

DOI: 10.16783/j.cnki.nwnuz.2018.04.005

(d, n) -余挠模与 (d, n) -平坦模的环刻画

武斌¹, 杨晓燕²

(1. 兰州资源环境职业技术学院 基础学科部, 甘肃 兰州 730020;

2. 西北师范大学 数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 设 R 是环, 研究了 (d, n) -余挠模和 (d, n) -平坦模的应用, 证明了每一个右 R -模是 (d, n) -余挠模当且仅当每一个 (d, n) -平坦右 R -模是 (d, n) -余挠模; 对偶地, 证明了每一个右 R -模是 (d, n) -平坦模当且仅当每一个循环右 R -模是 (d, n) -平坦模. 最后给出了这两类模在多项式环下的等价刻画.

关键词: (d, n) -余挠模; (d, n) -平坦模; 多项式环; 平坦维数; 余挠覆盖

中图分类号: O 153.3

文献标志码: A

文章编号: 1001-988X(2018)04-0022-04

Ring characterization of (d, n) -cotorsion modules and (d, n) -flat modules

WU Bin¹, YANG Xiao-yan²

(1. Department of Basic Courses, Lanzhou Resources Environment College, Lanzhou 730020, Gansu, China;

2. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Let R be any rings, some applications of (d, n) -cotorsion modules and (d, n) -flat modules are investigated. It is proved that every right R -module is (d, n) -cotorsion if and only if every (d, n) -flat right R -module is (d, n) -cotorsion; dually, every right R -module is (d, n) -flat if and only if every cyclic right R -module is (d, n) -flat. The equivalent descriptions of these modules under polynomial rings are given.

Key words: (d, n) -cotorsion module; (d, n) -flat module; polynomial rings; flat dimension; cotorsion cover

0 引言

除非特别声明, 文中所有环均指有单位元的结合环, 模指酉模. 称右 R -模 C 是余挠模^[1], 如果对任意平坦右 R -模 F , $\text{Ext}_R^1(F, C) = 0$. 我们知道, 应用余挠模可以刻画右完全环: R 是右完全环当且仅当每一个(平坦)右 R -模是余挠模当且仅当每一个平坦右 R -模是投射模当且仅当每一个平坦右 R -模有余挠包络, 且它有唯一映射性质(见文献[2]命题 3.3.1 和文献[3]命题 2.18). Mao 等^[4]定义了 n -余挠右 R -模和 n -平坦右 R -模. 称右 R -模 M 是 n -余挠模, 如果对任意平坦右 R -模 N 有

$\text{Ext}_R^{n+1}(N, M) = 0$; 称右 R -模 M 是 n -平坦模, 如果对任意 n -余挠模右 R -模 N 有 $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$. 文献[4]证明了: 每一个右 R -模是 n -余挠模当且仅当每一个 n -平坦右 R -模是 n -余挠模当且仅当每一个(n -平坦)右 R -模有具有唯一映射性质的 n -余挠包络. Wu^[5]将 n -余挠模和 n -平坦模进行推广, 得到了 (d, n) -余挠模和 (d, n) -平坦模, 并研究了这两类模的性质, 证明了 $(F_{d,n}, C_{d,n})$ 是完全且遗传的余挠理论, 其中 $F_{d,n}(C_{d,n})$ 表示 (d, n) -平坦右 R -模类((d, n) -余挠右 R -模类).

受以上文献的启发, 文中应用 (d, n) -余挠模和 (d, n) -平坦模刻画这样的环 R , 使得每一个右

收稿日期: 2017-02-22; 修改稿收到日期: 2017-06-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11761060); 兰州资环学院自然科学基金资助项目(Z2016-32)

作者简介: 武斌(1982—), 女, 甘肃白银人, 讲师, 硕士. 主要研究方向为环的同调理论.

E-mail: wubin820116@163.com

R -模是 (d, n) -余挠模. 证明了: 每一个右 R -模是 (d, n) -余挠模当且仅当每一个 (d, n) -平坦右 R -模是 (d, n) -余挠模当且仅当每一个平坦维数小于等于 d 的右 R -模 M 属于 P_n (P_n 表示投射维数小于等于 n 的右 R -模类) 当且仅当对任意 $m (0 \leq m \leq n)$ 及任何 $(d, n-m)$ -平坦右 R -模 M , 有 $M \in P_m$. 对偶地, 证明了每一个右 R -模是 (d, n) -平坦模当且仅当每一个循环右 R -模是 (d, n) -平坦模当且仅当每一个 $((d, n)$ -余挠) 右 R -模有具有唯一映射性质的 (d, n) -平坦覆盖. 另外, 给出了这两类模在多项式环下的等价刻画.

