西 北 师 范 大 学 学 报（自然科学版） 第 53 卷 2017 年第 6 期
22 Journal of Northwest Normal University (Natural Science) Vol. 53 2017 No. 6

DOI：10.16783/j.cnki.nwnuz.2017.06.005

(d,n)-余挠模与(d,n)-平坦模

武 斌[1]，杨晓燕[2]

（1. 兰州资源环境职业技术学院 基础学科部，甘肃 兰州 730070；
2. 西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘要：设 R 是环，定义了(d,n)-余挠模与(d,n)-平坦模，并研究了这两类模的性质．证明了$(\mathrm{F}_{d,n},\mathrm{C}_{d,n})$是完全且遗传的余挠理论，其中 $\mathrm{F}_{d,n}(\mathrm{C}_{d,n})$表示$(d,n)$-平坦右$R$-模类($(d,n)$-余挠右-模类)．给出了这两类模在环的优越扩张下的等价刻画．

关键词：(d,n)-余挠模；(d,n)-平坦模；余挠理论；优越扩张

中图分类号：O 153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1001-988X(2017)06-0022-05

(d,n)-cotorsion modules and (d,n)-flat modules

WU Bin[1]，YANG Xiao-yan[2]

(1. Department of Basic Courses，Lanzhou Resources and Environment Vocational Technology College，
Lanzhou 730070，Gansu，China；
2. College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，Gansu，China)

Abstract：Let R be any rings，(d,n)-cotorsion modules and (d,n)-flat modules are defined，and their properties are investigated. It is proved that $(\mathrm{F}_{d,n},\mathrm{C}_{d,n})$ is complete hereditary cotorsion theory，where $\mathrm{F}_{d,n}(\mathrm{C}_{d,n})$ denotes the class of all (d,n)-flat((d,n)-cotorsion) right R-modules. The equivalent descriptions of these modules under excellent extensions of rings are given.

Key words：(d,n)-cotorsion module；(d,n)-flat module；cotorsion theory；excellent extension

0 引言

文中所有的环均指有单位元的结合环，模指酉模．设 R 是环，L 是右 R-模类，M 是右 R-模，称同态 $\phi:M\to F$ 是 M 的 L-予包络，其中 $F\in\mathrm{L}$，如果对任何同态 $f:M\to F'$，其中 $F'\in\mathrm{L}$，存在同态 $g:F\to F'$，使得 $g\phi=f$[1]．更进一步，当 $F=F'$，$f=\phi$ 时，g 是 M 的自同构，则称 L-予包络 ϕ 为 M 的 L-包络．对偶地，可以定义 L-予覆盖和 L-覆盖[1]．模的覆盖和包络的概念在环模理论、同调代数和交换代数领域有着极其重要的作用．一般地，描述一个环或代数 R 上的所有模几乎是不可能的，因此，不得不把注意力集中在一些特殊的模类上．一旦理解了模类 L 的结构，就可以设法由 L 中的模去逼近任意模类．通过研究特殊的模类 L 的性质，进而去研究整个模范畴，而联系模类 L 和其他模类的桥梁是具有某种泛性质的模同态，即模的予覆盖和予包络．

20 世纪 70 年代后期，人们注意到这两个概念与一个被称为是完全余挠理论的同调概念有着紧密的联系．称一对右 R-模类(F,C)是余挠理论，如果 $\mathrm{F}^{\perp}=\mathrm{C}$，${}^{\perp}\mathrm{C}=\mathrm{F}$[1]．称余挠理论(F,C)是完全的，如果每一个右 R-模有特殊的 C-予包络，每一个右 R-模有特殊的 F-予覆盖[2]．称余挠理论(F,C)是

收稿日期：2017-04-06；**修改稿收到日期**：2017-08-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11761060)；兰州资环学院自然科学基金资助项目(Z2015-11)
作者简介：武斌（1982—），女，甘肃白银人，讲师，硕士．主要研究方向为环的同调理论．
E-mail：wubin820116@163.com

遗传的，如果 $0\to L'\to L\to L''\to 0$ 是正合的，且 L，$L''\in$ F，则 $L'\in$ F[3]．完全余挠理论被广泛关注和研究[4-7]．

