DOI:10.16783/j.cnki.nwnuz.2011.02.004

两个复化的Gauss-Legendre型求积公式及其误差分析

王晓霞，王治和

(西北师范大学 数学与信息科学学院，甘肃 兰州 730070)

摘　要：对两点和三点Gauss-Legendre公式进行复化，建立了两个新的数值积分公式，并分析了它们的积分误差和收敛阶. 数值例子表明，我们的方法是高效的.

关键词：数值积分；收敛阶；复化Gauss-Legendre公式；积分误差

中图分类号：O 241　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-988X(2011)02-0016-03

Two composite Gauss-Legendre formulae and their errors analysis

WANG Xiao-xia，WANG Zhi-he

(College of Mathematics and Information Science，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，Gansu，China)

Abstract：Two numerical integration rules are constructed by compositing the two-point and three-point Gauss-Legendre formulae，and integral errors and convergence order are also analyzed. Examples show that our methods are efficient.

Key words：numerical integration；convergence order；composite Gauss-Legendre formulae；integral error

数值积分是计算数学的基本内容，在工程技术和科学计算中起着十分重要的作用. 数值积分方法常见于文献[1]，它常常利用机械求积[2]来实现，其基本思想是：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \tag{1}$$

其中 $A_k \geqslant 0$ 和 $x_k \in [a,b]$ 称为求积系数和求积节点，$k=0,1,\cdots,n$. 著名的Newton-Cot's方法就是在节点确定时利用插值多项式的积分建立起来的一类方法. 对节点和系数都使用待定法使代数精度达到最高阶的一类方法是Gauss型公式，常见的有Gauss-Legendre公式、Gauss-Chebyshev公式等.

对于Gauss型求积公式，近年来在理论和应用方面多有研究[3-5]. 2007年，曹丽华[4]基于被积函数在第一类和第二类 n 次Chebyshev多项式的零点处的差商，构造了两种Gauss型求积公式. 2008年，周志强[5]构造了一种有理插值型求积公式($\mathrm{RIQF_S}$)，并证明了其收敛性.

本文对两点Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \tag{2}$$

和三点Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) \tag{3}$$

进行推广和复化，得到了两个新的数值积分公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{3}h}{6}\right)+f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}h}{6}\right)\right) \tag{4}$$

和

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{5}{9}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{15}h}{10}\right)+\frac{8}{9}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)+\frac{5}{9}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{15}h}{10}\right)\right). \tag{5}$$

收稿日期：2010-10-25；**修改稿收到日期**：2010-12-23

作者简介：王晓霞(1978—)，女，甘肃会宁人，讲师. 主要研究方向为数据库技术及其应用.
E-mail：wxxlct@nwnu.edu.cn

同时，我们研究公式(4)和(5)的积分误差和收敛阶. 数值例子表明，我们构造的方法是高效的.

1 预备知识

1.1 收敛阶

定义 1[6] 设 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$I_n$ 是一种复化求积公式，如果当 $h\to 0$ 时，

$$\lim_{h\to 0}\frac{I-I_n}{h^p}=C,\ C\neq 0, \tag{6}$$

则称求积公式 I_n 是 p 阶收敛的.

例如，复化的 Trapezoid 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_i)+f(x_{i+1}))$$

和复化的 Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1}))$$

分别具有二阶和四阶收敛性.

1.2 Gauss-Legendre 型求积公式

Guass 型求积公式是具有最高代数精度的插值求积公式. 通过适当选取求积公式(1)的节点 $x_k\in[a,b]$ 和求积系数 $A_k\geqslant 0,k=0,1,\cdots,n$，可使其代数精度达到最高的 $2n+1$ 次. 利用特殊区间 $[-1,1]$ 上 $n+1$ 次 Legendre 正交多项式的根做节点，我们可以建立 Gauss-Legendre 型求积公式.

引理 1[6] 对于 Gauss 型求积公式(1)，其余项为

$$E(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=\int_a^b\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega^2(x)\mathrm{d}x,\ \xi\in[a,b], \tag{7}$$

其中 $\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$，$x_i$ 为 Gauss 点.

特别地，当 $n=1$ 时，公式(1)为两点 Gauss-Legendre 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}\left(f\left(k\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)+f\left(k\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right),$$

其中 $k(t)=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$，其余项为

$$E(f)=\int_a^b\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(x-k\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)^2\times\left(x-k\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)^2\mathrm{d}x,\ \xi\in[a,b].$$

当 $n=2$ 时，公式(1)为三点 Gauss-Legendre 公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}\ \frac{5}{9}f\left(k\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right)+\frac{8}{9}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{5}{9}f\left(k\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right),$$

其余项为

$$E(f)=\int_a^b\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\left(x-k\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right)^2\times\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\left(x-k\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right)^2\mathrm{d}x,\ \xi\in[a,b].$$

2 两个复化公式及其误差分析

2.1 复化三点 Gauss-Legendre 公式及其误差

定理 1 设 $f(x)\in C(6)[a,b],h=\frac{b-a}{n}$，则复化三点 Gauss-Legendre 公式(5)的余项表达式为

$$E(f)=\frac{(b-a)h^6}{2^6\times 31500}f^{(6)}(\xi),\ \xi\in[a,b], \tag{8}$$

该方法具有六阶收敛性.