1 预备知识

设 M 是右 R -模, n 和 d 是固定的非负整数, F_d 表示平坦维数小于等于 d 的右 R -模类, P_n 表示投射维数小于等于 n 的右 R -模类.

定义 1^[5] 称右 R -模 M 是 (d, n) -余挠模, 如果对任意 $N \in F_d$, $\text{Ext}_R^{n+1}(N, M) = 0$; 称右 R -模 M 是 (d, n) -平坦模, 如果对任何 (d, n) -余挠右 R -模 N , $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$.

命题 1^[5] 对于任意环 R , 以下结论成立:

(1) 如果 M 是一个 (d, n) -平坦模, 则对任何整数 $j \geq 0, m \geq 0$ 及任意 $(d, n+m)$ -余挠模 N , 有 $\text{Ext}_R^{j+m+1}(M, N) = 0$.

(2) 右 R -模 M 是 (d, n) -余挠模当且仅当存在正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \rightarrow 0$, 其中每一个 E^i 是 (d, n) -余挠右 R -模, $i = 0, 1, \dots, n$.

(3) $C_{d,n}$ 关于单同态余核封闭, $F_{d,n}$ 关于满同态核封闭.

定理 1^[5] 设 R 是环, n 和 d 是固定的非负整数, 则 $(F_{d,n}, C_{d,n})$ 是完全遗传的余挠理论.

定义 2^[6] 称 C -包络 $\phi: M \rightarrow F$ 具有唯一映射性质, 如果对任意同态 $f: M \rightarrow F'$, 其中 $F' \in C$, 且存在唯一的同态 $g: F \rightarrow F'$, 使得 $g\phi = f$.

定理 2^[7] 设 R 是环, 则 (P_n, P_n^\perp) 是完全遗传的余挠理论.

文中涉及的其他专业名词和术语均来自于文献 [8-12].

2 (d, n) -余挠模与 (d, n) -平坦模的应用

以下 $\sigma_M: M \rightarrow C_{d,n}(M)$ 表示右 R -模 M 的 (d, n) -余挠包络, $\eta_M: F_{d,n}(M) \rightarrow M$ 表示右 R -模 M 的 (d, n) -平坦覆盖, $Pd(M)$ 表示模 M 的投射维数.

定理 3 设 R 是环, n, d 是固定的非负整数, 则以下条件等价:

- (1) 每一个右 R -模是 (d, n) -余挠模.
- (2) 每一个 (d, n) -平坦右 R -模是 (d, n) -余挠模.
- (3) 每一个 (d, n) -平坦右 R -模是投射模.
- (4) 每一个平坦维数小于等于 d 的右 R -模属于 P_n .
- (5) 若右 R -模 M 属于 P_n^\perp , 则 M 是 $(d, 0)$ -余挠模.
- (6) 每一个 (d, n) -平坦右 R -模有具有唯一映射性质的 (d, n) -余挠包络.
- (7) 对任意的右 R -模 M 及任意的 $0 \leq m \leq n$, 若 $M \in F_{d, n-m}$, 则 $M \in P_m$.
- (8) 对任意的右 R -模 M , 若存在 $0 \leq m \leq n$ 使得 $M \in F_{d, n-m}$, 则 $M \in P_m$.
- (9) 对任意的右 R -模 M 及任意的 $0 \leq m \leq n$, 若 $M \in P_m^\perp$, 则 $M \in F_{d, n-m}$.
- (10) 对任意的右 R -模 M , 若存在 $0 \leq m \leq n$ 使得 $M \in P_m^\perp$, 则 $M \in F_{d, n-m}$.

如果 $n \geq 1$ 且 $(d, n-1)$ -余挠右 R -模类关于直和封闭, 则以上条件等价于下列条件:

- (11) 每一个 $(d, n-1)$ -平坦右 R -模有单的 $(d, n-1)$ -余挠覆盖.

证明 (1) \implies (6), (9) \implies (10) 显然.

(1) \implies (3). 由定理 1 得到.

(4) \iff (5), (7) \iff (9), (8) \iff (10) 由定理 1 及 (P_n, P_n^\perp) 是完全遗传的余挠理论得到.