称右 R-模 C 是余挠模，如果对任意平坦右 R-模 F，$\mathrm{Ext}_R^1(F,C)=0$[8]．Enochs 等[1]证明了任何环上的平坦右 R-模类与余挠右 R-模类可构成完全余挠理论，于是证明了著名的平坦覆盖存在的猜想：在任何环上的每一个模有平坦覆盖[9]．Mao 等[10]定义了 n-余挠右 R-模和 n-平坦右 R-模．称右 R-模 M 是 n-余挠模，如果对任意平坦右 R-模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)=0$；称右 R-模 M 是 n-平坦模，如果对任意余挠右 R-模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$．同时，Mao 等[10]证明了 n-余挠右 R-模类和 n-平坦右 R-模类可以构成完全且遗传的余挠理论．

受以上文献的启发，本文定义两种新的模类．设 n,d 是固定的非负整数，令 F_d 表示平坦维数小于等于 d 的右 R-模类，称右 R-模 M 是 (d,n)-余挠模，如果对任何 $N\in\mathrm{F}_d$，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)=0$；称右 R-模 M 是 (d,n)-平坦模，如果对任何 (d,n)-余挠模 N，$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$．文中研究了这两类模的性质，证明了 $(\mathrm{F}_{d,n},\mathrm{C}_{d,n})$ 是完全且遗传的余挠理论，其中 $\mathrm{F}_{d,n}(\mathrm{C}_{d,n})$ 表示 (d,n)-平坦右 R-模类（(d,n)-余挠右 R-模类）．这样就把平坦余挠理推广到更多情形．另外，还给出了这两类模在环的优越扩张下的等价刻画．

如果 $\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$ 是 M 的投射分解，令 $K_0=M$，$K_1=\mathrm{Ker}(P_0\to M)$，$K_i=\mathrm{Ker}(P_{i-1}\to P_{i-2})$，$i\geqslant 2$，称该投射分解的第 n 个核 K_n 为 M 的第 n 个合冲．对偶地，可定义 M 的第 n 个上合冲 L^n，$n\geqslant 1$．文中所涉及到的其他专业名词和术语均来自于文献[1,11-12]．

1　(d,n)-余挠模与 (d,n)-平坦模的概念及性质

设 M 是右 R-模，n 和 d 是固定的非负整数，F_d 表示平坦维数小于等于 d 的右 R-模类．

定义 1　称右 R-模 M 是 (d,n)-余挠模，如果对任何 $N\in\mathrm{F}_d$，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)=0$．

定义 2　称右 R-模 M 是 (d,n)-平坦模，如果对任何 (d,n)-余挠右 R-模 N，$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$．

注 1：显然，若 $m\leqslant d$，则 (d,n)-余挠模是 (m,n)-余挠模；M 是 $(0,0)$-余挠模当且仅当 M 是余挠模；M 是 $(0,n)$-余挠模当且仅当 M 是 n-余挠模．M 是 $(0,0)$-平坦模当且仅当 M 是平坦模；(m,n)-平坦模是 (d,n)-平坦模；M 是 $(0,n)$-平坦模当且仅当 M 是 n-平坦模．

命题 1　设 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是短正合列，

（1）若 A 是 (d,n)-余挠模，B 是 $(d+1,n)$-余挠模，则 C 是 $(d+1,n)$-余挠模；

（2）若 B 是 (d,n)-平坦模，C 是 $(d+1,n)$-平坦模，则 A 是 (d,n)-平坦模．

证明　（1）设 $N\in\mathrm{F}_{d+1}$，则有正合列 $0\to K\to P\to N\to 0$，其中 P 为投射右 R-模，则 $K\in\mathrm{F}_d$．由长正合列 $0=\mathrm{Ext}_R^{n+1}(K,A)\to\mathrm{Ext}_R^{n+2}(N,A)\to\mathrm{Ext}_R^{n+2}(P,A)=0$，得 $\mathrm{Ext}_R^{n+2}(N,A)=0$．另外，由长正合列 $0=\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,B)\to\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,C)\to\mathrm{Ext}_R^{n+2}(N,A)=0$，得 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,C)=0$．故 C 是 $(d+1,n)$-余挠模．

（2）设 N 是 (d,n)-余挠模，则有长正合列 $0=\mathrm{Ext}_R^1(B,N)\to\mathrm{Ext}_R^1(A,N)\to\mathrm{Ext}_R^2(C,N)$，对于短正合列 $0\to N\to E\to E/N\to 0$，其中 E 是内射模，由（1）知，E/N 是 $(d+1,n)$-余挠模．由于 C 是 $(d+1,n)$-平坦模，故 $\mathrm{Ext}_R^2(C,N)\cong\mathrm{Ext}_R^1(C,E/N)=0$，则 $\mathrm{Ext}_R^1(A,N)=0$．所以 A 是 (d,n)-平坦模．　】