证明 首先求出三点 Gauss-Legendre 公式的离散误差. 由引理 1，

$$E(g)=\int_{-1}^{1}g(t)\mathrm{d}t-\left(\frac{5}{9}g\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right)+\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}g\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)=cg^{(6)}(\xi),\ \xi\in[-1,1].$$

令 $g(t)=t^6$，由于

$$g^{(6)}(t)=720,\int_{-1}^{1}t^6\mathrm{d}t=\frac{2}{7},$$

$$I(t^6)=\frac{5}{9}\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^6+\frac{5}{9}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^6=\frac{6}{25},$$

因此

$$E(t^6)=\int_{-1}^{1}t^6\mathrm{d}t-I(t^6)=\frac{2}{7}-\frac{6}{25}=720c.$$

所以 $c=\frac{1}{15750}$，故三点 Gauss-Legendre 公式的离散误差为

$$E(g)=\frac{1}{15750}g^{(6)}(\xi),\ \xi\in[-1,1]. \tag{9}$$

现在分析复化三点 Gauss-Legendre 公式及其误差，首先

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$是关于$[a,b]$的等距分划.

其次，令 $x(t)=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+\frac{h}{2}t$，$x_{i+\frac{1}{2}}=$

$\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$，则

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}t\right)\mathrm{d}t.$$

再利用三点 Gauss-Legendre 公式及其误差表示(9)，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}t\right)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{5}{9}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{3}h}{2\sqrt{5}}\right)+\frac{8}{9}f(x_{i+\frac{1}{2}})+\frac{5}{9}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}h}{2\sqrt{5}}\right)+\frac{h^6}{2^6\times 15750}f^{(6)}(\xi_i)\right]=$$

$$\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{5}{9}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{3}h}{2\sqrt{5}}\right)+\frac{8}{9}f(x_{i+\frac{1}{2}})+\frac{5}{9}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}h}{2\sqrt{5}}\right)\right]+\frac{h^7}{2^7}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{15750}f^{(6)}(\xi_i)=$$

$$\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{5}{9}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{3}h}{2\sqrt{5}}\right)+\frac{8}{9}f(x_{i+\frac{1}{2}})+\frac{5}{9}f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}h}{2\sqrt{5}}\right)\right]+\frac{(b-a)h^6}{2^6\times 31500}f^{(6)}(\xi_i),$$

其中 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$，$\xi\in[a,b]$.

因此复化三点 Gauss-Legendre 公式(5)的余项表达式为

$$E(f)=\frac{(b-a)h^6}{2^6\times 31500}f^{(6)}(\xi),\ \xi\in[a,b].$$

由

$$\lim_{h\to 0}\frac{I-I_n}{h^6}=\frac{(b-a)}{2^6\times 31500}f^{(6)}(\xi)$$

知该方法是六阶收敛的. 】

2.2 复化两点 Gauss-Legendre 公式及其误差

定理 2 设 $f(x)\in C^{(4)}[a,b]$，$h=\frac{b-a}{n}$，则复化两点 Gauss-Legendre 公式(4)的余项表达式为

$$E(f)=\frac{(b-a)h^6}{2^4\times 270}f^{(4)}(\xi),\ \xi\in[a,b]. \tag{10}$$

该方法是四阶收敛的.

3 数值例子

例 1 考虑定积分

$$\int_0^2 x^5\mathrm{d}x. \tag{11}$$

其准确解为 $\frac{64}{6}=10.66666666\cdots$.

运用复化梯形公式(CTF)，复化 Simpson 公式(CSF)及复化两点和三点 Gauss-Legendre 公式($n=2$)计算的结果及误差见表 1.

表 1 4 种求积公式的数值解及绝对误差

Tab 1 Nemerical solution and its absolute error of (11) from 4 kinds of integral formulae

方法	数值解	绝对误差限
复化梯形公式	16.50000000	5.83333333
复化 Simpson 公式	10.75000000	0.08333333
复化两点 Gauss-Legendre 公式	10.61111111	0.05555555
复化三点 Gauss-Legendre 公式	10.66666666	0.00000000

例 2 考虑积分

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x. \tag{12}$$

其准确解为 0.74684204….

运用复化梯形公式(CTF)，复化 Simpson 公式(CSF)，两点和三点 Gauss-Legendre 公式及其复化公式(4)，(5)($n=2$)计算的结果及误差见表 2.

表 2 6 种求积公式得到的数值解及绝对误差

Tab 2 Nemerical solution and its absolute error of (11) from 6 kinds of integral formulae

方法	数值解	绝对误差限
复化梯形公式	0.73137025	0.01547179
复化 Simpson 公式	0.74685538	0.00001334
两点 Gauss-Legendre 公式	0.74658756	0.00023657
三点 Gauss-Legendre 公式	0.74681458	0.00000996
复化两点 Gauss-Legendre 公式	0.74680332	0.00001960
复化三点 Gauss-Legendre 公式	0.74682409	0.00000005

通过数值例子看到，与复化梯形公式，复化 Simpson 公式及两点和三点 Gauss-Legendre 公式相比，我们构造的方法在精度方面有显著的改善.

参考文献：

[1] DAVIS P J, RABINOWITZ P. *Methods of Numerical Integration* [M]. New York: Academic Press, 1984.

[2] 李庆扬，王能超，易大义. **数值分析**[M]. 北京：清华大学出版社，Springer 出版社，2003：165-200.

[3] 刘彬清. 一类高斯数值求积公式的极限性质[J]. **工程数学学报**，2003，**14**(4)：137-139.

[4] 曹丽华. 一类广义 Gauss 型求积公式[J]. **数学物理学报**，2007，**27A**(3)：524-534.

[5] 周志强. 一种 Gauss 型求积公式的收敛性[J]. **纯粹数学与应用数学**，2008，**24**(3)：521-524.

[6] RICHARD L B, DOUGLAS J. *Numericl Aanalyisis* [M]. New York: Thomson Learning Inc, 2001.

(责任编辑 马宇鸿)