

# 四次 B 样条 Galerkin 有限元法求解 KdV 方程

刘兴霞, 孙建安\*, 豆福全, 刘万海  
(西北师范大学 物理与电子工程学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 采用有限元方法进行空间离散, 提出了解一维非线性 KdV 方程的四次 B 样条 Galerkin 方法. 通过两个数值算例来体现这种算法的精确度, 对该方法得到的数值解与精确解以及二次 B 样条 Galerkin 有限元解进行比较, 结果表明所求得的数值解与精确解符合得很好.

**关键词:** KdV 方程; 四次 B 样条 Galerkin 有限元方法; 数值解

**中图分类号:** O 175.29

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1001-988X(2008)04-0066-05

## Galerkin quartic B-spline finite element method for solving KdV equation

LIU Xing-xia, SUN Jian-an, DOU Fu-quan, LIU Wan-hai

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

**Abstract:** Numerical solutions for the one-dimensional nonlinear Korteweg-de Vries equation is obtained by using the method of discretization in space and finite element approximation. To demonstrate the efficiency of the method two test problems are considered. The numerical solutions of the KdV equation are compared with both the exact solutions and Galerkin quadratic B-spline finite element solutions. The numerical solutions are found to be in good agreement with the exact solutions.

**Key words:** Korteweg-de Vries equation; Galerkin quartic B-spline finite element method; numerical solution

KdV 方程在浅水波、转动大气中的 Rossby 波、等离子体中的离子声波、低温非线性晶格声子波包的热激发和非谐晶格的振动等问题中有着广泛的应用. 文献[1]、[2]研究了 KdV 方程的解析解. 文献[3]用热平衡积分法对 KdV 方程进行了求解. 文献[4]~[6]构造了解 KdV 方程的有限差分法. 文献[7]~[9]建立了解 KdV 方程的有限元法, 分别采用了立方 B 样条形函数, 二次 B 样条形函数和 Hermite 多项式形函数. 但采用四次 B 样条的有限元法解 KdV 方程的文献尚未见到. 笔者采用四次 B 样条 Galerkin 有限元法对 KdV 方程一定的初边值问题进行了数值求解, 并通过两个数值算例展示了这种算法的精确度和优越性.

### 1 方法简述

考虑如下 KdV 方程的初边值问题

$$U_t + \epsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0$$

$$(a \leq x \leq b, t > 0), \quad (1)$$

$$U(x, 0) = U_0(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad (2)$$

$$U(a, t) = U(b, t) = 0 \quad (t > 0). \quad (3)$$

其中  $\epsilon$  是非线性项系数,  $\mu$  是频散系数. 下标  $x, t$  表示对变量  $x, t$  的偏导数,  $U_0(x)$  为已知函数.

把拟求解的时间区间  $[0, T]$  以步长  $\Delta t = T/p$  等分为  $p$  个子区间 ( $p$  为正整数), 记为  $I_1, I_2, \dots, I_p$ . 其中,  $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ ,  $t_0 = 0$ . 在每一时间点  $t_j$ , 记

收稿日期: 2007-06-07; 修改稿收到日期: 2007-10-22

作者简介: 刘兴霞 (1978-), 女, 甘肃会宁人, 硕士研究生. 主要研究方向为计算物理.

\* 通讯联系人, 教授, 硕士研究生导师. E-mail: sunja@nwnu.edu.cn

$z_j(x) = U(x, t_j)$ , 以差分算子  $\frac{z_j(x) - z_{j-1}(x)}{\Delta t}$  近似微分算子  $\frac{\partial U}{\partial t}$ , 将偏微分方程(1)化为如下的常微分方程组

$$\frac{1}{\Delta t} z_j(x) + \epsilon z_j(x) z_j'(x) + \mu z_j'''(x) = \frac{1}{\Delta t} z_{j-1}(x), \quad (4)$$

$$z_j(a) = z_j(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p). \quad (5)$$

依据初值  $z_0(x) = U_0(x)$ , 依次可得  $j = 1, 2, \dots, p$  时方程(1)的近似解.