命题 2　对于任意环 R，以下结论成立：

（1）对于任意非负整数 $m\leqslant n$，(d,m)-余挠模是 (d,n)-余挠模，(d,n)-平坦模是 (d,m)-平坦模；

（2）任意 $(d,n+m)$-余挠模的第 m 个上合冲是 (d,n)-余挠模；

（3）如果 M 是一个 (d,n)-平坦模，则对任何整数 $j\geqslant 0$，$m\geqslant 0$ 及任何 $(d,n+m)$-余挠模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^{j+m+1}(M,N)=0$；

（4）任意 (d,n)-平坦模的第 m 个合冲是 $(d,n+m)$-平坦模；

（5）右 R-模 M 是 (d,n)-余挠模当且仅当存在正合列 $0\to M\to E^0\to\cdots\to E^n\to 0$，其中每一个 E^i 是 $(d,0)$-余挠右 R-模，$i=0,1,\cdots,n$；

（6）$\mathrm{C}_{d,n}$ 关于单同态的余核封闭，$\mathrm{F}_{d,n}$ 关于满同态的核封闭，其中 $\mathrm{C}_{d,n}(\mathrm{F}_{d,n})$ 表示 (d,n)-余挠右 R-模类（(d,n)-平坦右 R-模类）．

证明　（1）设 M 是一个 (d,m)-余挠右 R-模，$N\in\mathrm{F}_d$，则对任何 $m\leqslant n$，N 的第 $(n-m)$ 个合冲 $K_{n-m}\in\mathrm{F}_d$，故 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)\cong\mathrm{Ext}_R^{m+1}(K_{n-m},M)=0$，从而 M 是 (d,n)-余挠模．另外，由定义可知，每一个 (d,n)-平坦右 R-模是 (d,m)-平坦右 R-

模.

（2）设 M 是一个$(d,n+m)$-余挠右 R-模，L^m 是 M 的第 m 个上合冲，则对任何 $N\in \mathrm{F}_d$，有 $0=\mathrm{Ext}_R^{m+n+1}(N,M)\cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,L^m)$，从而 L^m 是(d,n)-余挠模.

（3）对任意$(d,n+m)$-余挠右 R-模 N，由（2）知，N 的第 m 个上合冲 L^m 是(d,n)-余挠右 R-模，故 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,N)\cong \mathrm{Ext}_R^1(M,L^m)=0$. 对于正合列 $0\to N\to E\to L^1\to 0$，其中 E 是内射模，由（1）知，N 是$(d,n+m+1)$-余挠模，又由（2）知，L^1 是$(d,n+m)$-余挠模. 故 $\mathrm{Ext}_R^{m+2}(M,N)\cong \mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,L^1)=0$. 所以通过数学归纳可以得证.

（4）设 M 是任意(d,n)-平坦右 R-模，K_m 是 M 的第 m 个合冲. 由（3）知，对任何$(d,n+m)$-余挠右 R-模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(K_m,N)\cong \mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,N)=0$，所以 K_m 是$(d,n+m)$-平坦模.

（5）由（2）知，(d,n)-余挠右 R-模的第 n 个上合冲是$(d,0)$-余挠右 R-模，必要性得证. 对任何 $N\in \mathrm{F}_d$，有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)\cong \mathrm{Ext}_R^1(N,E^n)=0$，充分性得证.

（6）考虑短正合 $0\to A\to B\to C\to 0$，其中 A,B 是(d,n)-余挠右 R-模. 对任何 $N\in \mathrm{F}_d$，$0=\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,B)\to \mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,C)\to \mathrm{Ext}_R^{n+2}(N,A)=0$，从而 C 是(d,n)-余挠右 R-模，故 $\mathrm{C}_{d,n}$ 关于单同态的余核封闭. 考虑短正合 $0\to A\to B\to C\to 0$，其中 B,C 是(d,n)-平坦右 R-模. 对任何 $M\in \mathrm{C}_{d,n}$，有 $0=\mathrm{Ext}_R^1(B,M)\to \mathrm{Ext}_R^1(A,M)\to \mathrm{Ext}_R^2(C,M)=0$，从而 C 是(d,n)-平坦右 R-模，故 $\mathrm{F}_{d,n}$ 关于满同态的核封闭. 】

