

## 一个新系统中混沌吸引子的形成机制及其混沌控制

豆福全, 孙建安, 段文山, 吕克璞  
(西北师范大学 物理与电子工程学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 分析了一个新混沌系统中混沌吸引子的形成机制, 研究表明这类混沌吸引子是由2个简单的混沌吸引子通过一个镜像映射相互融合而成的复合结构. 利用线性负反馈法将混沌控制到平衡点, 根据 Routh-Hurwitz 稳定性条件获得了达到控制目标时反馈参数所满足的条件. 基于 Mathematica 程序, 用数值方法验证了以上方法的有效性.

**关键词:** 混沌系统; 形成机制; 负反馈方法; 混沌控制

**中图分类号:** O 415.5

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1001-988X(2008)01-0034-04

Forming mechanism of chaotic attractor  
and controlling chaos in a new chaotic system

DOU Fu-quan, SUN Jian-an, DUAN Wen-shan, LÜ Ke-pu

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

**Abstract:** The forming mechanism of a new chaotic attractor is investigated, the results show that the new chaotic attractor has a compound structure, which is obtained by merging together two simple attractors after performing a mirror operation. Furthermore, a linear feedback method is used to suppress chaos to unstable equilibrium. The Routh-Hurwitz criterion is applied to study the conditions of the asymptotic stability of the controlled chaotic system. Based on Mathematica program, numerical simulations are presented to demonstrate the effectiveness of these methods.

**Key words:** chaotic system; forming mechanism; feedback method; controlling chaos

自1963年美国气象学家 Lorenz E N 在数值实验中发现了第一个混沌吸引子到现在, 短短几十年间, 混沌理论得到了迅速的发展<sup>[1-3]</sup>. 在 Lorenz 系统的基础上, 一系列新的混沌系统被发现, 如 Rössler 系统(1976年)<sup>[4]</sup>、Chen 系统(1999年)<sup>[5]</sup>、Lü 系统(2002年)<sup>[6]</sup>、Liu 系统(2004年)<sup>[7]</sup>等等. 研究这些混沌系统的动力学特性、分析各种吸引子的形成机制<sup>[8,9]</sup>, 并力求对它加以控制<sup>[10]</sup>和利用, 有利于刻画混沌的基本特征, 揭示混沌的本质, 使之更好地为人类服务.

最近, 王杰智等在文献[11]中构造了一个新的三维混沌模型, 并利用理论推导、数值模拟、

Lyapunov 指数谱、分岔图和 Poincaré 截面图等研究了系统的基本动力学特性. 该混沌系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x-y), \\ \dot{y} &= -cy + xz, \\ \dot{z} &= -bz + dxy, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $a, b, c, d$  是实常数, 当  $a=20, b=2, c=28, d=1$  时系统存在一个典型混沌吸引子. 笔者通过对系统中引入一个常数控制器, 借助数值方法对系统(1)混沌吸引子的形成机制进行了探讨, 同时利用负反馈法将系统(1)的混沌吸引子控制到一个平衡点.

收稿日期: 2007-07-09; 修改稿收到日期: 2007-10-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10575082); 甘肃省自然科学基金资助项目(3ZS061-A25-014)

作者简介: 豆福全(1977-), 男, 甘肃西和人, 讲师, 硕士. 主要研究方向为非线性物理.

E-mail: doufq@nwnu.edu.cn

# 1 混沌吸引子的形成机制

为了深入研究系统(1)的结构和混沌吸引子的形成机制, 给系统(1)的第二个方程右端加上一个常数控制器  $e$ , 则受控系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x-y), \\ \dot{y} &=-cy+xz+e, \\ \dot{z} &=-bz+dxy. \end{aligned} \quad (2)$$

在系统(2)中, 控制器  $e$  的取值可以在一定范围内变化, 随着  $e$  的变化, 系统(1)的混沌行为可以得到有效的控制, 受控系统在不同的  $e$  取值区间具有不同的动力学行为. 借助数学软件, 利用四阶 Runge-Kutta 方法进行数值模拟, 选取系统的初值为(2, 10, 48), 时间步长为  $\Delta t=0.001$ , 在控制器  $e$  不同取值范围, 系统(2)的动力学行为如下:

1) 当  $|e| \geq 528.4$  时, 系统(2)的轨线收敛于

平衡点.