常微分方程组(4), (5)采用如下的 Galerkin 有限元法进行求解. 方程(4), (5)在区间  $[a, b]$  上的弱解由下式确定

$$\int_a^b v(x) \left[ \frac{1}{\Delta t} (z_j(x) - z_{j-1}(x)) + \epsilon z_j(x) z_j'(x) + \mu z_j'''(x) \right] dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad (6)$$

其中  $v(x)$  是权函数. 运用分部积分得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_a^b v(x) z_j(x) dx + \epsilon \int_a^b v(x) z_j(x) z_j'(x) dx - \\ & \mu \int_a^b v'(x) z_j''(x) dx = \\ & \frac{1}{\Delta t} \int_a^b v(x) z_{j-1}(x) dx - \mu (v(x) z_j''(x)) \Big|_a^b \\ & \quad (j = 1, 2, \dots, p). \quad (7) \end{aligned}$$

把区间  $[a, b]$  以步长  $h = (b-a)/N$  ( $N$  为正整数) 等分为  $N$  个有限单元, 节点为  $x_i$ , 有

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

四次 B 样条集合  $\{\Phi_{-2}, \Phi_{-1}, \dots, \Phi_{N+1}\}$  构成定义在区间  $[a, b]$  上的一组基函数, 其定义为<sup>[10]</sup>

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} 0, & [a, x_{m-2}], \\ (x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m], \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}], \\ 0, & [x_{m+3}, b]. \end{cases}$$

其中,  $h = x_{m+1} - x_m$ ,  $m = -2, -1, \dots, N+1$ .

$\Phi_m(x)$  在区间  $[x_{m-2}, x_{m+3}]$  以外的函数值为零.

函数  $z_j(x)$  的近似解  $z_j^N(x)$  根据四次 B 样条函数可写成

$$z_j^N(x) = \sum_{m=-2}^{N+1} c_m^j \Phi_m(x), \quad (8)$$

其中  $c_m^j$  是待定系数. 运用方程(8), 节点值  $z_{j,m}$ ,  $z_{j,m}'$  及  $z_{j,m}''$  可根据系数  $c_m^j$  表示为

$$\begin{aligned} z_{j,m} &= z_j(x_m) = c_{m-2}^j + 11c_{m-1}^j + 11c_m^j + c_{m+1}^j, \\ z_{j,m}' &= z_j'(x_m) = \frac{4}{h} (-c_{m-2}^j - 3c_{m-1}^j + 3c_m^j + c_{m+1}^j), \\ z_{j,m}'' &= z_j''(x_m) = \frac{12}{h^2} (c_{m-2}^j - c_{m-1}^j - c_m^j + c_{m+1}^j). \end{aligned}$$

由于  $z_j^N(x)$  必须满足边界条件(5), 所以

$$\begin{aligned} c_{-2}^j &= -11c_{-1}^j - 11c_0^j - c_1^j, \\ c_{N+1}^j &= -11c_{N-2}^j - 11c_{N-1}^j - c_N^j. \end{aligned}$$

因此, 近似解可表示为

$$z_j^N(x) = \sum_{m=-1}^N c_m^j \varphi_m(x). \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_{-1}(x) &= \Phi_{-1}(x) - 11\Phi_{-2}(x), \\ \varphi_0(x) &= \Phi_0(x) - 11\Phi_{-2}(x), \\ \varphi_1(x) &= \Phi_1(x) - \Phi_{-2}(x), \\ \varphi_m(x) &= \Phi_m(x) \quad (m = 2, 3, \dots, N-3), \\ \varphi_{N-2}(x) &= \Phi_{N-2}(x) - \Phi_{N+1}(x), \\ \varphi_{N-1}(x) &= \Phi_{N-1}(x) - 11\Phi_{N+1}(x), \\ \varphi_N(x) &= \Phi_N(x) - 11\Phi_{N+1}(x). \end{aligned}$$

因此有  $N+2$  个待定系数  $c_m^j$  ( $m = -1, 0, \dots, N$ ).