命题3 设 d,n 是固定的非负整数，环 R 使得每一个投射右 R-模是(d,n)-余挠模，则对于右 R-模 M，以下结论等价：

（1）M 是(d,n)-平坦模；

（2）若 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是正合序列，且 $A\in \mathrm{C}_{d,n}$，则 M 关于此正合序列是投射的；

（3）对于每一个正合列 $0\to K\to F\to M\to 0$，若 $F\in \mathrm{C}_{d,n}$，则 $K\to F$ 是 K 的 $\mathrm{C}_{d,n}$ 予包络；

（4）M 是 $\mathrm{C}_{d,n}$ 予包络 $K\to F$ 的余核，其中 F 是投射模；

（5）对任何投射分解 $\mathrm{P}=:\cdots P_1\to P_0\to M\to 0$ 及任何右 R-模 $N\in \mathrm{C}_{d,n}$，$\mathrm{Hom}(\mathrm{P},N)$ 是正合的.

证明 （1）$\Longrightarrow$（2），（1）$\Longrightarrow$（3）显然.

（2）$\Longrightarrow$（1）. 对任何 $N\in \mathrm{C}_{d,n}$ 及正合列 $0\to N\to E\to L\to 0$，其中 E 是内射模，有长正合序列 $\mathrm{Hom}(M,E)\to \mathrm{Hom}(M,L)\to \mathrm{Ext}_R^1(M,N)\to \mathrm{Ext}_R^1(M,E)=0$. 由（2）知，有正合列 $\mathrm{Hom}(M,E)\to \mathrm{Hom}(M,L)\to 0$，故 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$，从而 M 是(d,n)-平坦模.

（3）$\Longrightarrow$（4）. 设 $0\to K\to P\to M\to 0$ 是正合列，其中 P 是投射模. 由已知条件知 $P\in \mathrm{C}_{d,n}$，故由（3）知，$K\to P$ 是 $\mathrm{C}_{d,n}$ 予包络.

（4）$\Longrightarrow$（1）. 由（4）知，存在正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$，其中 P 是投射模，$K\to P$ 是 $\mathrm{C}_{d,n}$ 予包络. 对任何 $N\in \mathrm{C}_{d,n}$，有长正合列

$$\mathrm{Hom}(P,N)\to \mathrm{Hom}(K,N)\to \mathrm{Ext}_R^1(M,N)\to \mathrm{Ext}_R^1(P,N)=0.$$

而由（4）知，有正合列 $\mathrm{Hom}(P,N)\to \mathrm{Hom}(K,N)\to 0$. 故 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$.

（1）$\Longrightarrow$（5）. 设 $N\in \mathrm{C}_{d,n}$，$\mathrm{P}=:\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$ 是 M 的投射分解. 因为 M 是(d,n)-平坦模，故由命题2（3）知，$\mathrm{Ext}_R^j(M,N)=0,j\geqslant 1$. 故 $\mathrm{Hom}(\mathrm{P},N)$ 是正合的.

（5）$\Longrightarrow$（1）. 设 $\mathrm{P}=:\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$ 是 M 的投射分解，由（5）知，对任何 $N\in \mathrm{C}_{d,n}$，序列 $\mathrm{Hom}(P_0,N)\to \mathrm{Hom}(P_1,N)\to \mathrm{Hom}(P_2,N)$ 是正合的. 故 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$. 】

设$(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$（$\lambda$ 是序数）是右 R-模 M 子模组，称$(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 是子模的连续链，如果当 $\alpha\leqslant\beta<\lambda$ 时，有 $M_\alpha\leqslant M_\beta$；当 $\beta<\lambda$ 是极限数时，有 $M_\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}M_\gamma$[1].

引理1[10] 设 M,N 是右 R-模，n 是正整数，M 是子模的连续链$(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 的并. 如果 $\mathrm{Ext}_R^n(M_0,N)=0$ 且对任意 $\alpha+1<\lambda$，$\mathrm{Ext}_R^n(M_{\alpha+1}/M_\alpha,N)=0$，则 $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)=0$.

定理1 设 R 是环，n,d 是固定的非负整数，则$(\mathrm{F}_{d,n},\mathrm{C}_{d,n})$ 是完全遗传的余挠理论.