2) 当  $100.6 \leq |e| < 528.4$  时, 系统(2)的轨线为一周期轨道, 如图 1(a)所示.

3) 当  $87 \leq |e| < 100.6$  时, 系统(2)出现倍周期分岔, 如图 1(b)所示.

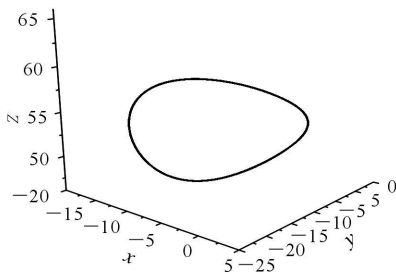
4) 当  $66 \leq |e| < 87$  时, 系统(2)的轨线为一极限环, 如图 1(c)所示.

5) 当  $37.2 \leq |e| < 48.7$  时, 系统(2)出现倍周期分岔, 如图 1(d)、(e)所示.

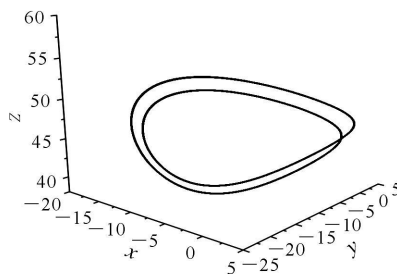
6) 当  $24.5 \leq |e| < 37.2$  时, 系统(2)为一个左或右半吸引子, 如图 1(f)、(g)所示.

7) 当  $10 \leq |e| < 24.5$  时, 系统(2)的轨线部分被限制掉, 如图 1(h)所示(当  $19 \leq |e| < 24$  时, 系统(2)的轨线为一周期轨道).

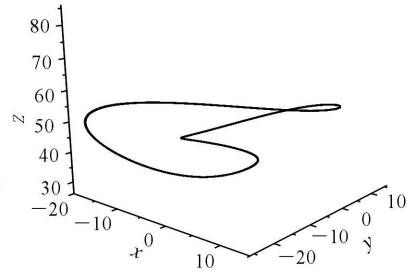
8) 当  $|e| < 10$  时, 系统(2)为一个完整的吸引子.



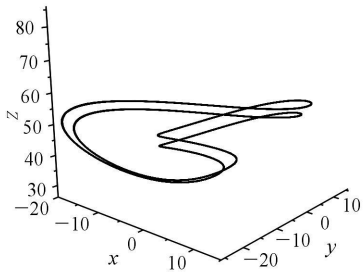
(a)



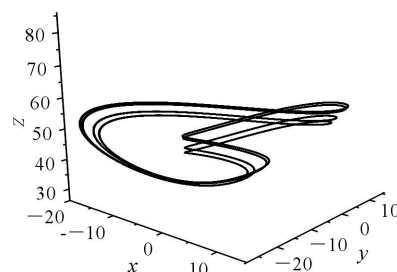
(b)



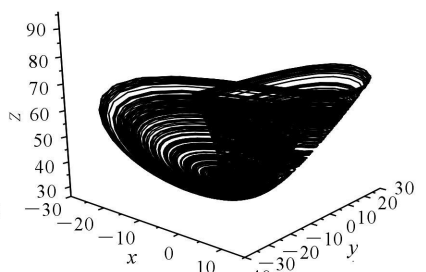
(c)



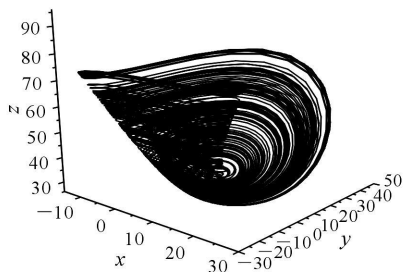
(d)



