让数学思维更加舒展:从数方块的视角来审视

张定强　胡俊林　李　英

(西北师范大学教育学院　730070)

1 问题的导出

由王建磐主编,华东师范大学出版的义务教育课程标准实验教科书数学初中一年级(七年级)(上)中的第一章:走进丰富的数学世界,"跟我学"中有如下一道题:

在图 1 所示的 3×3 的方格图案中有多少个正方形呢?[1]

书中建议学生先设计一个解题计划,在对正方形的边长进行分类的基础上,把包含边长为 1、2、3 的三类正方形的个数相加就是图 1 中正方形的总数.

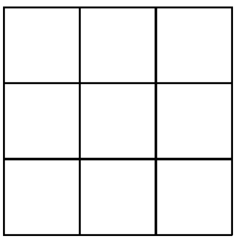

图 1

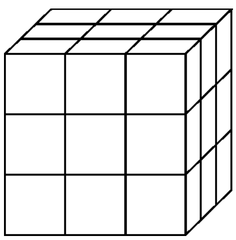

图 2

此问题的精妙之处在于能快速的将学生带入丰富的数学世界,初步感知数学发现的基本路径:归纳、类比;诱发学生进行更为深入的追问与探究.下面从不同的维度与方向提出一些值得思索的问题.

问题 1　将图 1 中的 3×3 的情形拓展到 $n\times n$ 的图形中,正方形的总数是多少?长方形的总数又是多少?对 $m\times n$ 的图形而言,正方形与长方形的总数又是多少?

问题 2　类似上述问题,图 2 中的 $3\times3\times3$ 立体图形,立方体的总数是多少?长方体的总数又是多少?将此问题进行拓展,在 $n\times n\times n$、$l\times m\times n$ 的图形中,立方体、长方体的总数又是多少?

其实,此问题还可以不断深化,进入到 4 维、5 维、…等高维空间中去探索方块的总数问题.我们将另文加以研究.

2　思维的舒展

受华师版教科书中归纳出的方法启示,可以让学生以表格的形式将其总数呈现出.这种方式直观易懂,易于发现规律,正如在分割问题的研讨中,波利亚就是用表格的方式发现了点分割线、线分割面、面分割体的内在关联.下表 1 是问题 1 的第一部分的参考答案.

表 1　平面基本图中所含图形的总数表

图形的总数 / 基本图	正方形的总数	长方形的总数
2×2	1^2+2^2	1^3+2^3
3×3	$1^2+2^2+3^2$	$1^3+2^3+3^3$
……	……	……
$n\times n$	$1^2+2^2+\cdots+n^2$	$1^3+2^3+\cdots+n^3$

这个答案是通过归纳法得出的.通过对基本图 2×2、3×3 中正方形与长方形总数的计数就可以发现上述规律.如对图 1 中,假定小正方形的边长是 1,那么此基本图中边长为 1 的正方形共有 $9=3^2$ 个,边长为 2 的正方形共有 $4=2^2$ 个,而边长为 3 的正方形有 $1=1^2$ 个,此基本图中共有 $1^2+2^2+3^2$ 个正方形;同样可得出此基本图中长方形的个数(正方形视为特殊的长方形),除了 $1^2+2^2+3^2$ 个特殊长方形,还有边长为 1、2 的长方形 12 个,边长 2、3 的长方形 4 个,边长 1、3 的长方式形 6 个,共有 $(1+2+3)^2=1^2+2^2+3^2+2\times1\times2+2\times2\times3+2\times1\times3=1^3+2^3+3^3$ 个长方形.对于基本图 $n\times n$ 而言,猜想也有如此的规律.

从上表中容易发现:在 $n\times n$ 的图形中,正方形的总数是自然数 1 到 n 的平方之和;长方形的总数是自然数 1 到 n 的立方之和.

需要说明的是长方形的总数满足 $(1+2+\cdots$

$+n)^2=1^3+2^3+\cdots+n^3$ 公式,而对完全平方公式打开,发现如 $2\times1\times2$ 项恰好是边长 n、$(n-1)$的长方形数,这个发现对后面的讨论十分重要.

