西 北 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　第54卷 2018年第4期
22　Journal of Northwest Normal University (Natural Science)　Vol. 54　2018　No. 4

DOI：10.16783/j.cnki.nwnuz.2018.04.005

(d,n)-余挠模与(d,n)-平坦模的环刻画

武　斌[1]，杨晓燕[2]

（1. 兰州资源环境职业技术学院 基础学科部，甘肃 兰州　730020；
2. 西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州　730070）

摘要：设 R 是环，研究了(d,n)-余挠模和(d,n)-平坦模的应用，证明了每一个右 R-模是(d,n)-余挠模当且仅当每一个(d,n)-平坦右 R-模是(d,n)-余挠模；对偶地，证明了每一个右 R-模是(d,n)-平坦模当且仅当每一个循环右 R-模是(d,n)-平坦模．最后给出了这两类模在多项式环下的等价刻画．

关键词：(d,n)-余挠模；(d,n)-平坦模；多项式环；平坦维数；余挠覆盖

中图分类号：O 153.3　　文献标志码：A　　文章编号：1001-988X(2018)04-0022-04

Ring characterization of (d,n)-cotorsion modules and (d,n)-flat modules

WU Bin[1], YANG Xiao-yan[2]

(1. Department of Basic Courses, Lanzhou Resources Environment College, Lanzhou 730020, Gansu, China;
2. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: Let R be any rings, some applications of (d,n)-cotorsion modules and (d,n)-flat modules are investigated. It is proved that every right R-module is (d,n)-cotorsion if and only if every (d,n)-flat right R-module is (d,n)-cotorsion; dually, every right R-module is (d,n)-flat if and only if every cyclic right R-module is (d,n)-flat. The equivalent descriptions of these modules under polynomial rings are given.

Key words: (d,n)-cotorsion module; (d,n)-flat module; polynomial rings; flat dimension; cotorsion cover

0　引言

除非特别声明，文中所有环均指有单位元的结合环，模指酉模．称右 R-模 C 是余挠模[1]，如果对任意平坦右 R-模 F，$\mathrm{Ext}_R^1(F,C)=0$．我们知道，应用余挠模可以刻画右完全环：R 是右完全环当且仅当每一个（平坦）右 R-模是余挠模当且仅当每一个平坦右 R-模是投射模当且仅当每一个平坦右 R-模有余挠包络，且它有唯一映射性质（见文献[2]命题 3.3.1 和文献[3]命题 2.18）．Mao 等[4]定义了 n-余挠右 R-模和 n-平坦右 R-模．称右 R-模 M 是 n-余挠模，如果对任意平坦右 R-模 N 有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)=0$；称右 R-模 M 是 n-平坦模，如果对任意 n-余挠模右 R-模 N 有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$．文献[4]证明了：每一个右 R-模是 n-余挠模当且仅当每一个 n-平坦右 R-模是 n-余挠模当且仅当每一个(n-平坦)右 R-模有具有唯一映射性质的 n-余挠包络．Wu[5]将 n-余挠模和 n-平坦模进行推广，得到了(d,n)-余挠模和(d,n)-平坦模，并研究了这两类模的性质，证明了$(F_{d,n},C_{d,n})$是完全且遗传的余挠理论，其中 $F_{d,n}$ $(C_{d,n})$表示(d,n)-平坦右 R-模类（(d,n)-余挠右 R-模类）．

受以上文献的启发，文中应用(d,n)-余挠模和(d,n)-平坦模刻画这样的环 R，使得每一个右

收稿日期：2017-02-22；修改稿收到日期：2017-06-20
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11761060)；兰州资环学院自然科学基金资助项目(Z2016-32)
作者简介：武斌（1982—），女，甘肃白银人，讲师，硕士．主要研究方向为环的同调理论．
E-mail：wubin820116@163.com

R-模是(d,n)-余挠模．证明了：每一个右 R-模是(d,n)-余挠模当且仅当每一个(d,n)-平坦右 R-模是(d,n)-余挠模当且仅当每一个平坦维数小于等于 d 的右 R-模 M 属于 P_n（P_n 表示投射维数小于等于 n 的右 R-模类）当且仅当对任意 $m(0\leqslant m\leqslant n)$及任何$(d,n-m)$-平坦右 R-模 M，有 $M\in P_m$．对偶地，证明了每一个右 R-模是(d,n)-平坦模当且仅当每一个循环右 R-模是(d,n)-平坦模当且仅当每一个((d,n)-余挠)右 R-模有具有唯一映射性质的(d,n)-平坦覆盖．另外，给出了这两类模在多项式环下的等价刻画．

