

# 从三参数固体模型来理解高聚物的粘弹性

周 玲<sup>1,2</sup>

(1 西北师范大学 物理与电子工程学院, 甘肃 兰州 730070; 2 兰州城市学院 培黎工程技术学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 为了更好的理解高聚物的粘弹性。通过三参数固体模型的几何构型来推导其运动微分方程, 利用其微分方程分析此模型的应力松弛过程、蠕变过程、以及反映弹性和粘性相结合的应力松弛时间和蠕变推迟时间。利用微分方程不同情况下的解, 分析了应力松弛过程和蠕变过程。结果表明这种三参数固体模型能够很好的描述聚合物的力学性能。

关键词: 高聚物; 三参数固体模型; 应力松弛; 蠕变; 松弛时间; 推迟时间

中图分类号: O631.2<sup>+</sup>1

文献标识码: A

文章编号: 1009-5160(2008)-0029-03

一般情况下, 任何实际物体同时具有弹性和粘性这两种性质, 弹性和粘性是共存于一个物体中的一对矛盾, 根据外界条件, 即加载时间和温度不同, 或主要显示其弹性或主要显示其粘性, 因此粘弹性并不是高聚物特有的力学性能。但是在常温和通常的加载时间下, 高聚物材料就能表现出明显的弹性和粘性, 因此, 在高聚物材料性能测试、使用和加工过程中, 必须考虑高聚物材料的粘弹性<sup>[1-3]</sup>。

高聚物的粘弹性行为表现在蠕变、应力松弛和动态力学性质三个方面。在唯象学的研究中, 分别用理想弹簧和理想粘壶代表弹性和粘性。最简单的模型是 Maxwell 串联模型和 Voigt 并联模型。下面以三参数固体模型为例, 来说明模型理论对高聚物粘弹性的解释。

## 1 三参数固体模型

三参数固体模型是由一个弹簧和一个 Voigt 并联模型以串联的方式组成的模型, 如图所示。弹簧和粘壶的应力-应变关系分别是

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \quad (1)$$

$$\sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (2)$$

由于串联的力学元件, 应力是相同的, 应变加和; 并联的力学元件应变相同, 应力加和。

在三参数固体模型中, 弹簧和 Voigt 并联模型的应力相同, 所以

$$\sigma = E_0\varepsilon_e = E\varepsilon_a + \eta \frac{d\varepsilon_a}{dt} \quad (3)$$

$\varepsilon_e$  和  $\varepsilon_a$  分别是弹簧和 Voigt 元素的应变。总应变为二者之和, 即

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_a \quad (4)$$

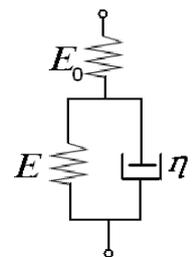


图 1 三参数固体模型

收稿日期: 2007-11-14

作者简介: 周 玲 (1981-), 女, 硕士研究生, 研究方向: 物理与电子工程。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_e}{dt} + \frac{d\varepsilon_a}{dt} \quad (5)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_0} \frac{d\sigma}{dt} \quad (6)$$

再由(3)式,得

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_0} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} - E \frac{\varepsilon_a}{\eta} \quad (7)$$

将  $\varepsilon_a = \varepsilon - \sigma/E_0$  代入(7)式,得到三参数固体模型的运动微分方程

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E\varepsilon}{\eta} = \frac{1}{E_0} \left( \frac{d\sigma}{dt} \right) + \left( \frac{E_0 + E}{\eta E_0} \right) \sigma \quad (8)$$

## 2 蠕变过程

蠕变是在恒定应力作用下,观察试样应变随时间的变化。对恒定应力  $\sigma = \sigma_0$  的蠕变,(8)式变为

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E\varepsilon}{\eta} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{E_0 + E}{E_0} \right) \sigma \quad (9)$$

由于  $t=0$  时,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_e = \sigma_0/E_0$ , 该微分方程的解为

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{E} [1 - e^{-t/\tau_\sigma}] \quad (10)$$

其中,  $\tau_\sigma = \eta/E$ , 称为蠕变推迟时间。

通过模型的几何构型以及微分方程的解可以看出,在蠕变的情况下,实验开始的一瞬间,在外力作用下,模型几乎是瞬时被拉长到固定值。弹簧立即做出响应,而 Voigt 元件来不及运动,全部起始应变都产生于弹簧上,所以呈现胡克弹性行为。若维持这应变所对应的应力不变,则这应力将迫使 Voigt 元件中粘壶的活塞上移,粘壶被拉开,在这段时间呈现明显的粘弹性。而总应变为二者应变之和,则总应变增加。通过(10)式,也可以知道应变逐渐增加。说明为维持这应力所需要的应变逐渐增加,从而产生蠕变。

而且,从(10)式中也可以看出,当  $t = \tau_\sigma$  时,

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \frac{1}{e} \right] \quad (11)$$

