

非线性朗道-齐纳隧穿的高频周期调制效应

吴利华, 段文山*

(西北师范大学 物理与电子工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 研究了高频周期调制场对非线性两能级系统朗道-齐纳隧穿(Landau-Zener tunneling 简称 LZT)的影响. 通过对系统的能级差进行高频周期调制, 运用解析法和数值法同时发现, 加高频周期调制场等价于两能级间耦合系数 v 减小为有效耦合系数 qv (q 为修正系数) 而不加调制场, 并得到了修正系数 q 的表达式.

关键词: 非线性两能级系统; 朗道-齐纳隧穿(LZT)模型; 高频周期调制; 有效耦合系数

中图分类号: O 415 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-988X(2008)03-0027-04

Effect of high-frequency periodic modulation on the nonlinear Landau-Zener tunneling

WU Li-hua, DUAN Wen-shan

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

Abstract: The effect of high-frequency periodic modulation on the Landau-Zener tunneling of a nonlinear two-level system is investigated. By applying a high-frequency periodic modulation on the energy bias of the system and employing the analytical method and numerical method, it is found that the effect of high-frequency periodic modulation is equivalent to no modulation with the coupling constant v between the two levels decreasing to the effective coupling the effect of constant qv (q is the correction factor). And the analytic expression of the correction factor q is obtained.

Key words: nonlinear two-level system; Landau-Zener tunneling model; high-frequency periodic modulation; effective coupling constant

能级的准交叉在量子不可积系统中是一个普遍的现象, 在该系统中对称性破缺导致简并能级的分裂而形成十分微小的能级间隙. 在准交叉点附近, 假设两能级的能级差随时间线性变化, 朗道-齐纳隧穿(Landau-Zener tunneling 简称 LZT)模型则为两能级系统的隧穿动力学提供了一个很好的描述^[1]. 在量子力学中, LZT 模型是一个基本的物理模型, 它在量子化学、碰撞理论、纳磁铁的自旋隧穿、玻色-爱因斯坦凝聚以及量子计算等领域有

着广泛的应用.

考虑了各种各样的物理条件后, LZT 模型已经扩展为许多模型^[2-5], 其中非线性两能级系统的 LZT 模型引起了研究者的极大兴趣^[6-10]. 在该模型中, 系统的能级能量依赖于能级上的粒子占据数, 出现在粒子主要占据两个能级的多体系统的平均场处理中. 非线性 LZT 模型不仅在理论上证明了许多非常有趣且新颖的物理特性, 而且在研究纳磁铁的自旋隧穿^[11]、双阱势^[6,7,9,12] 或光晶格^[8,10] 中的

收稿日期: 2007-09-04; **修改稿收到日期:** 2007-10-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10575082); 甘肃省自然科学基金资助项目(3ZS061-A25-013); 西北师范大学科技创新工程资助项目(NWNU-KJXCXGC-03-17)

作者简介: 吴利华 (1981-), 男, 甘肃涇川人, 硕士研究生. 主要研究方向为非线性物理.

* 通讯联系人, E-mail: duanws@nwnu.edu.cn

玻色-爱因斯坦凝聚以及双势阱玻色-爱因斯坦凝聚体系的自俘获现象^[5]中有着重要的作用。

研究外部周期调制场对 LZT 模型的影响是一个十分有意义的课题,近年来有不少学者做了这方面的工作^[4,13],但所做的周期调制都是针对线性两能级系统的 LZT 模型^[4]。笔者通过对非线性两能级系统的能级差进行高频周期调制研究了 LZT 模型,理论分析与数值计算结果同时发现,给非线性两能级系统的能级差加高频周期调制场相当于两能级间耦合系数 v 减小为有效耦合系数 qv (q 为修正系数)而不加周期调制场,并得到了修正系数 q 的演化规律。

1 非线性 LZT 高频周期调制效应理论分析

非线性两能级系统可以用如下无量纲化的薛定谔方程来描述^[8]

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = H(\gamma) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 a, b 分别是两个能级上的概率波。哈密顿量为

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} + \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) & \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2} & -\frac{\gamma}{2} - \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

其中 γ 为两能级的能级差, v 是两能级间的耦合系数, c 表示相互作用强度。总概率 $|a|^2 + |b|^2$ 守恒, 设为 1。

当 $\gamma = \alpha$ (其中 α 为扫描速度^[10]) 即能级差线性变化时, 系统有许多有意义的现象^[4,8]。如在绝热极限下 (α 趋于零) 当相互作用强度 c 足够大时隧穿率不为零^[8]。当给能级差加高频周期调制 ($\omega \gg v$) 即 $\gamma = \alpha + A \sin \omega t$ (其中 A 为调制振幅, ω 为调制频率) 时, 为得出高频周期调制对非线性 LZT 的影响, 作变换^[5]

$$\begin{aligned} a &= e^{i \left(\frac{A}{2\omega} \cos \omega t \right)} a', \\ b &= e^{-i \left(\frac{A}{2\omega} \cos \omega t \right)} b', \end{aligned}$$