1　预备知识

设 M 是右 R-模，n 和 d 是固定的非负整数，F_d 表示平坦维数小于等于 d 的右 R-模类，P_n 表示投射维数小于等于 n 的右 R-模类．

定义 1[5]　称右 R-模 M 是(d,n)-余挠模，如果对任意 $N\in F_d$，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)=0$；称右 R-模 M 是(d,n)-平坦模，如果对任何(d,n)-余挠右 R-模 N，$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$．

命题 1[5]　对于任意环 R，以下结论成立：

（1）如果 M 是一个(d,n)-平坦模，则对任何整数 $j\geqslant 0,m\geqslant 0$ 及任意$(d,n+m)$-余挠模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^{j+m+1}(M,N)=0$．

（2）右 R-模 M 是(d,n)-余挠模当且仅当存在正合列 $0\to M\to E^0\to\cdots\to E^n\to 0$，其中每一个 E^i 是(d,n)-余挠右 R-模，$i=0,1,\cdots,n$．

（3）$C_{d,n}$ 关于单同态余核封闭，$F_{d,n}$ 关于满同态核封闭．

定理 1[5]　设 R 是环，n 和 d 是固定的非负整数，则$(F_{d,n},C_{d,n})$是完全遗传的余挠理论．

定义 2[6]　称 C-包络 ϕ：$M\to F$ 具有唯一映射性质，如果对任意同态 f：$M\to F'$，其中 $F'\in C$，且存在唯一的同态 g：$F\to F'$，使得 $g\phi=f$．

定理 2[7]　设 R 是环，则$(P_n,P_n^{\perp})$是完全遗传的余挠理论．

文中涉及的其他专业名词和术语均来自于文献[8-12]．

2　(d,n)-余挠模与(d,n)-平坦模的应用

以下 $\sigma_M:M\to C_{d,n}(M)$表示右 R-模 M 的(d,n)-余挠包络，η_M：$F_{d,n}(M)\to M$ 表示右 R-模 M 的(d,n)-平坦覆盖，$Pd(M)$表示模 M 的投射维数．

定理 3　设 R 是环，n,d 是固定的非负整数，则以下条件等价：

（1）每一个右 R-模是(d,n)-余挠模．

（2）每一个(d,n)-平坦右 R-模是(d,n)-余挠模．

（3）每一个(d,n)-平坦右 R-模是投射模．

（4）每一个平坦维数小于等于 d 的右 R-模属于 P_n．

（5）若右 R-模 M 属于 $P_n^{\perp}$，则 M 是$(d,0)$-余挠模．

（6）每一个(d,n)-平坦右 R-模有具有唯一映射性质的(d,n)-余挠包络．

（7）对任意的右 R-模 M 及任意的 $0\leqslant m\leqslant n$，若 $M\in F_{d,n-m}$，则 $M\in P_m$．

（8）对任意的右 R-模 M，若存在 $0\leqslant m\leqslant n$ 使得 $M\in F_{d,n-m}$，则 $M\in P_m$．

（9）对任意的右 R-模 M 及任意的 $0\leqslant m\leqslant n$，若 $M\in P_m^{\perp}$，则 $M\in F_{d,n-m}$．

（10）对任意的右 R-模 M，若存在 $0\leqslant m\leqslant n$ 使得 $M\in P_m^{\perp}$，则 $M\in F_{d,n-m}$．

如果 $n\geqslant 1$ 且$(d,n-1)$-余挠右 R-模类关于直和封闭，则以上条件等价于下列条件：

（11）每一个$(d,n-1)$-平坦右 R-模有单的$(d,n-1)$-余挠覆盖．

证明　（1）$\Longrightarrow$（6），（9）$\Longrightarrow$（10）显然．

（1）$\Longrightarrow$（3）．由定理 1 得到．

（4）$\Longleftrightarrow$（5），（7）$\Longleftrightarrow$（9），（8）$\Longleftrightarrow$（10）由定理 1 及$(P_n,P_n^{\perp})$是完全遗传的余挠理论得到．