我们用 Galerkin 法构造方程(7)的近似解, 权函数  $v(x)$  选为

$$v_m(x) = \varphi_m(x) \quad (m = -1, 0, \dots, N),$$

则有  $v(a) = v(b) = 0$ , (7)式可化为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-1}^N \left[ \int_a^b \varphi_k \varphi_m dx \right] c_m^j + \\ & \epsilon \sum_{n=-1}^N \sum_{m=-1}^N \left[ \int_a^b \varphi_k \varphi_m \varphi_n' dx \right] c_n^j c_m^j - \\ & \mu \sum_{m=-1}^N \left[ \int_a^b \varphi_k' \varphi_m'' dx \right] c_m^j = \frac{1}{\Delta t} \int_a^b \varphi_k z_{j-1} dx \\ & \quad (k = -1, 0, \dots, N; j = 1, 2, \dots, p). \quad (10) \end{aligned}$$

方程(10)写成矩阵形式为

$$\frac{1}{\Delta t} A c^j + \epsilon B(c^j) c^j - \mu C c^j = \frac{1}{\Delta t} D^{j-1}, \quad (11)$$

其中  $c^j = (c_{-1}^j, c_0^j, \dots, c_N^j)^T$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ .

矩阵  $A, B, C$  是  $(N+2) \times (N+2)$  阶的九对角矩阵,  $D^{j-1}$  是  $N+2$  维的列向量, 其中的定积分

采用梯形求积法计算. 对每一个  $j$  值, 方程(11)都是含有  $N+2$  个未知数的  $N+2$  阶非线性方程组, 采用牛顿法进行求解.

### 2 数值算例

采用四次 B 样条 Galerkin 有限元法求解以下算例, 分别为 KdV 方程的单孤子解和双孤子解.

例 1 考虑 KdV 方程的初边值问题

$$U_t + \epsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0 \quad (0 \leq x \leq 2, t > 0),$$

$$U(x, 0) = 3C \operatorname{sech}^2(Ax + D) \quad (0 \leq x \leq 2),$$

$$U(0, t) = U(2, t) = 0 \quad (t > 0).$$

该问题的精确解为<sup>[11]</sup>

$$U(x, t) = 3C \operatorname{sech}^2(Ax - Bt + D) \quad (0 \leq x \leq 2),$$

其中  $C, D$  是常数,  $A = \sqrt{\epsilon C / \mu} \sqrt{2}$ ,  $B = \epsilon AC$ . 这是 KdV 方程的单孤子解.

例 2 考虑 KdV 方程的边值问题为

$$U(0, t) = U(4, t) = 0 \quad (t > 0).$$

初值由其精确解<sup>[12]</sup>

$$U(x, t) = 12\mu(\log F)_{xx} \quad (0 \leq x \leq 4)$$

表 1 算例 1 在  $t=0.01$  时的数值解与精确解的比较

Table 1 Comparison of numerical and exact solutions of the problem 1 at  $t=0.01$