则薛定谔方程 (1) 可写为

$$i \frac{\partial a'}{\partial t} = \left[\frac{\alpha t}{2} + \frac{c}{2} (|b'|^2 - |a'|^2) \right] a' + \frac{v}{2} e^{-i \left(\frac{A}{\omega} \cos \omega t \right)} b', \quad (3a)$$

$$i \frac{\partial b'}{\partial t} = \left[-\frac{\alpha t}{2} - \frac{c}{2} (|b'|^2 - |a'|^2) \right] b' +$$

$$\frac{v}{2} e^{i \left(\frac{A}{\omega} \cos \omega t \right)} a'. \quad (3b)$$

利用公式

$$e^{\pm iz \cos \omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) (\pm i)^n e^{\pm in \omega t}, \quad (4)$$

$J_n(z)$ 是 n 阶贝塞尔函数, 则方程 (3) 变为

$$i \frac{\partial a'}{\partial t} = \left[\frac{\alpha t}{2} + \frac{c}{2} (|b'|^2 - |a'|^2) \right] a' + \frac{v}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{A}{\omega} \right) (-i)^n e^{-in \omega t} \right] b', \quad (5a)$$

$$i \frac{\partial b'}{\partial t} = \left[-\frac{\alpha t}{2} - \frac{c}{2} (|b'|^2 - |a'|^2) \right] b' + \frac{v}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{A}{\omega} \right) (+i)^n e^{+in \omega t} \right] a'. \quad (5b)$$

对于 $\omega \gg v$ 的高频调制, 在一个周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ 内 a', b' 变化很慢, 当 $\frac{A}{\omega}$ 不是很大时, 对 (5) 式积分, 高阶项的贡献很小可以忽略^[13,14], 只保留零阶贝塞尔函数项。这样, 薛定谔方程 (1) 变为

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha t}{2} + \frac{c}{2} (|b'|^2 - |a'|^2) & \frac{v}{2} J_0 \left(\frac{A}{\omega} \right) \\ \frac{v}{2} J_0 \left(\frac{A}{\omega} \right) & -\frac{\alpha t}{2} - \frac{c}{2} (|b'|^2 - |a'|^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}. \quad (6)$$

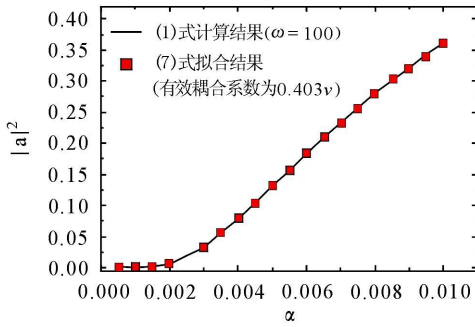
从 (6) 式可看出, 哈密顿量中两能级间耦合项为 $\frac{v}{2} J_0 \left(\frac{A}{\omega} \right)$, 能级差 $\gamma = \alpha$, 即能级差不加调制。而由 (1) 式可得变换前的情形: 两能级间耦合项为 $\frac{v}{2}$, 能级差 $\gamma = \alpha + A \sin \omega t$, 加了高频调制。

由于上述变换并不影响系统的物理性质^[5,15], 为此得到如下结论: 给非线性两能级系统的能级差加高频周期调制场即 $\gamma = \alpha + A \sin \omega t$ 相当于耦合系数 v 减小为有效耦合系数 $v J_0 \left(\frac{A}{\omega} \right)$ 而不加调制场, 即 $\gamma = \alpha$ 。

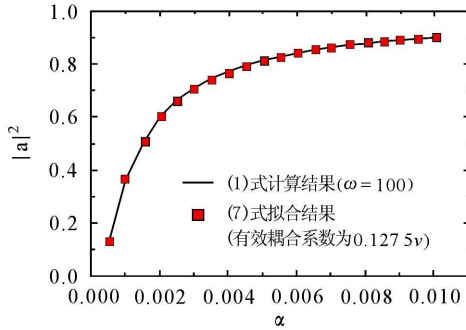
2 数值结果与分析

对于 $\omega \gg v$ 的高频调制, 用龙格-库塔法计算 (1) 式在线性相互作用下 ($c=0$) 隧穿率 $|a|^2$ 随扫描速度 α 的演化, 并用线性相互作用 Landau-Zener 公式^[8,10] (7) 进行拟合 (图 1)。