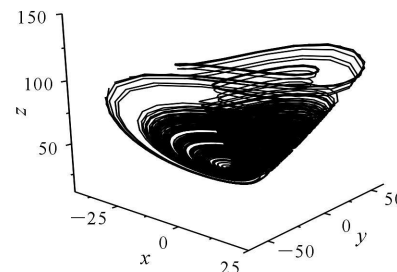
(e)



(f)



(g)



(h)

- (a)  $e = 200$       (b)  $e = 100$
- (c)  $e = 50$       (d)  $e = 46.6$
- (e)  $e = 45$       (f)  $e = 30$
- (g)  $e = -30$     (h)  $e = 16$

图 1 系统(2)的相图

Fig 1 Phase portrait of chaotic system(2)

由以上分析可以看出: 在控制器  $e$  足够大时, 系统的所有轨线收敛于平衡点; 当  $e$  逐渐减小时, 系统出现单周期轨道、倍周期分岔现象; 当  $e$  继续减小时, 系统又会出现极限环和倍周期分岔现象, 然后进一步演化为半吸引子; 当  $e$  相对较小时, 系统的部分轨线被限制掉; 当  $e$  足够小时, 系统为一个完整的混沌吸引子. 类似地, 研究当  $e$  为负值的情形时, 随着  $e$  逐渐增大的过程, 系统的演化规律与  $e$  取正值时减小的过程是相似的. 总之, 当  $|e|$  足够大时, 系统的混沌吸引子将消失, 当  $|e|$  足够小时, 系统将出现混沌运动, 在  $|e|$  由大变小的过程中, 混沌吸引子将由一个左、右半吸引子(一个卷形状)演化为一个完整吸引子(两个卷形状), 并经倍周期分岔得到.

由此可见, 系统(1)的混沌吸引子是由两个简单的混沌吸引子通过一个镜像映射相互融合而成. 当  $e=30$  时, 该混沌吸引子为左半混沌吸引子, 当  $e=-30$  时, 该混沌吸引子为右半混沌吸引子, 如图 1(f)、(g) 所示. 说明该吸引子是一个复合结构, 而且这两个混沌吸引子起源于一些简单的极限环, 可以由倍周期分岔得到, 类似于 Lorenz 系统和 Lü 系统, 又不同于 Lorenz 系统和 Lü 系统<sup>[12]</sup>, 比 Lorenz 系统和 Lü 系统有更为复杂的拓扑结构.

## 2 混沌吸引子的控制

当参数  $a=20, b=2, c=28, d=1$  时, 系统有 3 个平衡点:

$$\begin{aligned} E_0(0, 0, 0), \\ E_1\left(2\sqrt{14}, 2\sqrt{14}, 28\right), \\ E_2\left(-2\sqrt{14}, -2\sqrt{14}, 28\right). \end{aligned}$$

以下采用线性负反馈法将系统控制到平衡点, 为此, 假定受控系统如下

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x-y) - k_1(x-\bar{x}), \\ \dot{y} &= -cy + xz - k_2(y-\bar{y}), \\ \dot{z} &= -bz + dxy - k_3(z-\bar{z}). \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $k_1, k_2, k_3$  是负反馈系数,  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  为控制目标, 即上述 3 个平衡点中的任意一个. 系统(3)的线性化方程的系数矩阵对应的特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (4)$$

根据 Routh-Hurwitz 稳定性条件, 当  $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$  时, 所有特征值均具有负实部, 从而系统(3)将收敛到平衡点, 达到了控制目标.