（6）$\Longrightarrow$（2）．设 M 是(d,n)-平坦右 R-模，则有以下交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\sigma_M"] & C_{d,n}(M) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\sigma_{L\gamma}"'] & L \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_L"] & 0 \\
 & & & C_{d,n}(L) &
\end{tikzcd}$$

由 Wakawatsu 引理[2]知，L 是(d,n)-平坦模，而 $\sigma_L\gamma\sigma_M=0=0\sigma_M$，于是由（6）知 $\sigma_L\gamma=0$．故 $L=\mathrm{Im}(\gamma)\subseteq\mathrm{Ker}(\sigma_L)=0$，所以 $M\in C_{d,n}$．

（2）$\Longrightarrow$（1）．设 M 是右 R-模，由定理 1 知，存在正合列 $0\to K\to N\to M\to 0$，其中 K 是(d,n)-余挠模，N 是(d,n)-平坦模．又由（2）知 N 是(d,n)-余挠模．故由命题 1（3）知，M 是

(d,n)-余挠模.

(1)$\Longrightarrow$(7). 令 M 是 $(d,n-m)$-平坦右 R-模, N 是任何右 R-模. 因为 N 是 (d,n)-余挠模, 由命题1(1)得 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,N)=0$. 故 $Pd(M)\leqslant m$.

(8)$\Longrightarrow$(4). 设 $M\in F_d$, $0\leqslant m\leqslant n$, K_{n-m} 是 M 的第 $n-m$ 个合冲, 则对任意 $(d,n-m)$-余挠右 R-模 N, 有 $\mathrm{Ext}_R^1(K_{n-m},N)\cong\mathrm{Ext}_R^{n-m+1}(M,N)=0$, 故 K_{n-m} 是 $(d,n-m)$-平坦模. 又由(8)可知 $Pd(K_{n-m})\leqslant m$, 所以 $Pd(M)\leqslant n$.

(4)$\Longrightarrow$(1). 设 M 是任意右 R-模, 对任意 $F\in F_d$, 由(4)知 $F\in P_n$, 从而 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)=0$. 所以 M 是 (d,n)-余挠模.

(1)$\Longrightarrow$(11). 设 M 是任意右 R-模, 记 $M=\Sigma\{N\leqslant M: N$ 是 $(d,n-1)$-余挠模$\}$, $G=\bigoplus\{N\leqslant M: N$ 是 $(d,n-1)$-余挠模$\}$, 则存在正合列 $0\to K\to G\to F\to 0$. 由(1)知, K 是 (d,n)-余挠模, 而由假设知, G 是 $(d,n-1)$-余挠模, 故 F 是 $(d,n-1)$-余挠模. 下证包含映射 $i: F\to M$ 是 M 的 $(d,n-1)$-余挠覆盖. 令 F' 是 $(d,n-1)$-余挠模, Ψ: $F'\to M$ 是任意 R 同态, 由上面的证明知 $\Psi(F')\leqslant F$. 定义 $\varepsilon: F'\to F$ 为 $\varepsilon(x)=\Psi(x)$, 则对任何 $x\in F'$, 有 $i\varepsilon=\Psi$, 故 $i: F\to M$ 是 M 的 $(d,n-1)$-余挠予覆盖. 另外, 单位映射 1_F 是使得 $ig=g$, $g: F\to F$ 的唯一映射. 故(11)得证.

(11)$\Longrightarrow$(2). 设 M 是 (d,n)-平坦右 R-模, 下证 M 是 (d,n)-余挠模. 由定理1知, 存在正合列 $0\to M\to E\to L\to 0$, 其中 E 是 $(d,n-1)$-余挠模, L 是 $(d,n-1)$-平坦模. 因为 L 有单的 $(d,n-1)$-余挠覆盖 $\phi: F\to L$, 故有同态 $\alpha: E\to F$, 使得有以下交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & F \arrow[d, "\Phi"] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[ur, "\alpha"] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 ϕ 是满同态, 故 ϕ 是同构, 从而 L 是 $(d,n-1)$-余挠模. 所以 M 是 (d,n)-余挠模. 】

推论1[4]　设 R 是环, 则以下结论等价:

(1) 每一个右 R-模是1-余挠模.

(2) 每一个平坦右 R-模是1-余挠模.

(3) 每一个1-平坦右 R-模是投射模.