x	数值解(numerical solution)				精确解 (exact solution)
	$\Delta t=0.001$		$\Delta t=0.01$		
	本文方法	文献[ 8]	本文方法	文献[ 8]	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.00024751	0.00024750	0.00024804	0.00024806	0.00024746
0.2	0.00298008	0.00297987	0.00298666	0.00298678	0.00297915
0.3	0.03529650	0.03527915	0.03537635	0.03535702	0.03527076
0.4	0.34691335	0.34553080	0.34729317	0.34601338	0.34551632
0.5	0.86768477	0.86920580	0.86691820	0.86825454	0.86931951
0.6	0.18345958	0.18394800	0.18369916	0.18424848	0.18391225
0.7	0.01688319	0.01688850	0.01692355	0.01693137	0.01688449
0.8	0.00141292	0.00141291	0.00141663	0.00141665	0.00141257
0.9	0.00011727	0.00011727	0.00011759	0.00011758	0.00011724
1.0	0.00000973	0.00000972	0.00000975	0.00000975	0.00000972
1.1	0.00000081	0.00000080	0.00000081	0.00000081	0.00000081
1.2	0.00000007	0.00000007	0.00000007	0.00000007	0.00000007
1.3	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000000	0.00000001
1.4	0.0	0.0	0.0	-0.00000001	0.0
1.5	0.0	0.0	0.0	0.00000012	0.0
1.6	0.0	0.0	0.0	0.00000478	0.0
1.7	0.0	0.0	0.0	0.00002693	0.0
1.8	0.0	0.0	0.0	-0.00136195	0.0
1.9	0.0	0.0	0.0	-0.03066142	0.0
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

在  $t=0$  时得到, 其中

$$F = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 e^{(\eta_1 + \eta_2)},$$

$$\eta_i = \alpha_i x - \alpha_i^3 \mu t + b_i \quad (i = 1, 2),$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{0.3}{\mu}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{0.1}{\mu}},$$

$$b_1 = -0.48\alpha_1, \quad b_2 = -1.07\alpha_2.$$

### 3 数值结果与结论

为了便于和其它算法进行比较, 上述两个算例均取以下参数值:

$$\mu = 4.84 \times 10^{-4}, \quad \epsilon = 1.0, \quad D = -6.0, \quad C = 0.3.$$

表 1 与表 2 中将四次 B 样条 Galerkin 有限元解(空间步长为  $h=0.0125$ , 时间步长分别为  $\Delta t=0.001, \Delta t=0.01$ )与精确解、二次 B 样条 Galerkin 有限元解(空间步长为  $h=0.0125$ , 时间步长分别为  $\Delta t=0.001, \Delta t=0.01$ )进行了比较. 表 3 与表 4 中比较了表 1 与表 2 中数值解与精确解之间的绝对误差.

表 2 算例 2 在  $t=0.01$  时的数值解与精确解的比较

Table 2 Comparison of numerical and exact solutions of the problem 2 at  $t=0.01$

x	数值解 (numerical solution)				精确解 (exact solution)
	$\Delta t=0.001$		$\Delta t=0.01$		
	本文方法	文献[ 8]	本文方法	文献[ 8]	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.00136249	0.00136239	0.00136171	0.00136190	0.00136152
0.4	0.16306997	0.16276950	0.16390704	0.16356541	0.15599864
0.6	0.07457267	0.07465229	0.07448437	0.07456850	0.07645028
0.8	0.00134448	0.00134446	0.00134599	0.00134597	0.00134442
1.0	0.01284711	0.01284584	0.01284683	0.01284563	0.01281755
1.2	0.11325019	0.11321610	0.11324972	0.11321578	0.11233426
1.4	0.05045604	0.05047162	0.05045471	0.05047027	0.05084659
1.6	0.00356645	0.00356654	0.00356660	0.00356671	0.00356898
1.8	0.00020403	0.00020403	0.00020405	0.00020405	0.00020404
2.0	0.00001152	0.00001152	0.00001152	0.00001152	0.00001152
2.2	0.00000065	0.00000065	0.00000065	0.00000065	0.00000065
2.4	0.00000004	0.00000004	0.00000004	0.00000004	0.00000004
2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3.4	0.0	0.0	0.0	-0.00000001	0.0
3.6	0.0	0.0	0.0	0.00000478	0.0
3.8	0.0	0.0	0.0	-0.00136185	0.0
4.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表 3 算例 1 在  $t=0.01$  时的绝对误差值

