \\ 0, & t \neq s. \end{cases} \quad t \in S,$$

则映射 $f: M \rightarrow M$, $f(m) = \alpha(\varphi_{0,m})(0)$ 是有意义的, 其中 $m \in M$. 下证 f 是 R -单同态.

对任意 $m \in M$, $s \in S$, 有

$$(d_r^0\varphi_{0,m})(x) = \sum_{y \in S} d_r^0(y)\varphi_{0,m}(y+x) =$$

$$d_r^0(0)\varphi_{0,m}(x) = r\varphi_{0,m}(x) = \varphi_{0,rm}(x),$$

从而 $d_r^0\varphi_{0,m} = \varphi_{0,rm}$, 于是

$$\begin{aligned} f(rm) &= \alpha(\varphi_{0,rm})(0) = \alpha(d_r^0\varphi_{0,m})(0) = \\ &= [d_r^0\alpha(\varphi_{0,m})](0) = \\ &= \sum_{y \in S} d_r^0(y)[\alpha(\varphi_{0,m})](y+0) = \\ &= r\alpha(\varphi_{0,m})(0) = rf(m), \end{aligned}$$

所以 f 是 R -同态. 如果 $f(m) = 0$, 则 $\alpha(\varphi_{0,m}) = 0$. 由 α 是单同态得, $\varphi_{0,m} = 0$ 必须有 $m = 0$, 因

此 f 是 R -单同态. 由条件(1), $\text{Im}(f) \leq_e {}_R M$.

以下用超穷归纳法证明 $\text{Im}(\alpha) \leq_e [{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$. 任取 $0 \neq \varphi \in [M^{S, \leq}]$, 设 $\sigma(\varphi) = s$.

(i) 若 $s=0$, 则 $0 \neq \varphi(0) \in M$, 由 $\text{Im}(f) \leq_e M_R$ 及引理1知, 存在 $r \in R$ 使得 $0 \neq r\varphi(0) \in \text{Im}(f)$. 令 $m = f^{-1}(r\varphi(0))$, 由引理2知, $\sigma(\alpha(\varphi_{0,m})) = 0$, 因此对 $t \in S$,

$$\alpha(\varphi_{0,m})(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ f(m) = r\varphi(0), & t = 0, \\ = d_r^0 \varphi(t), \end{cases}$$

即 $0 \neq d_r^0 \varphi = \alpha(\varphi_{0,m}) \in \text{Im}(\alpha)$.

(ii) 若 $0 < s$, 假设对任意 $0 \neq \psi \in [M^{S, \leq}]$, 若 $\sigma(\psi) = u < s$, 则存在 $\psi' \in [M^{S, \leq}]$, $d_r^0 \psi \in [{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$, 使得 $\sigma(\psi') \leq u$, $0 \neq d_r^0 \psi = \alpha(\psi') \in \text{Im}(\alpha)$. 下证结论对 $\varphi \in [M^{S, \leq}]$, $\sigma(\varphi) = s$ 成立.

既然 $0 \neq \varphi(s) \in M$, $\text{Im}(f) \leq_e {}_R M$, 因此存在 $m \in M$, $r \in R$, 使得

$$0 \neq r\varphi(s) = f(m). \quad (*)$$

由 M 具有性质(F)知, 存在 $e \in R$, 使得 $em = m$, $e\alpha(\varphi_{s,m})(s) = \alpha(\varphi_{s,m})(s)$. 又因为

$$(d_e^s \varphi_{s,m})(t) = \sum_{y \in S} d_e^s(y) \varphi_{s,m}(t+y) = e\varphi_{s,m}(t+s),$$

所以 $d_e^s \varphi_{s,m} = \varphi_{0,m}$, 从而有

$$\alpha(\varphi_{0,m})(t) = \alpha(d_e^s \varphi_{s,m})(t) = [d_e^s \alpha(\varphi_{s,m})](t) = \sum_{y \in S} d_e^s(y) \alpha(\varphi_{s,m})(t+y) = e\alpha(\varphi_{s,m})(s+t),$$

因此 $\alpha(\varphi_{s,m})(s) = \alpha(\varphi_{0,m})(0) = f(m)$, 结合(*)式, 有

$$[d_r^0 \varphi - \alpha(\varphi_{s,m})](s) = (d_r^0 \varphi)(s) - \alpha(\varphi_{s,m})(s) = r\varphi(s) - f(m) = 0.$$

显然当 $s < t \in S$ 时, $[d_r^0 \varphi - \alpha(\varphi_{s,m})](t) = 0$.

若 $d_r^0 \varphi - \alpha(\varphi_{s,m}) = 0$, 则 $0 \neq d_r^0 \varphi = \alpha(\varphi_{s,m}) \in \text{Im}(\alpha)$.