证明 设 $F\in \mathrm{F}_d$，由文献[1]引理5.3.12知，若 $\mathrm{Card}\,R\leqslant\aleph_\beta$，则对每一个 $x\in F$，存在 F 的纯子模 S，使得 $x\in S$ 且 $\mathrm{Card}\,S\leqslant\aleph_\beta$. 故可以将 F 写成它的纯子模连续链$(F_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 的并，使得 $\mathrm{Card}F_0\leqslant\aleph_\beta,\mathrm{Card}F_{\alpha+1}/F_\alpha\leqslant\aleph_\beta$，其中 $\alpha+1<\lambda$. 由引理1，如果 N 是右 R-模，使得 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F_0,N)=0$ 及 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F_{\alpha+1}/F_\alpha,N)=0$，其中 $\alpha+1<\lambda$，则 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,N)=0$. 记 F_I 为 F 的第 n 个合冲，则 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,N)=0$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^1(F_I,N)=0$. 令 X 为所有右 R-模 G 的第 n 个合冲的表示集，其中 $G\in \mathrm{F}_d$，

且 $\mathrm{Card}G\leqslant\aleph_\beta$，则 $\mathrm{C}_{d,n}=X^{\perp}$，所以由文献[1]定理 7.4.1 知，$(\mathrm{F}_{d,n},\mathrm{C}_{d,n})$是完全的余挠理论.

另外，若 $0\to A\to B\to C\to 0$ 正合，且 $A,B\in\mathrm{C}_{d,n}$，则由命题 2(6)知 $C\in\mathrm{C}_{d,n}$. 故由文献[3]命题 1.2 知，$(\mathrm{F}_{d,n},\mathrm{C}_{d,n})$是遗传的余挠理论. 】

注 2：由定理 1 和文献[1]定理 7.2.6 知，如果 $\mathrm{F}_{d,n}$ 关于正向极限封闭，则每一个右 R-模有 (d,n)-平坦覆盖和 (d,n)-余挠包络.

2 环的扩张

设 R 和 S 是环，且 $R\subseteq S$，它们有相同的单位元.

(1) 称环 $S\geqslant R$ 为有限正规扩张，如果存在有限集合$\{s_1,\cdots,s_n\}\subseteq S$，使得

$$S=\sum_{i=1}^{n}s_iR,\ s_iR=Rs_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

(2) 称有限正规扩张 $S\geqslant R$ 为几乎优越扩张，如果${}_RS$ 是平坦模，S_R 是投射模，且环 S 是右 R-投射的.

(3) 称几乎优越扩张 $S\geqslant R$ 为优越扩张，如果${}_RS$ 和 S_R 是自由模，且都以$\{s_1,\cdots,s_n\}$为基.

优越扩张包括了环 R 上的全矩阵环 $M_n(R)$[13]和有限群 $G(|G|^{-1}\in R)$的斜群环 $R*G$[14].

定理 2 设 $S\geqslant R$ 为优越扩张，则对任何右 S-模 M，以下条件等价：

(1) M_R 是(d,n)-余挠右 R-模；

(2) $\mathrm{Hom}_R(S,M)$是(d,n)-余挠右 R-模；

(3) $\mathrm{Hom}_R(S,M)$是(d,n)-余挠右 S-模；

(4) M_S 是(d,n)-余挠右 S-模.

证明 (1)$\Longrightarrow$(3). 设 F 是任意一个平坦维数小于等于 d 的右 S-模，则有正合列 $0\to F_d\to F_{d-1}\to\cdots\to F_0\to F\to 0$，其中 F_i 是平坦右 S-模，$i=1,2,\cdots,d$. 由文献[12]知，F_i 也是平坦右 R-模，故 F 也是平坦维数小于等于 d 的右 R-模. 所以 $\mathrm{Ext}_S^{n+1}(F,\mathrm{Hom}_R(S,M))\cong\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F\otimes_S S,M)\cong\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)=0$，由文献[15]命题 9.21 及(1)，$\mathrm{Hom}_R(S,M)$是$(d,n)$-余挠右 S-模.

(3)$\Longrightarrow$(4). 因为 M_S 是 $\mathrm{Hom}_R(S,M)$的直和因子，所以 M_S 是(d,n)-余挠右 S-模.

(4)$\Longrightarrow$(1). 设 F 是任意一个平坦维数小于等于 d 的右 R-模，则有正合序列 $0\to F_d\to F_{d-1}\to\cdots\to F_0\to F\to 0$，其中 F_i 是平坦右 R-模，$i=1,2,\cdots,d$. 因为 S 是自由左 R-模，所以 $0\to F_d\otimes_R S\to\cdots\to F_0\otimes_R S\to F\otimes_R S\to 0$ 是正合的，且 $F_i\otimes_R S$ 是平坦右 S-模，故 $F\otimes_R S$ 是一个平坦维数小于等于 d 的右 S-模. 而 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)\cong\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,\mathrm{Hom}_S(S,M))\cong\mathrm{Ext}_S^{n+1}(F\otimes_R S,M)=0$，由文献[15]命题 9.21 及(4)，$M_R$ 是(d,n)-余挠右 R-模.