(4) 对任何平坦右 R-摸 M 都有 $Pd(M)\leqslant 1$.

(5) $P_1^{\perp}$ 中的每一个右 R-摸 M 是余挠模.

命题2　对于任意环 R, 以下结论等价:

(1) 每一个右 R-模是 $(d,2)$-余挠模, 且每一个 $(d,0)$-平坦右 R-模有 $(d,0)$-余挠覆盖.

(2) 每一个 $(d,0)$-平坦右 R-模有具有唯一映射性质的 $(d,0)$-余挠覆盖.

证明　(1)$\Longrightarrow$(2). 设 M 是任意 $(d,0)$-平坦右 R-模, 则由(1)知, M 有 $(d,0)$-余挠覆盖 f: $F\to M$. 只需证对任意 $(d,0)$-余挠右 R-模 G 及任意同态 $g: G\to F$, 若 $fg=0$, 则有 $g=0$. 事实上, 因为 $\mathrm{Im}(g)\subseteq\mathrm{Ker}(f)$, 所以有 $\beta: F/\mathrm{Im}(g)\to M$, 使得 $\beta\pi=f$, 其中 $\pi: F\to F/\mathrm{Im}(g)$ 是自然映射. 因为 $\mathrm{Ker}(g)$ 是 $(d,2)$-余挠模, 则由命题1(2)知, $F/\mathrm{Im}(g)$ 是 $(d,0)$-余挠模. 故存在 $\alpha: F/\mathrm{Im}(g)\to F$, 使得 $\beta=f\alpha$, 于是有以下交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & & M & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, "g"] \arrow[ur, "0"] & F \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, "f"] & F/\mathrm{Im}(g) \arrow[r] \arrow[ul, "\beta"'] & 0
\end{tikzcd}$$

所以有 $f\alpha\pi=f$. 因为 f 是覆盖, 故 $\alpha\pi$ 是同构, 于是 π 是单同态. 所以 $g=0$.

(2)$\Longrightarrow$(1). 设 M 是任意右 R-模, 则有正合列 $0\to M\xrightarrow{\sigma_M}C_{d,0}(M)\xrightarrow{\tau}C\xrightarrow{\Psi}N\to 0$, 其中 $C=C_{d,0}(C_{d,0}(M)/M)$, N 是 $(d,0)$-平坦模. 设 ϕ: $H\to N$ 是具有唯一映射性质的 $(d,0)$-余挠覆盖, 则存在 δ: $C\to H$, 使得 $\Psi=\phi\delta$. 故 $\phi\delta\tau=\Psi\tau=0=\phi 0$, 所以 $\delta\tau=0$, 于是有 $\mathrm{Ker}(\Psi)=\mathrm{Im}(\tau)\subseteq\mathrm{Ker}(\delta)$, 故存在 γ: $N\to H$, 使得 $\gamma\Psi=\delta$, 于是有以下交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & H \arrow[d, shift left, "\Phi"] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\sigma_M"] & C_{d,0}(M) \arrow[r, "\tau"] & C \arrow[r, "\psi"] \arrow[ur, "\delta"] & N \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\gamma"] & 0
\end{tikzcd}$$

从而 $\phi\gamma\Psi=\Psi$. 因为 Ψ 是满同态, 故 $\phi\gamma=1_N$. 所以 N 同构于 H 的直和因子, 从而 N 是 $(d,0)$-余挠模. 由命题1(2)知 M 是 $(d,2)$-余挠模. 】

定理4　设 R 是任意环, d, n 是固定的非负整数, 则以下条件等价:

(1) 每一个右 R-模是 (d,n)-平坦模.

(2) 每一个有限生成右 R-模是 (d,n)-平坦模.

(3) 每一个循环右 R-模是 (d,n)-平坦模.

(4) 每一个 (d,n)-余挠右 R-模是 (d,n)-平坦模.

(5) 每一个 (d,n)-余挠右 R-模是内射的.

（6）对任何(d,n)-余挠右R-模M,N，有$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$.

（7）对任何(d,n)-余挠右R-模M,N，任意$i\geqslant 1$，有$\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$.

（8）每一个((d,n)-余挠)右R-模有具有唯一映射性质的(d,n)-平坦覆盖.