若 $d_r^0 \varphi - \alpha(\varphi_{s,m}) \neq 0$, 则 $\sigma[d_r^0 \varphi - \alpha(\varphi_{s,m})] = u < s$. 由归纳假设, 存在 $\varphi' \in [M^{S, \leq}]$, $d_r^0 \varphi' \in [{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$, 且 $\sigma(\varphi') \leq u$, 使得 $0 \neq d_r^0 [d_r^0 \varphi - \alpha(\varphi_{s,m})] = \alpha(\varphi')$, 从而 $(d_r^0 d_r^0 \varphi) = \alpha(d_r^0 \varphi_{s,m} + \varphi') \in \text{Im}(\alpha)$, 显然 $\sigma(d_r^0 \varphi_{s,m} + \varphi') \leq s$, 且 $(d_r^0 d_r^0 \varphi) \neq 0$, 否则由 α 是单同态得, $d_r^0 \varphi_{s,m} + \varphi' = 0$, 从而对任意 $t \in S$,

$$0 = (d_r^0 \varphi_{s,m} + \varphi')(t) =$$

$$(d_r^0 \varphi_{s,m})(t) + \varphi'(t) = \begin{cases} r'm, & t = s, \\ \varphi'(t), & t \neq s. \end{cases}$$

显然 $\varphi'(s) = 0$, 从而 $\varphi' = 0$, 这与 $\alpha(\varphi') \neq 0$ 矛盾.

综合(i), (ii)及引理1可知, $\text{Im}(\alpha) \leq_e [{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$, (2)得证.

(2) \implies (1). 设 $f: M \rightarrow M$ 是 R -单同态, 定义 $\alpha: [M^{S, \leq}] \rightarrow [M^{S, \leq}]$, $\alpha(\varphi)(s) = f(\varphi(s))$, 则对任意 $s \in S$, $\varphi \in [M^{S, \leq}]$, $g \in [{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$, 有

$$\begin{aligned} \alpha(g\varphi)(s) &= f((g\varphi)(s)) = \\ &= f\left(\sum_{y \in S} g(y)\varphi(s+y)\right) = \sum_{y \in S} g(y)f(\varphi(s+y)) = \\ &= \sum_{y \in S} g(y)[\alpha(\varphi)](s+y) = (g\alpha(\varphi))(s), \end{aligned}$$

即 α 是 $[{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$ -同态. 如果 $\alpha(\varphi) = 0$, 则对任意 $s \in S$, $f(\varphi(s)) = \alpha(\varphi)(s) = 0$, 由 f 是 R -单同态得 $\varphi(s) = 0$, 从而 $\varphi = 0$, 所以 α 是 $[{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$ -单同态, 由条件(2), $\text{Im}(\alpha) \leq_e [{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$.

对任意 $0 \neq m \in M$, 有 $0 \neq \varphi_{0,m} \in [M^{S, \leq}]$, 从而存在 $\varphi \in [M^{S, \leq}]$ 和 $d \in [{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$, 使得 $0 \neq d\varphi_{0,m} = \alpha(\varphi)$. 又存在 $r \in R$, 使得 $d_r^0 \varphi_{0,m} = d\varphi_{0,m}$, 所以

$$\begin{aligned} 0 \neq rm &= (d_r^0 \varphi_{0,m})(0) = (d\varphi_{0,m})(0) = \\ &= \alpha(\varphi)(0) = f(\varphi(0)), \end{aligned}$$

即 $0 \neq rm \in \text{Im}(f)$, 由引理1知, $\text{Im}(f) \leq_e {}_R M$, (1)得证. **】**

推论1 设 R 是有单位元的结合环, M, N 是左 R -酉模, 则以下条件等价:

- (1) 任意 R -单同态 $M \rightarrow N$ 是基本的;
- (2) 任意 $[{}_{[R^{S, \leq}]} M^{S, \leq}]$ -单同态 $[M^{S, \leq}] \rightarrow [N^{S, \leq}]$ 是基本的.

推论2 设 $(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \dots, (S_n, \leq_n)$ 是 Artin 的严格全序幺半群, 以 $(lex \leq)$ 和 $(revlex \leq)$ 分别表示幺半群 $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ 上的字典顺序和反字典顺序, 如果左 R -模 M 具有性质(F), 则以下条件等价:

- (1) 左 R -模 M 是弱 Co -Hopf 模;
- (2) 左 $[{}_{[R^{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (lex \leq)}]} M^{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (lex \leq)}]$ -模 $[M^{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (lex \leq)}]$ 是弱 Co -Hopf 模;
- (3) 左 $[{}_{[R^{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (revlex \leq)}]} M^{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (revlex \leq)}]$ -模 $[M^{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (revlex \leq)}]$ 是弱 Co -Hopf 模.