### 2.1 控制混沌系统到平衡点 $E_0$

此时, 系统(3)对应的 Jacobi 矩阵是

$$J = \begin{pmatrix} a-k_1 & -a & 0 \\ 0 & -c-k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b-k_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

矩阵(5)对应的 3 个特征值分别为

$$\lambda_1 = a - k_1, \quad \lambda_2 = -c - k_2, \quad \lambda_3 = -b - k_3.$$

当负反馈系数满足

$$k_1 > a, \quad k_2 > -c, \quad k_3 > -b \quad (6)$$

时, 所有特征值均具有负实部, 从而系统(3)将收敛到平衡点  $E_0(0, 0, 0)$ .

### 2.2 控制混沌系统到平衡点 $E_1$

系统(3)对应的 Jacobi 矩阵是

$$J = \begin{pmatrix} a-k_1 & -a & 0 \\ \bar{z} & -c-k_2 & \bar{x} \\ \bar{y} & d\bar{x} & -b-k_3 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(2\sqrt{14}, 2\sqrt{14}, 28\right)$ . 矩阵(6)对应的特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (8)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_1 &= 10 + k_1 + k_2 + k_3, \\ a_2 &= 30k_1 - 18k_2 + 8k_3 + k_1k_2 + \\ &\quad k_1k_3 + k_2k_3 - 40, \\ a_3 &= -40k_2 + 2k_1k_2 + 28k_1k_3 - \\ &\quad 20k_2k_3 + k_1k_2k_3 + 2240. \end{aligned} \quad (9)$$

根据 Routh-Hurwitz 稳定条件, 当

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &> -10, \\ -40k_2 + 2k_1k_2 + 28k_1k_3 - 20k_2k_3 + \\ &\quad k_1k_2k_3 > -2240, \\ k_1^2(k_2 + k_3 + 30) + k_2^2(k_3 - 18) + \\ &\quad 8(5k_3 + k_3^2 - 330) + k_2(20k_3 + k_3^2 - 180) + \\ &\quad k_1(k_2^2 + 20k_3 + k_3^2 + 260) + \\ &\quad 2k_1k_2(k_3 + 10) > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

时, 所有特征值均具有负实部, 从而系统(3)将收敛到平衡点  $E_1\left(2\sqrt{14}, 2\sqrt{14}, 28\right)$ .

### 2.3 控制混沌系统到平衡点 $E_2$

此时, 系统(3)对应的 Jacobi 矩阵的特征方程及其系数和(8)、(9)式相同. 因此, 根据 Routh-Hurwitz 稳定性条件, 当  $k_1, k_2, k_3$  满足(10)式时, 所有特征值均具有负实部, 从而系统(3)将收敛到平衡点  $E_2\left(-2\sqrt{14}, -2\sqrt{14}, 28\right)$ .

## 2.4 数值研究结果

本部分利用四阶 Runge-Kutta 算法对受控系统 (3) 进行数值计算, 以验证上述分析结果. 系统参数固定为  $a=20$ ,  $b=2$ ,  $c=28$ ,  $d=1$ . 数值研究结果表明:

1) 当反馈系数取值满足 (6) 式时, 系统 (3) 收敛到平衡点  $E_0(0, 0, 0)$ , 如图 2(a) 所示. 取初值为  $x(0)=2$ ,  $y(0)=3$ ,  $z(0)=2$ , 负反馈系数  $k_1=22$ ,  $k_2=1$ ,  $k_3=5$ .

2) 当反馈系数取值满足 (10) 式时, 系统 (3) 收敛到平衡点  $E_1(2\sqrt{14}, 2\sqrt{14}, 28)$ , 如图 2(b) 所示. 取初值为  $x(0)=10$ ,  $y(0)=10$ ,  $z(0)=12$ , 负反馈系数  $k_1=5$ ,  $k_2=0$ ,  $k_3=10$ .

3) 当反馈系数取值满足 (10) 式时, 系统 (3) 收敛到平衡点  $E_2(-2\sqrt{14}, -2\sqrt{14}, 28)$ , 如图 2(c) 所示. 取初值为  $x(0)=8$ ,  $y(0)=10$ ,  $z(0)=15$ , 负反馈系数  $k_1=5$ ,  $k_2=0$ ,  $k_3=10$ .