证明　（1）$\Longrightarrow$（2）$\Longrightarrow$（3），（1）$\Longrightarrow$（8）及（1）$\Longrightarrow$（4）$\Longleftrightarrow$（6）$\Longleftrightarrow$（7）显然.

（1）$\Longleftrightarrow$（5）. 由定理1直接得到.

（8）$\Longrightarrow$（4）. 设M是任意(d,n)-余挠右R-模，则有以下正合交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & F_{d,n}(K) \arrow[d, "\eta_K"'] \arrow[dr, "\alpha\eta_K"] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & F_{d,n}(M) \arrow[r, "\eta_M"] & M \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

其中$K\in C_{d,n}$，$\eta_M\alpha\eta_K=0=\eta_M 0$，故由（8）得$\alpha\eta_K=0$，则$K=\mathrm{Im}(\eta_K)\subseteq\mathrm{Ker}(\alpha)=0$. 所以$M$是$(d,n)$-平坦模.

（4）$\Longrightarrow$（1）. 对任意右R-模M，由定理1知，存在正合列$0\to M\to N\to L\to 0$，其中N是(d,n)-余挠模，L是(d,n)-平坦模，则由（4）知，N是(d,n)-平坦模. 故由命题1（3）可得M是(d,n)-平坦模.

（3）$\Longrightarrow$（5）. 设M是任意(d,n)-余挠右R-模，I是R的任一右理想，则由（3）得$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$. 故$M$是内射模. 】

3　(d,n)-余挠模和(d,n)-平坦模与多项式环

设R是环，$R[x]$是多项式环.

定理5　设R是交换环，则对任何右$R[x]$-模M，以下结论等价：

（1）M_R是(d,n)-余挠右R-模.

（2）$\mathrm{Hom}_R(R[x],M)$是(d,n)-余挠右R-模.

（3）$\mathrm{Hom}_R(R[x],M)$是(d,n)-余挠右$R[x]$-模.

（4）$M_{R[x]}$是(d,n)-余挠右$R[x]$-模.

证明　（1）$\Longrightarrow$（3）. 设F是任意一个平坦维数小于等于d的右$R[x]$-模，则F也是平坦维数小于等于d的右R-模，从而有

$$\mathrm{Ext}_{R[x]}^{n+1}(F,\mathrm{Hom}_R(R[x],M))\cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(F\otimes_{R[x]}R[x],M)\cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)=0.$$

故$\mathrm{Hom}_R(R[x],M)$是(d,n)-余挠右$R[x]$-模.

（3）$\Longrightarrow$（4）. 因为$M_{R[x]}$是$\mathrm{Hom}_R(R[x],M)$的直和因子，所以$M_{R[x]}$是(d,n)-余挠右$R[x]$-模.

（4）$\Longrightarrow$（1）. 设F是任意一个平坦维数小于等于d的右R-模，则$F\otimes_R R[x]$是一个平坦维数小于或等于d的右$R[x]$-模，从而有

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)\cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,\mathrm{Hom}_{R[x]}(R[x],M))\cong \mathrm{Ext}_{R[x]}^{n+1}(F\otimes_R R[x],M)=0.$$

故M是(d,n)-余挠右R-模.

由上面的证明容易得到（2）$\Longleftrightarrow$（3）. 】

定理6　设R是交换环，则对任何右$R[x]$-模N，以下条件等价：

（1）N_R是(d,n)-平坦右R-模.

（2）$N\otimes_R R[x]$是(d,n)-平坦右R-模.

（3）$N\otimes_R R[x]$是(d,n)-平坦右$R[x]$-模.

（4）$N_{R[x]}$是(d,n)-平坦右$R[x]$-模.

证明　（1）$\Longrightarrow$（3）. 设M是任意(d,n)-余挠右$R[x]$-模. 由定理5知，M也是(d,n)-余挠右R-模，从而有

$$\mathrm{Ext}_{R[x]}^1(N\otimes_R R[x],M)\cong \mathrm{Ext}_R^1(N,\mathrm{Hom}_{R[x]}(R[x],M))\cong \mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0,$$

所以$N\otimes_R R[x]$是(d,n)-平坦右$R[x]$-模.

（3）$\Longrightarrow$（4）. 因为$N_{R[x]}$是$N\otimes_R R[x]$的直和因子，所以$N_{R[x]}$是(d,n)-平坦右$R[x]$-模.