由(1)$\Longleftrightarrow$(3)$\Longleftrightarrow$(4)可以得到(2)$\Longleftrightarrow$(3). 】

定理 3 设 $S\geqslant R$ 为优越扩张，则对任何右 S-模 N，以下条件等价：

(1) N_R 是(d,n)-平坦右 R-模；

(2) $N\otimes_R S$ 是(d,n)-平坦右 R-模；

(3) $N\otimes_R S$ 是(d,n)-平坦右 S-模；

(4) N_S 是(d,n)-平坦右 S-模.

证明 (1)$\Longrightarrow$(3). 设 M 是任意一个(d,n)-余挠右 S-模，而

$$\mathrm{Ext}_S^1(N\otimes_R S,M)\cong\mathrm{Ext}_R^1(N,\mathrm{Hom}_S(S,M))\cong\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0,$$

由定理 2 知，M 也是(d,n)-余挠右 R-模，所以 $N\otimes_R S$是(d,n)-平坦右 S-模.

(3)$\Longrightarrow$(4). 因为 N_S 是 $N\otimes_R S$ 的直和因子，所以 N_S 是(d,n)-平坦右 S-模.

(4)$\Longrightarrow$(1). 设 M 是任意一个(d,n)-余挠右 R-模，由定理 2 知，$\mathrm{Hom}_S(S,M)$是(d,n)-余挠右 S-模，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)\cong\mathrm{Ext}_R^1(N\otimes_S S,M)\cong\mathrm{Ext}_S^1(N,\mathrm{Hom}_R(S,M))=0$，故 N_R 是(d,n)-平坦右 R-模.

由以上证明容易得到(2)$\Longleftrightarrow$(3). 】

推论 1 设 R 是环，n 是任意正整数，则对任何右 $M_n(R)$-模 M，以下条件等价：

(1) M_R 是(d,n)-余挠右R-模；

(2) $\mathrm{Hom}_R(M_n(R),M)$是(d,n)-余挠右 R-模；

(3) $\mathrm{Hom}_R(M_n(R),M)$是(d,n)余挠右 $M_n(R)$-模；

(4) $M_{M_n(R)}$是(d,n)-余挠右 $M_n(R)$-模.

推论 2 设 R 是环，n 是任意正整数，则对任何右 $M_n(R)$-模 N，以下条件等价：

(1) N_R 是(d,n)-平坦右 R-模；

(2) $N\otimes_R M_n(R)$是(d,n)-平坦右 R-模；

(3) $N\otimes_R M_n(R)$是(d,n)-平坦右 $M_n(R)$-模；

(4) $N_{M_n(R)}$是(d,n)-平坦右 $M_n(R)$-模.

推论 3 设 $R*G$ 是斜群环，其中 G 是有限群，

$|G|^{-1}\in R$，则对任何右 $R*G$-模 M，以下条件等价：

（1）M_R 是(d,n)-余挠右 R-模；

（2）$\mathrm{Hom}_R(R*G,M)$是(d,n)-余挠右 R-模；

（3）$\mathrm{Hom}_R(R*G,M)$是(d,n)-余挠右 $R*G$-模；

（4）M_{R*G}是(d,n)-余挠右 $R*G$-模.

推论 4 设 $R*G$ 是斜群环，其中 G 是有限群，$|G|^{-1}\in R$，则对任何右 $R*G$-模 N，以下条件等价：

（1）N_R 是(d,n)-平坦右 R-模；

（2）$N\otimes_R(R*G)$是(d,n)-平坦右 R-模；

（3）$N\otimes_R(R*G)$是(d,n)-平坦右 $R*G$-模；

（4）N_{R*G}是(d,n)-平坦右 $R*G$-模.

定理 4 设 R 和 S 是等价环，$F:R\text{-Mod}\to S\text{-Mod}$ 和 $G:S\text{-Mod}\to R\text{-Mod}$ 是等价函子，则以下结论成立：

（1）M 是(d,n)-余挠右 R-模当且仅当 $F(M)$ 是(d,n)-余挠右 S-模；

（2）N 是(d,n)-平坦右 R-模当且仅当 $F(N)$ 是(d,n)-平坦右 S-模.