在数 $n\times n\times n$ 图形中立方体总数的过程中我们同样发现有这样一种和谐的规律:$n\times n\times n$ 图形中立方体的总数恰好也是自然数 1 到 n 的立方之和.

如图 2 对 $3\times3\times3$ 立体图形而言,假定小立方体的边长为 1,显然整个图 2 是由边长为 1 的 $27=3^3$ 个小立方体构成的,其基本图中边长为 2 的正方体有 $8=2^3$ 个,边长为 3 的立方体有 $1=1^3$,此图中共有立方体的总数是:$1^3+2^3+3^3$. 与上表 1 中,$n\times n$ 的图形中所含长方形的总数一致.

由此,自然就联想到 $n\times n\times n$ 图形中长方体的总数规律可能是:自然数 1 到 n 的 4 次方之和. 可是经过验证,发现结果不是这样. 只须对 $2\times2\times2$ 的图形中数一下长方体的总数,就会发现这个图形中长方体的总数是 27,而不是猜想的 17,那么到底结果是多少呢?

我们以 $3\times3\times3$ 为例加以探索:除了边长为 1、2、3 的正方体外,长方体的类型还有:(112)型,意思是说边长分别是 1、1、2 的一类长方体(下文中出现类似的标注意思一致),这种图形在 $3\times3\times3$ 图形中的个数是 54 个;同样,我们可以数出 $3\times3\times3$ 图形中其它 6 种类型的个数加以统计,有:(113)型,长方体的个数是 27;(122)型,长方体的个数是 36;(133)型,长方体的个数是 9;(123)型,长方体的个数是 36;(223)型,长方体的个数是 12;(233)型,长方体的个数是 6.

加上 3 种类型的正方体的个数,共 10 种类型的长方体(正方体可视做特殊的长方体),那么,在 $3\times3\times3$ 的图形中,总共长方体的总数是:

$$1+8+27+6+12+9+27+36+54+36=216$$

这些数据的规律特别像:

$(1+2+3)^3=1^3+2^3+3^3+\cdots$ 的展开式. 展开分析发现确实有这个规律:

$$(1+2+3)^3=1^3+2^3+3^3+3\times1^2\times2+3\times1\times2^2+3\times1^2\times3+3\times1\times3^2+3\times2^2\times3+3\times2\times3^2+6\times1\times2\times3$$

$$=1+8+27+6+12+9+27+36+54+36.$$

这种美妙和谐的一致性确实令人惊讶. 为此可得出如下一个猜想表:

表 2　空间基本图中所含图形的个数表

图形的总数 / 基本图	正方体的总数	长方体的总数
$2\times2\times2$	1^3+2^3	$(1+2)^3$
$3\times3\times3$	$1^3+2^3+3^3$	$(1+2+3)^3$
……	……	……
$n\times n\times n$	$1^3+2^3+\cdots+n^3$	$(1+2+3+\cdots+n)^3$

其实我们只是初步尝试了基本图形中比较特殊情况的讨论,对于一般情形,如 $m\times n$、$l\times m\times n$ 图形中所含图形的总数问题并没有讨论,而且得出的结论也没有进行证明,只是一些猜想,这些猜想大多数是笔者在课堂上与学生共同生发出的一些想法而已. 学生生发出的这些珍贵的想法是思维舒展的表现,是思维进入数学领域的一种尝试,经历了实际操作、观察特例、大胆猜测、探求一般结论的过程,[2]领悟了归纳、类比的美妙之处,特别在尝试、纠错的过程中训练了学生思维的缜密性、发散性以及促进学生追求思维和谐性、统一性、共鸣性,进而通过这样一种思维之旅让学生体会感受到了数学的美.

3　三点感悟

3.1　多方位探索给思维舒展拓宽路径

在看似平常的、不起眼的小问题中从不同的角度、方位进行挖掘、分析、思考就可以使教学达到一个新的高度,不断的开发、激活学生的数学思维空间. 尤其是在探索中不断的创新,大胆尝试,就会得出许多使人意想不到的结果. 虽然思维拓展的过程并非一帆风顺,会出现很多困惑,但这种困惑是有意义、有价值的,它引发了思考、激起了关注、启示引导学生体验并感受精细化、深度化的思维真谛,感受从小问题得出一般的结论的成功喜悦.