（4）$\Longrightarrow$（1）. 设M是任意一个(d,n)-余挠右R-模. 由定理5知，$\mathrm{Hom}_R(R[x],M)$是(d,n)-余挠右$R[x]$-模，从而

$$\mathrm{Ext}_R^1(N,M)\cong \mathrm{Ext}_R^1(N\otimes_{R[x]}R[x],M)\cong \mathrm{Ext}_{R[x]}^1(N,\mathrm{Hom}_R(R[x],M))=0,$$

故N_R是(d,n)-平坦右R-模.

（2）$\Longleftrightarrow$（3）. 显然. 】

参考文献：

[1] ENOCHS E E. Flat cover and flat cotorsion modules[J]. *Proc Amer Math Soc*, 1984, **92**: 179.

[2] XU J. *Flat Covers of Modules*[M]. Lecture Notes in Math 1634. Berlin: Springer, 2017.

（下转第46页）

degenerate pair-ion plasmas [J]. *Physics of Plasmas*, 2011, **18**(11): 23.
[7] NAGASAWA T, NISHADA Y. Nonlinear reflection and refraction of planar ion-acoustic plasma solitons [J]. *Physical Review Letters*, 1986, **56**(25): 2688.
[8] YI S, BAI E W, LONNGREN K E. Ion acoustic soliton excitation using a modulated high-frequency sinusoidal wave [J]. *Physics of Plasmas*, 1997, **4**(7): 2436.
[9] SHERIDAN T E. Model for ion oscillations at a negatively-biased grid[J]. *Physics Letters* A, 1997, **235**(3): 253.
[10] ZHANG H, QI X, DUAN W S, et al. Enveloe solitary waves exist and colide head-on without phase shift in a dusty plasma [J]. *Scientific Reports*, 2015, **5**: 14239
[11] CHOI C R, RYU C M, RHA K C, et al. Ion-acoustic solitary waves in ion-beam plasma with Boltzmann electrons[J]. *Physics of Plasmas*, 2012, **19**(3): 11.
[12] TSALLIS C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics[J]. *Journal of Statistical Physics*, 1988, **52**(1/2): 479.
[13] TRIBECHE M, DJEBAMI L, AMOUR R. Nonextensive dust acoustic solitary and shock waves in nonplanar geometry [J]. *Astrophysics Space Science*, 2012, **338**(2): 259.
[14] SILVA J R, PLASTINO A R, LIMA J A S. A Maxwellian path to the q-nonextensive velocity distribution function[J]. *Physics Letters* A, 2012, **249**(5/6): 401.
[15] KANIADAKIS G, AVAGNO A, QUARATI P. Generalized statistics and solar neutrinos[J]. *Physics Letters* B, 1996, **369**(3/4): 308.
[16] LAVAGNO A, KANIADAKIS G, REGO M M, et al. Nonextensive thermosstatistical approach of the peculiar velocity function of galaxy clusters[J]. *Astrophysical Letters & Communications*, 1998, **35**(6): 449.

(责任编辑 孙对兄)

(上接第25页)

[3] MAO Li-xin, DING Nan-qing. Notes on cotorsion modules[J]. *Comm Algebra*, 2005, **33**(1): 349.
[4] MAO Li-xin, DING Nan-qing. Relative cotorsion modules and relative flat modules [J]. *Comm Algebra*, 2006, **34**(6): 2303.
[5] 武斌,杨晓燕. (d,n)-余挠模与(d,n)-平坦模[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2017, **53**(6): 22.
[6] DING Nan-qing. On envelopes with the unique mapping property [J]. *Comm Algebra*, 1996, **24**(4): 1459.
[7] ENOCHS E E, JENDA O M G. *Relative Homological Algebra* [M]. Berlin: de Grugter, 2000.
[8] TRLIFAJ J. Cover, envelopes, and cotorsion theories [R]. Lecture Notes for the Workshop. *Homological Methods in Module Theory*. Cortona: Charles University in Prague, 2000.
[9] BICAN L, BASHIER E, ENOCHS E E. All modules have flat cover[J]. *Bull London Math Soc*, 2001, **33**(4): 385.
[10] OSBORNE M S. *Basic Homological Algebra* [M]. New York: Springer, 2003.
[11] ROTMAN J J. *An Introduction Homological Algebra* [M]. New York: Academic Press, 1979.
[12] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

(责任编辑 马宇红)