所以  $\tau_\sigma$  是达到蠕变极限的  $(1-1/e)$  所需的时间。它反映了粘性和弹性的结合,是材料同时具有弹性和粘性的结果<sup>[4]</sup>。

## 3 应力松弛过程

应力松弛是维持恒定应变所需的应力随时间的变化。则令  $\varepsilon = \varepsilon_0, \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ , 这时(8)式变为:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \left( \frac{E_0 + E}{\eta} \right) \sigma = \frac{E}{\eta} \sigma_0 \quad (12)$$

由于  $t=0$  时,  $\sigma = \sigma_0 = E_0 \varepsilon_0$ , 微分方程的解为

$$\sigma = \left( \frac{E}{E_0 + E} \right) \sigma_0 + \left( \frac{E}{E_0 + E} \right) \sigma_0 e^{-t/\tau_\varepsilon} \quad (13)$$

其中,  $\tau_\varepsilon = \eta/(E + E_0)$  称为应力松弛时间。

通过模型的几何构型以及微分方程的解可以看出，在应力松弛的情况下，试验开始的一瞬间，模型几乎是瞬时被拉长到固定值。弹簧立即做出响应，而 Voigt 元件来不及运动，全部起始应变都产生于弹簧上，所以呈现胡克弹性行为。若维持这应变不变，则被拉伸着弹簧的回弹将迫使 Voigt 元件中粘壶的活塞上移，粘壶被拉开，在这段时间呈现明显的粘弹性，之后弹簧逐渐回复到未拉伸状态，材料呈现出粘性。通过 (13) 式可以看出，为维持这应变所需要的应力随时间指数式衰减，从而产生应力松弛。

而且，从 (13) 式中也可以看出，当  $t = \tau_\varepsilon$  时，

$$\sigma_{\tau_\varepsilon} = \sigma_\infty + (\sigma_0 - \sigma_\infty) \frac{1}{e} \quad (14)$$

所以  $\tau_\varepsilon$  是应力松弛到松弛极限  $(\sigma_0 - \sigma_\infty)$  的  $1/e$  所需的时间，它恰好反映了弹性和粘性的结合，在外力作用时间与这个时间为同一个数量级时，材料的粘弹性才有最充分的显示。

#### 4 结论

通过分析三参数固体模型中的应力松弛过程和蠕变过程，以及反映弹性和粘性相结合的松弛时间和推迟时间，发现这两种过程与实际高聚物的粘弹性行为是定性符合的，而松弛时间和推迟时间则反映了材料粘弹性的内部时间尺度，所以利用这种模型可以很好的理解高聚物的粘弹性。

#### 参考文献：

- [1] 马德柱，何平笙，徐种德，等．高聚物的结构与性能（第二版）[M]．北京：科学出版社，2004：253-271．
- [2] I M.沃德．固体高聚物的力学性能（第二版）[M]．北京：科学出版社，1988：105-110．
- [3] 何曼君，陈维孝，董西侠．高分子物理[M]．上海：复旦大学出版社，1990：351-356．
- [4] 何平笙，杨海洋，朱平平．从 Maxwell 串联模型定义的弛豫时间  $\tau$  理解聚合物粘弹性的本质[J]．化学通报，2004，(9)．
- [5] Ward I M.Mechanical Properties of Solid Polymers.2nd ed[M].Chichester:Wiley,1982.
- [6] J J Aklonis, W J MacKnight . Intruduction to Polymer Viscoelasticity, 2nd Ed[M] . Wiley, 1983.
- [7] 金日光，华幼卿．高分子物理[M]．北京：化学工业出版社，2000.
- [8] Chang D H.Rheology in Polymer,Procdssin[M].New York:Academic Press,1976.
- [9] Ritchie P D.Physics of Plastic[M].London:Iliffe Books Ltd,1965.
- [10] 曾广胜，瞿金平．聚合物粘弹性及其力学模型[J]．华南理工大学学报，2005，33：14-18.
- [11] Leaderman H,Eirich F R.Rheology[M].New York:Academic Press,1960.
- [12] Bemhardt E C.Processing of Thermoplastic Materials[M].New Jersey:Van Nostrand-Reinhold Press,1959.

## Understanding the Viscoelasticity of Polymer from the Standard Linear Solid Model

ZHOU Ling<sup>1,2</sup>

(1College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu 730070, China;

2 PeiLi Engineering and Technology College, LanZhou City University, Lanzhou Gansu 730070, China)

**Abstract** : Aim To understand the viscoelasticity of Polymer. Methods The differential equation is derived from the construction of Three Parameters Model,which is utilized to analyze the relaxation ,creep ,relaxation time and retardation time .Results The process of relaxation and creep is analyzed through the result of differential equation.Conclusion Three Parameters Model can describe the mechanical capability of Polymer very well.

**Key words** : Polymer ; Three Parameters Solid Model ; relaxation ; creep ; relaxation time ; retardation time