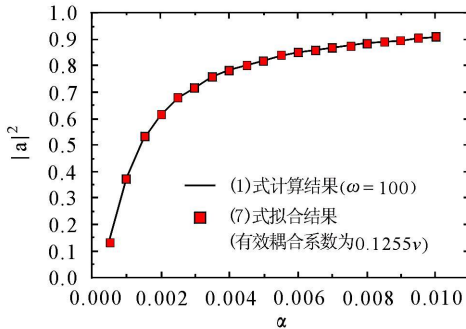
$$\Gamma_1 = \exp\left[-\frac{\pi v^2}{2\alpha}\right]. \quad (7)$$



(a) $c=0.0$, $A/\omega=3.821\ 488\ 29$, $v=0.2$



(b) $c=0.0$, $A/\omega=5.918\ 478\ 26$, $v=0.2$



(c) $c=0.0$, $A/\omega=9.146\ 739\ 13$, $v=0.2$

图1 线性相互作用下($c=0$)隧穿率 $|a|^2$ 随扫描速度 α 的演化与(7)式拟合曲线

Fig 1 The tunneling probability $|a|^2$ as a function of the sweeping rate α and the fitting curves of using formula (7) under the linear interaction($c=0$)

由拟合结果发现，在高频周期调制场作用下隧穿率可以近似用下式表示

$$\Gamma_{lm} = \exp\left[-\frac{\pi(qv)^2}{2\alpha}\right], \quad (8)$$

其中 qv 为有效耦合系数($q < 1$ 为修正系数)。说明在线性相互作用下，加高频周期调制场相当于耦合系数 v 减小为有效耦合系数 qv 而不加周期调制场。

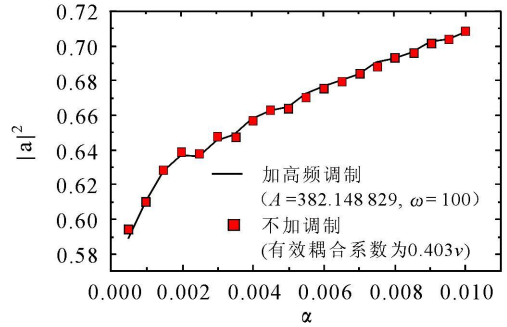
为了将以上结论推广到非线性相互作用的情况，用(1)式计算非线性相互作用($c \neq 0$)时隧穿率

$|a|^2$ 随扫描速度 α 的演化：

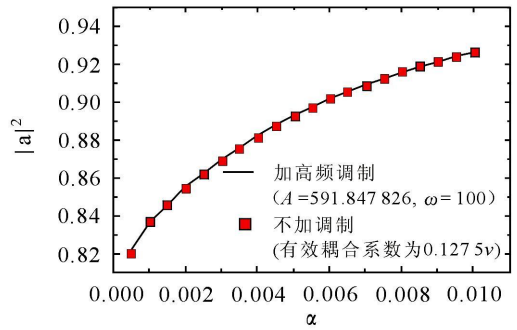
情形 1 能级差 $\gamma = \alpha + A \sin \omega t$ (加高频周期调制)，两能级耦合系数为 v ；

情形 2 能级差 $\gamma = \alpha$ (不加调制)，两能级耦合系数为有效耦合系数 qv (其中对于同一个 A/ω 值， qv 取值与线性相互作用下的相同)。

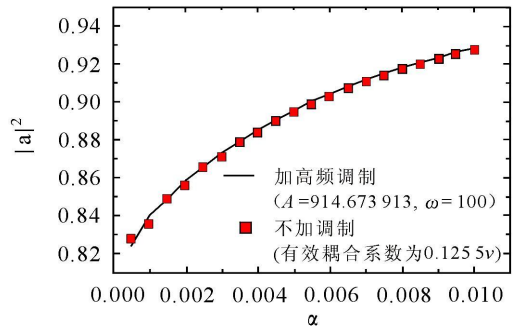
发现在这两种情形下得到的曲线重合，如图 2 所示。



(a) $c=0.5$, $A/\omega=3.821\ 488\ 29$, $v=0.2$



(b) $c=0.5$, $A/\omega=5.918\ 478\ 26$, $v=0.2$



(c) $c=0.5$, $A/\omega=9.146\ 739\ 13$, $v=0.2$

图2 非线性相互作用时($c \neq 0$)情形(1)与情形(2)下计算结果

Fig 2 The numerical results for case (1) and case (2) under nonlinear interaction ($c \neq 0$)