(6) \implies (2). 设 M 是 (d, n) -平坦右 R -模, 则有以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\sigma_M} & C_{d,n}(M) & \xrightarrow{\gamma} & L & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \searrow \sigma_{L\gamma} & & \downarrow \sigma_L & & \\
 & & & & & & C_{d,n}(L) & &
 \end{array}$$

由 Wakawatsu 引理^[2] 知, L 是 (d, n) -平坦模, 而 $\sigma_L \gamma \sigma_M = 0 = 0 \sigma_M$, 于是由 (6) 知 $\sigma_L \gamma = 0$. 故 $L = \text{Im}(\gamma) \subseteq \text{Ker}(\sigma_L) = 0$, 所以 $M \in C_{d,n}$.

(2) \implies (1). 设 M 是右 R -模, 由定理 1 知, 存在正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 K 是 (d, n) -余挠模, N 是 (d, n) -平坦模. 又由 (2) 知 N 是 (d, n) -余挠模. 故由命题 1 (3) 知, M 是

(d, n) -余挠模.

(1) \implies (7). 令 M 是 $(d, n-m)$ -平坦右 R -模, N 是任何右 R -模. 因为 N 是 (d, n) -余挠模, 由命题 1(1) 得 $\text{Ext}_R^{m+1}(M, N) = 0$. 故 $Pd(M) \leq m$.

(8) \implies (4). 设 $M \in F_d, 0 \leq m \leq n, K_{n-m}$ 是 M 的第 $n-m$ 个合冲, 则对任意 $(d, n-m)$ -余挠右 R -模 N , 有 $\text{Ext}_R^1(K_{n-m}, N) \cong \text{Ext}_R^{n-m+1}(M, N) = 0$, 故 K_{n-m} 是 $(d, n-m)$ -平坦模. 又由 (8) 可知 $Pd(K_{n-m}) \leq m$, 所以 $Pd(M) \leq n$.

(4) \implies (1). 设 M 是任意右 R -模, 对任意 $F \in F_d$, 由 (4) 知 $F \in P_n$, 从而 $\text{Ext}_R^{n+1}(F, M) = 0$. 所以 M 是 (d, n) -余挠模.

(1) \implies (11). 设 M 是任意右 R -模, 记 $M = \Sigma\{N \leq M; N \text{ 是 } (d, n-1)\text{-余挠模}\}, G = \bigoplus\{N \leq M; N \text{ 是 } (d, n-1)\text{-余挠模}\}$, 则存在正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 0$. 由 (1) 知, K 是 (d, n) -余挠模, 而由假设知, G 是 $(d, n-1)$ -余挠模, 故 F 是 $(d, n-1)$ -余挠模. 下证包含映射 $i: F \rightarrow M$ 是 M 的 $(d, n-1)$ -余挠覆盖. 令 F' 是 $(d, n-1)$ -余挠模, $\Psi: F' \rightarrow M$ 是任意 R 同态, 由上面的证明知 $\Psi(F') \leq F$. 定义 $\epsilon: F' \rightarrow F$ 为 $\epsilon(x) = \Psi(x)$, 则对任何 $x \in F'$, 有 $i\epsilon = \Psi$, 故 $i: F \rightarrow M$ 是 M 的 $(d, n-1)$ -余挠覆盖. 另外, 单位映射 1_F 是使得 $ig = g, g: F \rightarrow F$ 的唯一映射. 故 (11) 得证.

(11) \implies (2). 设 M 是 (d, n) -平坦右 R -模, 下证 M 是 (d, n) -余挠模. 由定理 1 知, 存在正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$, 其中 E 是 $(d, n-1)$ -余挠模, L 是 $(d, n-1)$ -平坦模. 因为 L 有单的 $(d, n-1)$ -余挠覆盖 $\phi: F \rightarrow L$, 故有同态 $\alpha: E \rightarrow F$, 使得有以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & F & & \\ & & & & \downarrow \phi & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \end{array}$$

因为 ϕ 是满同态, 故 ϕ 是同构, 从而 L 是 $(d, n-1)$ -余挠模. 所以 M 是 (d, n) -余挠模. 】

推论 1^[4] 设 R 是环, 则以下结论等价:

- (1) 每一个右 R -模是 1-余挠模.
- (2) 每一个平坦右 R -模是 1-余挠模.
- (3) 每一个 1-平坦右 R -模是投射模.
- (4) 对任何平坦右 R -模 M 都有 $Pd(M) \leq 1$.
- (5) P_1^+ 中的每一个右 R -模 M 是余挠模.