Table 3 Absolute error of the problem 1 at  $t=0.01$

x	绝对误差 (absolute error)			
	$\Delta t=0.001$		$\Delta t=0.01$	
	本文方法	文献[ 8]	本文方法	文献[ 8]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.00000005	0.00000004	0.00000058	0.00000060
0.2	0.00000093	0.00000072	0.00000751	0.00000763
0.3	0.00002574	0.00000839	0.00010559	0.00008626
0.4	0.00139703	0.00006828	0.00177685	0.00049706
0.5	0.00163474	0.00011371	0.00240131	0.00106497
0.6	0.00045267	0.00003575	0.00021309	0.00033623
0.7	0.00000130	0.00000401	0.00003906	0.00004688
0.8	0.00000035	0.00000034	0.00000406	0.00000408
0.9	0.00000003	0.00000003	0.00000035	0.00000034
1.0	0.00000001	0.0	0.00000003	0.00000003
1.1	0.0	0.00000001	0.0	0.0
1.2	0.0	0.0	0.0	0.0
1.3	0.0	0.0	0.0	0.00000001
1.4	0.0	0.0	0.0	0.00000001
1.5	0.0	0.0	0.0	0.00000012
1.6	0.0	0.0	0.0	0.00000478
1.7	0.0	0.0	0.0	0.00002693
1.8	0.0	0.0	0.0	0.00136195
1.9	0.0	0.0	0.0	0.03066142
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表 4 算例 2 在  $t=0.01$  时的绝对误差值

Table 4 Absolute error of the problem 2 at  $t=0.01$

x	绝对误差 (absolute error)			
	$\Delta t=0.001$		$\Delta t=0.01$	
	本文方法	文献[ 8]	本文方法	文献[ 8]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.00000097	0.00000087	0.00000019	0.00000038
0.4	0.00707133	0.00677086	0.00790840	0.00756677
0.6	0.00187761	0.00179799	0.00196591	0.00188178
0.8	0.00000006	0.00000004	0.00000157	0.00000155
1.0	0.00002956	0.00002829	0.00002928	0.00002808
1.2	0.00091593	0.00088184	0.00091546	0.00088152
1.4	0.00039055	0.00037497	0.00039188	0.00037632
1.6	0.00000253	0.00000244	0.00000238	0.00000227
1.8	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000001
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2.2	0.0	0.0	0.0	0.0
2.4	0.0	0.0	0.0	0.0
2.6	0.0	0.0	0.0	0.0
2.8	0.0	0.0	0.0	0.0
3.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3.2	0.0	0.0	0.0	0.0
3.4	0.0	0.0	0.0	0.00000001
3.6	0.0	0.0	0.0	0.00000478
3.8	0.0	0.0	0.0	0.00136185
4.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表1~表4的比较结果表明, 本文得到的有限元解在方程解变化剧烈的区域精确度不及二次B样条 Galerkin 有限元解, 但在方程解变化平缓的区域精确度高于二次B样条 Galerkin 有限元解. 在时间步长比较小的情况下( $\Delta t=0.001$ ), 所得到的有限元解及二次B样条 Galerkin 有限元解在小时间值都和精确解符合得很好. 更重要的是由表1~表4可以看出, 在时间步长比较大的情况下( $\Delta t=0.01$ ), 即使小时间值, 二次B样条 Galerkin 有限元解也在方程解变化平缓的区域出现振荡, 与精确解有较大差异; 而所构造的四次B样条 Galerkin 有限元解在整个求解区间都与精确解符合得很好.

算例1与算例2数值解的模拟图像分别如图1、图2所示.