3.2　多方法尝试给思维舒展指明方向

简单的数个数看似意义不大,但实际一操作,发现里面学问也不少. 如何数出水平、数出品味、数出智慧、数出能力是值得回味的问题,最值得反思的是在教学中如何把发现和话语权交给学生,更加深度的引发学生去探索. 就上面的基本图中

(下转第 35 页)

天，占当月天数的$\frac{14}{15}$. 说明该市空气质量基本良好.

(2)轻微污染有 2 天，占当月天数的$\frac{1}{15}$. 污染指数在 80 以上的接近轻微污染的天数有 15 天，加上处于轻微污染的天数，共有 17 天，占当月天数的$\frac{17}{30}$，超过 50％，说明该市空气质量有待进一步改善.

从茎叶图角度来看，本题可以改编成为：

某市 2010 年 4 月 1 日—4 月 30 日对空气污染指数的监测数据的茎叶图如下（主要污染物为可吸入颗粒物）：

4	9　5
5	6
6	1　7　4
7	6　0　5　7　9　5　1
8	1　1　8　6　1　3　2　2　6　5
9	1　2　1　5　1
10	1　3

根据国家标准，污染指数在 0～50 之间时，空气质量为优：在 51～100 之间时，为良；在 101～150 之间时，为轻微污染；在 151～200 之间时，为轻度污染，请你跟上面的数据及标准判断下例说法正确的是①④（写出所有序号）.

①该市一个月中空气污染指数有 2 天处于优的水平，占当月天数的$\frac{1}{15}$

②该市一个月中空气污染指数处于优或良的天数占当月天数的$\frac{13}{15}$

③该市一个月中空气污染指数表明该市轻微污染天数没有超过 50％；

④该市空气质量基本良好，并有待进一步改善.

根据以上的分析，我们不难看出，数学教育要培养学生提出问题、思考问题、解决问题的习惯. 一个“好”的问题，是对课程内容及其思想方法的深入理解和掌握有帮助的问题，是学习中自然产生的问题[1]. 随着教师对新课程标准的解读慢慢深入，我们提出的问题也就带有一定的思考性，而目前高考对于统计的考查是一个热点，但是往往我们对于统计这部分知识总局限于大量的计算上，对统计学的本质总觉得考查起来捉襟见肘，而海淀这道题目的出现为我们的统计学的教学打开了一扇窗，由此看来题目不在大小，能考查这一知识所渗透的思想则就是一道难得的好题.

参考文献

1　严士健，张奠宙，王尚志. 数学课程标准解读. 江苏教育出版社，2004，4：107，16

2　2010 年全国各省市高考试卷汇总及详解. 光明日报出版社，2010，9

（上接第 31 页）

数所含图形的问题初看似乎没有规律，但认真梳理确发现蕴藏着很好的规律，只有勇于探索、善于联想、执着努力，就一定会有结果的、会发现规律及规律后所隐藏的数学方法与思想.

3.3　多联想体会让思维舒展增添喜悦

提供一种好的问题切入口，给思维留下足够的时间、空间，调动记忆、联想、想象，把思维激活、开放，就能实现优化数学思维的目的. 不断的拓展问题空间，就能把思维升华到一个新的天地，就像上面的数方块问题，如果放在超维空间中思考，可能会有许多更加惊人的发现. 既然超维空间的存在是不争的事实，那么作为一种空间，肯定有其图形存在，那么超立方块、超长方块的个数又如何去数呢？探索还须不断进行，思维会不断舒展，快乐与成功就会不断生成.

参考文献

1　王建磐主编. 义务教育课程标准实验教科书数学初中一年级（七年级）（上）[M]. 上海：华东师范大学出版社，2005，9

2　王尚志等编著. 理解与实践高中数学新课程—与高中数学教师的对话[M]. 北京：高等教育出版社，2007，12