命题 2 对于任意环 R , 以下结论等价:

- (1) 每一个右 R -模是 $(d, 2)$ -余挠模, 且每一个 $(d, 0)$ -平坦右 R -模有 $(d, 0)$ -余挠覆盖.
- (2) 每一个 $(d, 0)$ -平坦右 R -模有具有唯一映射性质的 $(d, 0)$ -余挠覆盖.

证明 (1) \implies (2). 设 M 是任意 $(d, 0)$ -平坦右 R -模, 则由 (1) 知, M 有 $(d, 0)$ -余挠覆盖 $f: F \rightarrow M$. 只需证对任意 $(d, 0)$ -余挠右 R -模 G 及任意同态 $g: G \rightarrow F$, 若 $fg = 0$, 则有 $g = 0$. 事实上, 因为 $\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$, 所以有 $\beta: F/\text{Im}(g) \rightarrow M$, 使得 $\beta\pi = f$, 其中 $\pi: F \rightarrow F/\text{Im}(g)$ 是自然映射. 因为 $\text{Ker}(g)$ 是 $(d, 2)$ -余挠模, 则由命题 1(2) 知, $F/\text{Im}(g)$ 是 $(d, 0)$ -余挠模. 故存在 $\alpha: F/\text{Im}(g) \rightarrow F$, 使得 $\beta = f\alpha$, 于是有以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & M & & \\ & & & & \uparrow f & & \\ & & & & \downarrow \beta & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(g) & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{g} & F \xrightarrow{\pi} F/\text{Im}(g) \longrightarrow 0 \end{array}$$

所以有 $f\alpha\pi = f$. 因为 f 是覆盖, 故 $\alpha\pi$ 是同构, 于是 π 是单同态. 所以 $g = 0$.

(2) \implies (1). 设 M 是任意右 R -模, 则有正合列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{\sigma_M} C_{d,0}(M) \xrightarrow{\tau} C \xrightarrow{\Psi} N \rightarrow 0$, 其中 $C = C_{d,0}(C_{d,0}(M)/M)$, N 是 $(d, 0)$ -平坦模. 设 $\phi: H \rightarrow N$ 是具有唯一映射性质的 $(d, 0)$ -余挠覆盖, 则存在 $\delta: C \rightarrow H$, 使得 $\Psi = \phi\delta$. 故 $\phi\delta\tau = \Psi\tau = 0 = \phi 0$, 所以 $\delta\tau = 0$, 于是有 $\text{Ker}(\Psi) = \text{Im}(\tau) \subseteq \text{Ker}(\delta)$, 故存在 $\gamma: N \rightarrow H$, 使得 $\gamma\Psi = \delta$, 于是有以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H & & \\ & & & & \uparrow \gamma & & \downarrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\sigma_M} & C_{d,0}(M) & \xrightarrow{\tau} & C \xrightarrow{\Psi} N \longrightarrow 0 \end{array}$$

从而 $\phi\gamma\Psi = \Psi$. 因为 Ψ 是满同态, 故 $\phi\gamma = 1_N$. 所以 N 同构于 H 的直和因子, 从而 N 是 $(d, 0)$ -余挠模. 由命题 1(2) 知 M 是 $(d, 2)$ -余挠模. 】

定理 4 设 R 是任意环, d, n 是固定的非负整数, 则以下条件等价:

- (1) 每一个右 R -模是 (d, n) -平坦模.
- (2) 每一个有限生成右 R -模是 (d, n) -平坦模.
- (3) 每一个循环右 R -模是 (d, n) -平坦模.
- (4) 每一个 (d, n) -余挠右 R -模是 (d, n) -平坦模.
- (5) 每一个 (d, n) -余挠右 R -模是内射的.

(6) 对任何 (d, n) -余挠右 R -模 M, N , 有 $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$.

(7) 对任何 (d, n) -余挠右 R -模 M, N , 任意 $i \geq 1$, 有 $\text{Ext}_R^i(M, N) = 0$.

(8) 每一个 (d, n) -余挠右 R -模有具有唯一映射性质的 (d, n) -平坦覆盖.

证明 (1) \implies (2) \implies (3), (1) \implies (8) 及 (1) \implies (4) \iff (6) \iff (7) 显然.

(1) \iff (5). 由定理 1 直接得到.