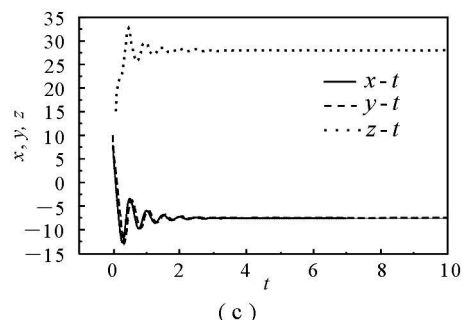
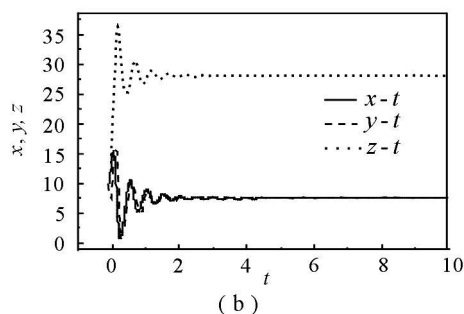
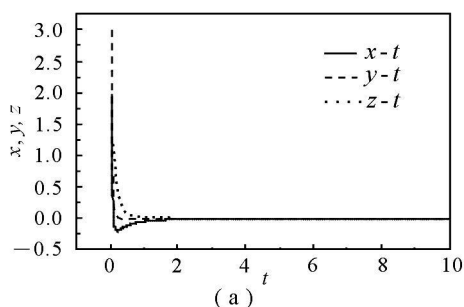


图 2 受控系统 (3) 的时序图

Fig 2 The time response of states for system (3) with the control function activated

## 3 结论

本文通过在线性系统中加入一个常数控制器的办法, 分析了一个新混沌系统混沌吸引子的形成机制. 研究表明, 该混沌吸引子为一个复合结构. 然后利用线性负反馈法将该系统的混沌行为控制到平衡点, 利用 Routh-Hurwitz 稳定性条件可以获得达到控制目标时反馈参数所满足的条件. 该方法可在相当大的范围内选取控制参数使系统运动最终按照人们的意愿发展.

### 参考文献:

- [1] LI Tian-yan, YORKE J. Period three implies chaos [J]. *Amer Math Monthly*, 1975, **82**: 985-992.
- [2] OTT E, GREBOGI C, YORKE J A. Controlling chaos[J]. *Phys Rev Lett*, 1990, **64**: 1196-1199.
- [3] CARROL T L, PECORA L M. Synchronizing chaotic circuits[J]. *IEEE Trans Circ Syst*, 1991, **38**: 453-456.
- [4] ROSSLER O E. An equation for continuous chaos [J]. *Phys Lett A*, 1976, **57**: 397-398.
- [5] CHEN Guan-rong, UETA T. Yet another chaotic attractor[J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 1999, **9**: 1465-1466.
- [6] LÜ Jin-hu, CHEN Guan-rong. A new chaotic attractor coined[J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2002, **12**: 659-661.
- [7] LIU Chong-xin, LLU Tao, LIU Ling, et al. A new chaotic attractor[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, **22**: 1031-1038.
- [8] LÜ Jin-hu, CHEN Guan-rong, ZHANG Suo-chun. The compound structure of a new chaotic attractor[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, **22**: 669-672.
- [9] LIU Chong-xin, LLU Ling, LIU Tao, et al. A new butterfly-shaped attractor of Lorenz-like system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, **28**: 1196-1203.
- [10] YASSEN M T. Controlling chaos and synchronization for new chaotic system using linear feedback control[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, **26**: 913-20.
- [11] 王杰智, 陈增强, 袁肇祉. 一个新的混沌系统及其性质研究[J]. *物理学报*, 2006, **55**(8): 3956-3963.
- [12] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

(责任编辑 孙晓玲)