证明 （1）$\Longrightarrow$. 设 P 是一个平坦维数小于等于 d 的右 S-模，$\bar{P}=:\cdots\to P_1\to P_0\to P\to 0$ 是 P 的投射分解. 由于 $G(P)$ 是平坦维数小于等于 d 的右 R-模，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_S^{n+1}(P,F(M))&=H^{n+1}(\mathrm{Hom}_S(\bar{P},F(M))\cong\\ &H^{n+1}(\mathrm{Hom}_R(G(\bar{P}),M))=\\ &\mathrm{Ext}_R^{n+1}(G(P),M)=0,\end{aligned}$$

故 $F(M)$是(d,n)-余挠右 S-模.

$\Longleftarrow$. 由 $G(F(M))\cong M$ 得.

（2）$\Longrightarrow$. 设 M 是任意一个(d,n)-余挠右 S-模，$\mathrm{E}=0:\to M\to E^0\to E^1\to\cdots$ 是 M 的内射分解，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_S^1(F(N),M)&=H^1(\mathrm{Hom}_S(F(N),\mathrm{E})\cong\\ &H^1(\mathrm{Hom}_R(N,G(\mathrm{E}))=\mathrm{Ext}_R^1(N,G(M)),\end{aligned}$$

由（1）知 $G(M)$ 是(d,n)-余挠右 R-模，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(N,G(M))=0$，故 $F(N)$是(d,n)-平坦右 S-模.

$\Longleftarrow$. 由 $G(F(N))\cong N$ 得. 】

推论 5 设 R 是环，$e\in R$ 是非零幂等元，如果 $ReR=R$，则有：

（1）对任何右 R-模 M，M 是(d,n)-余挠右 R-模当且仅当 $M\otimes_R Re$ 是(d,n)-余挠右 eRe-模；

（2）对任何右 eRe-模 M，M 是(d,n)-余挠右 eRe-模当且仅当 $M\otimes_{eRe}eR$ 是(d,n)-余挠右 R-模；

（3）对任何右 R-模 N，N 是(d,n)-平坦右 R-模当且仅当 $M\otimes_R Re$ 是(d,n)-平坦右 eRe-模；

（4）对任何右 eRe-模 N，N 是(d,n)-平坦右 eRe-模当且仅当 $M\otimes_{eRe}eR$ 是(d,n)-平坦右 R-模.

推论 6 设 R 是环，$n\geqslant 1$ 是自然数，则有：

（1）对任何右 R-模 M，M 是(d,n)-余挠右 R-模当且仅当 $M\otimes_R M_n(R)e_{ii}$ 是(d,n)-余挠右 $M_n(R)$-模；

（2）对任何右 $M_n(R)$-模 M，M 是(d,n)-余挠右 $M_n(R)$-模当且仅当 $M\otimes_{M_n(R)}e_{ii}M_n(R)$ 是(d,n)-余挠右 R-模；

（3）对任何右 R-模 N，N 是(d,n)-平坦右 R-模当且仅当 $M\otimes_R M_n(R)e_{ii}$ 是(d,n)-平坦右 $M_n(R)$-模；

（4）对任何右 $M_n(R)$-模 N，N 是(d,n)-平坦右 $M_n(R)$-模当且仅当 $M\otimes_{M_n(R)}e_{ii}M_n(R)$ 是(d,n)-平坦右 R-模.

参考文献：

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. *Relative Homological Algebra* [M]. Berlin: de Grugter, 2000.

[2] TRLIFAJ J. *Cover, Envelopes, and Cotorsion Theories* [M]. Lecture Notes for the Workshop. Homological Methods in Module Theory. Cortona September 10-16, 2000.

[3] ENOCHS E E, JENDA O M G, LOPEZ-ROMOS J A. The existence of gorenstein flat covers[J]. *Math Scand*, 2004, **94**(1): 46.

[4] MAO Li-xin, DING Nan-qing. *FI*-injective and *FI*-flat modules[J]. *J Algebra*, 2007, **309**(1): 367.

[5] TANG Xiao-yan, LIU Zhong-kui. Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules [J]. *J Algebra*, 2008, **320**(7): 2659.

[6] MAO Li-xin. Remarks on *fp*-injective and *fp*-flat modules[J]. *Arab J Sci Eng*, 2011, **36**(6): 1013.