证明 (1) \iff (2). 因为 $(S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (lex \leq))$ 是 Artin 的严格全序幺半群^[5], 于是由定理1, 左 R -模 M 是弱 Co -Hopf 模当且仅当左 $[{}_{[R^{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (lex \leq)}]} M^{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (lex \leq)}]$ -模 $[M^{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, (lex \leq)}]$ 是弱 Co -Hopf 模;

(1) \iff (3) 类似. **】**

(下转第14页)

$$\text{Ker } \sigma \subseteq \begin{pmatrix} \text{Ker } f & 0 \\ M & \text{Ker } g \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} \text{Jac}(A) & 0 \\ M & \text{Jac}(B) \end{pmatrix} = \text{Jac}(T').$$

故 $T' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & B \end{pmatrix}$ 是广义 Hopf 环. **】**

设 R 是环, ${}_R M_R$ 是双模, R 关于 M 的平凡扩张 $T(R, M) = R \oplus M$ 按照通常的加法和如下定义的乘法:

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

同构于所有的矩阵环 $T^* = \begin{pmatrix} r & 0 \\ m & r \end{pmatrix}$, 其中 $r \in R, m \in M$, T^* 的运算是通常矩阵的运算^[7].

推论 3 如果 R 是广义 Hopf 环, 则 $T(R, M)$ 是广义 Hopf 环.

参考文献:

[1] Haghany A. Hopficity and co-Hopficity for Morita

contexts[J]. *Comm Algebra*, 1999, **27**(1): 477—492.

[2] YE Yu an-qing. Semiclean ring[J]. *Comm Algebra*, 2003, **31**(11): 5609—5625.

[3] HAN J, Nicholson W K. Extension of clean rings[J]. *Comm Algebra*, 2001, **29**(6): 2589—2595.

[4] Ghorbani A, Haghany A. Duality for weakly co-Hopfian and generalized Hopfian modules[J]. *Comm Algebra*, 2003, **31**(6): 2811—2817.

[5] Anderson W F, Fuller K R. *Rings and Categories of Modules*[M]. New York: Springer-Verlag, 1974.

[6] Haghany A, Varadarajan K. Study of formal triangular matrix rings [J]. *Comm Algebra*, 1999, **27**(1): 5507—5525.

[7] Nam Kyun Kim, Yang Lee. Extension of reversible rings[J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2003, **185**: 207—233.

(责任编辑 马宇鸿)

(上接第 10 页)

推论 3 设 x_1, x_2, \dots, x_k 是环 R 上的 k 个可交换的未定元, 若左 R -模 M 具有性质 (F) , 则下面条件等价:

- (1) 左 R -模 M 是弱 *Co-Hopf* 模;
- (2) 左 $R[[x_1, x_2, \dots, x_k]]$ -模 $M[x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_k^{-1}]$ 是弱 *Co-Hopf* 模.

证明 令 $S_1 = S_2 = \dots = S_n = N, \leq_i, i=1, 2, \dots, n$ 是 N 上通常的序, 则由推论 2 及文献[5]可证结论成立. **】**

推论 4 设 x 是环 R 上的未定元, 若左 R -模 M 具有性质 (F) , 则下面条件等价:

- (1) 左 R -模 M 是弱 *Co-Hopf* 模;
- (2) 左 $R[[x]]$ -模 $M[x^{-1}]$ 是弱 *Co-Hopf* 模.

证明 由推论 3, 取 $k=1$ 可证. **】**

参考文献:

[1] Haghany A, Vadadi M R. Modules whose injective endomorphisms are essential [J]. *J Algebra*, 2001, **243**: 765—779.

[2] Varadarajan K. Hopfian and Co-Hopfian objects [J]. *Publ Mat*, 1992, **36**: 293—317.

[3] LIU Z K. Co-Hopfian modules of generalized inverse polynomials [J]. *Acta Sinica*, 2001, **17**: 431—436.

[4] Tominaga H. On S -unital rings [J]. *Math J Okagawa Univ*, 1976, **18**: 117—134.

[5] Ribenboim P. Noetherian rings of generalized power series [J]. *J Pure Appl Algebra*, 1992, **79**: 293—312.

[6] Ribenboim P. Semisimple rings and Von Neumann regular rings of generalized power series [J]. *J Algebra*, 1997, **198**: 327—338.

[7] LIU Z K, Cheng H. Quasi-duality for the rings of generalized power series [J]. *Comm Algebra*, 2000, **28**: 1175—1188.

[8] Park S. Inverse polynomials and injective covers [J]. *Comm Algebra*, 1993, **21**: 4599—4613.

[9] Anderson F W, Fuller K R. *Rings and Categories of Modules*[M]. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1973. 75.

(责任编辑 马宇鸿)