当 A/ω 取其他值时，经计算得到以上两种情形下的曲线也重合。因此得到如下结论：加高频周期调制场可以等价于耦合系数 v 减小为有效耦合系数 qv 而不加周期调制场，也即能级差为 $\gamma = \alpha +$

$A\sin\omega t$, 耦合系数为 v 的非线性两能级系统可以等价于能级差为 $\gamma=\alpha$ 而耦合系数为 qv 的非线性两能级系统. 这与理论分析所得结果一致, 并且由理论分析可知修正系数为 $q\left(\frac{A}{\omega}\right)=J_0\left(\frac{A}{\omega}\right)$ (为简单计, 由(7)式拟合计算时修正系数 q 都取正数, 所以图1和图2中的 q 全为正).

3 结论

本文对非线性两能级系统的能级差进行高频周期调制, 从理论分析与数值结果同时得出如下结论: 加高频周期调制场可以等价于两能级耦合系数 v 减小为有效耦合系数 $J_0\left(\frac{A}{\omega}\right)v$ 而不加周期调制场, 也即能级差为 $\gamma=\alpha+A\sin\omega t(\omega\gg v)$, 耦合系数为 v 的非线性两能级系统可以等价于能级差为 $\gamma=\alpha$ 而耦合系数为 $J_0\left(\frac{A}{\omega}\right)v$ 的非线性两能级系统.

参考文献:

[1] WANG Guan-fang, YE Di-fa, FU Li-bin, et al. Landau-Zener tunneling in a nonlinear three-level system[J]. *Phys Rev A*, 2006, **74**: 033414-1-7.

[2] GARANIN D A, SCHILLING R. Effects of nonlinear sweep in the Landau-Zener-Stueckelberg effect[J]. *Phys Rev B*, 2002, **66**: 174438-1-11.

[3] POKROVSKY V L, SINITSYN N A. Fast noise in the Landau-Zener theory [J]. *Phys Rev B*, 2003, **67**: 144303-1-11.

[4] DUAN Su-qing, FU Li-bin, LIU Jie, et al. Effects of periodic modulation on the Landau-Zener transition [J]. *Phys Lett A*, 2005, **346**: 315-320.

[5] WANG Guan-fang, FU Li-bin, LIU Jie. Periodic modulation effect on self-trapping of two weakly coupled Bose-Einstein condensates[J]. *Phys Rev A*,

2006, **73**: 013619-1-7.

[6] RAGHAVAN S, SMERZI A, FANTONI S, et al. Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates: Josephson effects, π oscillations, and macroscopic quantum self-trapping [J]. *Phys Rev A*, 1999, **59**: 620-633.

[7] SMERZI A, FANTONI S, GIOVANAZZI S, et al. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates [J]. *Phys Rev Lett*, 1997, **79**: 4950-4953.

[8] WU Biao, NIU Qian. Nonlinear Landau-Zener tunneling[J]. *Phys Rev A*, 2000, **61**: 023402-1-4.

[9] ZOBAY O, GARRWAY B M. Time-dependent tunneling of Bose-Einstein condensates[J]. *Phys Rev A*, 2000, **61**: 033603-1-7.

[10] LIU Jie, FU Li-bin, OU Bi-yiao, et al. Theory of nonlinear Landau-Zener tunneling [J]. *Phys Rev A*, 2002, **66**: 023404-1-7.

[11] LIU Jie, WU Biao, FU Li-bin, et al. Quantum step heights in hysteresis loops of molecular magnets [J]. *Phys Rev B*, 2002, **65**: 224401-1-6.

[12] ALBIEZ Michael, GATI et Rudolf, F?LLING Jonas, et al. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single Bosonic Josephson junction[J]. *Phys Rev Lett*, 2005, **95**: 010402-1-4.

[13] YOSUKE K, YOSHIHIKO M. Landau-Zener transitions in a level-crossing system with periodic modulations of the diagonal energy [J]. *Phys Rev A*, 2000, **62**: 061401-1-4.

[14] YOSUKE K. Role of phase coherence in the transition dynamics of a periodically driven two-level system [J]. *Phys Rev A*, 1994, **50**: 843-845.

[15] 王冠芳, 傅立斌, 赵 鸿, 等. 双势阱玻色-爱因斯坦凝聚体系的自俘获现象及其周期调制效应[J]. *物理学报*, 2005, **54**(11): 5003-5013.

(责任编辑 孙晓玲)