[7] 乔虎生，汪涛. n-p-投射模和强 p-投射模[J]. 山东大学学报(自然科学版)，2013，**49**(2)：23.

[8] ENOCHS E E. Flat cover and flat cotorsion modules [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1984, **92**(5): 179.

[9] BICAN L, BASHIER E, ENOCHS E E. All modules have flat cover[J]. *Bull Landon Math Soc*, 2001, **33**(4): 385.

（下转第 41 页）

25(1): 91.

[4] LIU Y, MIN F F, QIU T, et al. Effect of Zn^{2+} content on the microstructure and magnetic properties of nanocrystalline $Ni_{1-x}Zn_xFe_2O_4$ ferrite by a spraying-coprecipitation method [J]. *Journal of Wuhan University of Technology-Mater Sci Ed*, 2010, **25**: 429.

[5] 李巧玲，常传波. 针状纳米 $Ni_{1-x}Zn_xFe_2O_4$ 的制备及磁性能[J]. 化学学报，2010，**68**(14)：1385.

[6] 马倩，马永青，张贤，等. Ni-Zn 铁氧体的掺杂研究与磁相互作用分析[J]. 稀有金属材料与工程，2014，**43**：397.

[7] JADHAV S S, SHIRSATH S E, TOKSHA B G, et al. Effect of cation proportion on the structural and magnetic properties of Ni-Zn ferrites nano-size particles prepared by co-precipitation technique[J]. *Chinese Journal of Chemical Physics*, 2008, **21**(4): 381.

[8] 管志花，赵敏光，余飞，等. 纳米 NiZn 铁氧体的磁性能研究[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2006，**29**(6)：713.

[9] 向军，褚艳秋，周广振，等. 电纺制备多孔 $Ni_{1-x}Zn_xFe_2O_4$ 超细纤维的结构与磁性能[J]. 无机材料学报，2012，**27**(4)：363.

[10] NAM J H, JOO Y H, LEE J H, et al. Preparation of NiZn-ferrite nanofibers by electrospinning for DNA separation [J]. *Journal of Magenetism and Magenetic Materials*, 2009, **321**: 1389.

[11] 汪忠柱，谢延玉. 纳米晶 $Ni_{1-x}Zn_xFe_2O_4$ 铁氧体的水热合成与磁性能[J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2010，**34**(6)：49.

[12] 孔小东，朱梅五. NiZnCu 铁氧体纳米粉末的红外特征及磁性能[J]. 云南大学学报(自然科学版)，2005，**27**(3A)：60.

[13] 褚宁杰，王新庆，刘亚丕，等. 制备条件对 NiZn 铁氧体纳米晶材料磁性能的影响[J]. 稀有金属材料与工程，2010，**39**：302.

[14] VERWEY E J, HAAYMAN W. Electronic conductivity and transition point of magnetite ("Fe_3O_4")[J]. *Physica*, 1941, **8**(9): 979.

[15] 卢佃清，刘学东，徐超，等. Zn^{2+} 含量对纳米 $Ni_{1-x}Zn_xFe_2O_4$ 超粉末在 X 波段吸波特性的影响[J]. 材料热处理技术，2010，**39**(10)：5.

[16] 张春祥，史建设，杨绪杰，等. EDTA 络合法制备 Ni-Zn 铁氧体及其磁学性质[J]. 功能材料与器件学报，2010，**16**(5)：0495.

[17] 马倩，马永青. Ni-Zn 铁氧体的制备与磁相互作用分析[J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2013，**37**(1)：44.

[18] 罗光圣，李建德，姜贵文，等. Ni-Zn 铁氧体的制备及其电磁性能[J]. 南昌大学学报(自然科学版)，2011，**35**(1)：56.

（责任编辑　孙对兄）

(上接第 26 页)

[10] MAO Li-xin, DING Nan-qing. Relative cotorsion modules and relative flat modules [J]. *Comm Algebra*, 2006, **34**(6): 2303.

[11] OSBORNE M S. *Basic Homological Algebra*[M]. New York: Springer, 2003.

[12] ROTMAN J J. *An Introduction to Homological Algebra*[M]. New York: Academic Press, 1979.

[13] PASSMAN D S. *The Algebraic of Group Rings*[M]. New York: Wiley-Interscience, 1997.

[14] PASSMAN D S. It is essentially Maschke's theorem [J]. *Rocky Mountain J Math*, 1983, **13**(3): 37.

[15] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京：高等教育出版社，1998.

（责任编辑　陆泉芳）