(8) \implies (4). 设 M 是任意 (d, n) -余挠右 R -模, 则有以下正合交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_{d,n}(K) & & \\
 & & \downarrow \eta_K & \searrow \alpha \eta_K & \\
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\alpha} & F_{d,n}(M) \xrightarrow{\eta_M} M \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

其中 $K \in C_{d,n}$, $\eta_M \alpha \eta_K = 0 = \eta_M 0$, 故由 (8) 得 $\alpha \eta_K = 0$, 则 $K = \text{Im}(\eta_K) \subseteq \text{Ker}(\alpha) = 0$. 所以 M 是 (d, n) -平坦模.

(4) \implies (1). 对任意右 R -模 M , 由定理 1 知, 存在正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$, 其中 N 是 (d, n) -余挠模, L 是 (d, n) -平坦模, 则由 (4) 知, N 是 (d, n) -平坦模. 故由命题 1(3) 可得 M 是 (d, n) -平坦模.

(3) \implies (5). 设 M 是任意 (d, n) -余挠右 R -模, I 是 R 的任一右理想, 则由 (3) 得 $\text{Ext}_R^1(R/I, M) = 0$. 故 M 是内射模. **】**

3 (d, n) -余挠模和 (d, n) -平坦模与多项式环

设 R 是环, $R[x]$ 是多项式环.

定理 5 设 R 是交换环, 则对任何右 $R[x]$ -模 M , 以下结论等价:

- (1) M_R 是 (d, n) -余挠右 R -模.
- (2) $\text{Hom}_R(R[x], M)$ 是 (d, n) -余挠右 R -模.
- (3) $\text{Hom}_R(R[x], M)$ 是 (d, n) -余挠右 $R[x]$ -模.
- (4) $M_{R[x]}$ 是 (d, n) -余挠右 $R[x]$ -模.

证明 (1) \implies (3). 设 F 是任意一个平坦维数小于等于 d 的右 $R[x]$ -模, 则 F 也是平坦维数小于等于 d 的右 R -模, 从而有

$$\text{Ext}_{R[x]}^1(F, \text{Hom}_R(R[x], M)) \cong$$

$$\text{Ext}_R^{n+1}(F \otimes_{R[x]} R[x], M) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(F, M) = 0.$$

故 $\text{Hom}_R(R[x], M)$ 是 (d, n) -余挠右 $R[x]$ -模.

(3) \implies (4). 因为 $M_{R[x]}$ 是 $\text{Hom}_R(R[x], M)$

的直和因子, 所以 $M_{R[x]}$ 是 (d, n) -余挠右 $R[x]$ -模.

(4) \implies (1). 设 F 是任意一个平坦维数小于等于 d 的右 R -模, 则 $F \otimes_R R[x]$ 是一个平坦维数小于或等于 d 的右 $R[x]$ -模, 从而有

$$\text{Ext}_{R[x]}^{n+1}(F, M) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(F, \text{Hom}_{R[x]}(R[x], M)) \cong \text{Ext}_{R[x]}^{n+1}(F \otimes_R R[x], M) = 0.$$

故 M 是 (d, n) -余挠右 R -模.

由上面的证明容易得到 (2) \iff (3). **】**

定理 6 设 R 是交换环, 则对任何右 $R[x]$ -模 N , 以下条件等价:

- (1) N_R 是 (d, n) -平坦右 R -模.
- (2) $N \otimes_R R[x]$ 是 (d, n) -平坦右 R -模.
- (3) $N \otimes_R R[x]$ 是 (d, n) -平坦右 $R[x]$ -模.
- (4) $N_{R[x]}$ 是 (d, n) -平坦右 $R[x]$ -模.

证明 (1) \implies (3). 设 M 是任意 (d, n) -余挠右 $R[x]$ -模. 由定理 5 知, M 也是 (d, n) -余挠右 R -模, 从而有

$$\text{Ext}_{R[x]}^1(N \otimes_R R[x], M) \cong \text{Ext}_R^1(N, \text{Hom}_{R[x]}(R[x], M)) \cong \text{Ext}_R^1(N, M) = 0,$$

所以 $N \otimes_R R[x]$ 是 (d, n) -平坦右 $R[x]$ -模.

(3) \implies (4). 因为 $N_{R[x]}$ 是 $N \otimes_R R[x]$ 的直和因子, 所以 $N_{R[x]}$ 是 (d, n) -平坦右 $R[x]$ -模.