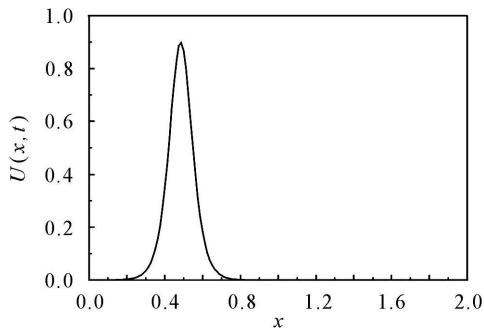


图1 算例1在  $t=0.01$ ,  $\Delta t=0.01$  时的四次B样条 Galerkin 有限元解

Fig 1 The finite element solution of the problem 1 at  $t=0.01$ ,  $\Delta t=0.01$

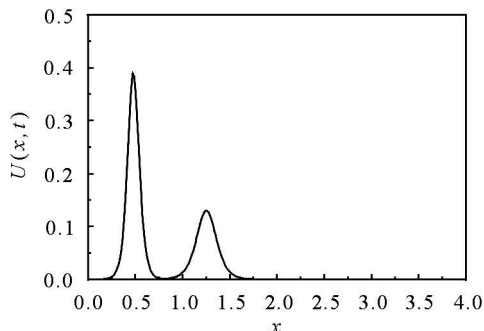


图2 算例2在  $t=0.01$ ,  $\Delta t=0.01$  时的四次B样条 Galerkin 有限元解

Fig 2 The finite element solution of the problem 2 at  $t=0.01$ ,  $\Delta t=0.01$

#### 参考文献:

[ 1 ] ZABUSKAY N J. A synergetic approach to problem of nonlinear dispersive wave propagation and interaction[ C ]// AMES W. *Proc Symp Nonlinear Partial Dif f. Equations*. Academic Press, 1967.

- [ 2 ] FORNBERG B, WHITHAM G B. A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena [ J ]. *Philos Trans Roy Soc*, 1978, **289**: 373-404.
- [ 3 ] KUTLUAY S, BAHADIR A R, ÖZEDES A. A small time solutions for the Korteweg-de Vries equation[ J ]. *Appl Math Comput*, 2000, **107**: 203-210.
- [ 4 ] ZABUSKAY N J, KURUSKAL M D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states[ J ]. *Phys Rev Lett*, 1965, **15**: 240-243.
- [ 5 ] GODA K. On instability of some finite difference schemes for Korteweg-de Vries equation[ J ]. *J Phys Soc Japan*, 1975, **39**: 229-236.
- [ 6 ] VLIENGENTHART A C. On finite difference methods for the Korteweg-de Vries equation[ J ]. *J Eng Math*, 1971, **5**: 137-155.
- [ 7 ] GARDNER G A, ALI A H A, GARDNER L R T. A finite element solution for the Korteweg-de Vries equation using cubic B-spline shape function[ C ]// GRUBER R, PERIAUX J, SHAW R P. *ISNME-89*. Berlin: Springer, 1989, **2**: 565-570.
- [ 8 ] AKSAN E N, ÖZEDES A. Numerical solution of Korteweg-de Vries equation by Galerkin B-spline finite element method [ J ]. *Appl Math Comput*, 2006, **175**: 1256-1265.
- [ 9 ] GARDNER G A, ALI A H A. A numerical solutions for the Korteweg-de Vries equation using Galerkins method with Hermite polynomial shape functions [ C ]// *Proceeding of the International Conference on Modeling and Simulations*. Istanbul, 1988, **1C**: 81-93.
- [ 10 ] SAKA BÜLENT, DAĞIDRIS. Quartic B-Spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers' equation[ J ]. *Chaos, Silitons and Fractals*, 2007, **32**: 1125-1137.
- [ 11 ] ALEXANDER M E, MORRIS J LI. Galerkin methods for some model equations for nonlinear dispersive waves[ J ]. *J Comput Phys*, 1979, **30**: 428-451.
- [ 12 ] TAHA T R, ABLOWITZ M J. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. III. Numerical, Korteweg-de Vries equation[ J ]. *J Comput Phys*, 1984, **55**: 231-253.

(责任编辑 孙晓玲)