(4) \implies (1). 设 M 是任意一个 (d, n) -余挠右 R -模. 由定理 5 知, $\text{Hom}_R(R[x], M)$ 是 (d, n) -余挠右 $R[x]$ -模, 从而

$$\text{Ext}_R^1(N, M) \cong \text{Ext}_R^1(N \otimes_{R[x]} R[x], M) \cong \text{Ext}_{R[x]}^1(N, \text{Hom}_R(R[x], M)) = 0,$$

故 N_R 是 (d, n) -平坦右 R -模.

(2) \iff (3). 显然. **】**

参考文献:

[1] ENOCHS E E. Flat cover and flat cotorsion modules [J]. Proc Amer Math Soc, 1984, 92: 179.
[2] XU J. Flat Covers of Modules [M]. Lecture Notes in Math 1634. Berlin: Springer, 2017.

(下转第 46 页)

- degenerate pair-ion plasmas [J]. *Physics of Plasmas*, 2011, **18**(11): 23.
- [7] NAGASAWA T, NISHADA Y. Nonlinear reflection and refraction of planar ion-acoustic plasma solitons [J]. *Physical Review Letters*, 1986, **56**(25): 2688.
- [8] YI S, BAI E W, LONNGREN K E. Ion acoustic soliton excitation using a modulated high-frequency sinusoidal wave [J]. *Physics of Plasmas*, 1997, **4**(7): 2436.
- [9] SHERIDAN T E. Model for ion oscillations at a negatively-biased grid[J]. *Physics Letters A*, 1997, **235**(3): 253.
- [10] ZHANG H, QI X, DUAN W S, et al. Envelope solitary waves exist and collide head-on without phase shift in a dusty plasma [J]. *Scientific Reports*, 2015, **5**: 14239
- [11] CHOI C R, RYU C M, RHA K C, et al. Ion-acoustic solitary waves in ion-beam plasma with Boltzmann electrons[J]. *Physics of Plasmas*, 2012, **19**(3): 11.
- [12] TSALLIS C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics[J]. *Journal of Statistical Physics*, 1988, **52**(1/2): 479.
- [13] TRIBECHÉ M, DJEBAMI L, AMOUR R. Nonextensive dust acoustic solitary and shock waves in nonplanar geometry [J]. *Astrophysics Space Science*, 2012, **338**(2): 259.
- [14] SILVA J R, PLASTINO A R, LIMA J A S. A Maxwellian path to the q -nonextensive velocity distribution function[J]. *Physics Letters A*, 2012, **249**(5/6): 401.
- [15] KANIADAKIS G, AVAGNO A, QUARATI P. Generalized statistics and solar neutrinos[J]. *Physics Letters B*, 1996, **369**(3/4): 308.
- [16] LAVAGNO A, KANIADAKIS G, REGO M M, et al. Nonextensive thermostatistical approach of the peculiar velocity function of galaxy clusters[J]. *Astrophysical Letters & Communications*, 1998, **35**(6): 449.

(责任编辑 孙对兄)

(上接第 25 页)

- [3] MAO Li-xin, DING Nan-qing. Notes on cotorsion modules[J]. *Comm Algebra*, 2005, **33**(1): 349.
- [4] MAO Li-xin, DING Nan-qing. Relative cotorsion modules and relative flat modules [J]. *Comm Algebra*, 2006, **34**(6): 2303.
- [5] 武斌, 杨晓燕. (d, n) -余挠模与 (d, n) -平坦模[J]. *西北师范大学学报(自然科学版)*, 2017, **53**(6): 22.
- [6] DING Nan-qing. On envelopes with the unique mapping property [J]. *Comm Algebra*, 1996, **24**(4): 1459.
- [7] ENOCHS E E, JENDA O M G. *Relative Homological Algebra* [M]. Berlin: de Gruyter, 2000.
- [8] TRILIFAJ J. Cover, envelopes, and cotorsion theories [R]. Lecture Notes for the Workshop. *Homological Methods in Module Theory*. Cortona: Charles University in Prague, 2000.
- [9] BICAN L, BASHIER E, ENOCHS E E. All modules have flat cover[J]. *Bull London Math Soc*, 2001, **33**(4): 385.
- [10] OSBORNE M S. *Basic Homological Algebra* [M]. New York: Springer, 2003.
- [11] ROTMAN J J. *An Introduction Homological Algebra* [M]. New York: Academic Press, 1979.
- [12] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

(责任编辑 马宇红)