DOI：10.16783/j.cnki.nwnuz.2020.02.007

Gorenstein n-平坦模

张翠萍，薛秀霞
（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州　730070）

摘要：设 R 是右 n-凝聚环．引入 Gorenstein n-平坦模的概念，给出这类模的一些等价刻画，证明了如果 Gorenstein n-平坦模关于扩张封闭，则任意左 R-模都有 Gorenstein n-平坦覆盖．

关键词：Gorenstein n-平坦模；余挠对；(预)覆盖；(预)包络
中图分类号：O 153.3　　文献标志码：A　　文章编号：1001-988X(2020)02-0029-05

Gorenstein n-flat modules

ZHANG Cui-ping，XUE Xiu-xia
(College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，Gansu，China)

Abstract：Let R be a right n-coherent ring. The notion of Gorenstein n-flat modules is introduced，and some equivalent characterizations of the class of Gorenstein n-flat left R-modules are presented. It is proved that all left modules have Gorenstein n-flat covers if the class of Gorenstein n-flat left R-modules is closed under extensions.

Key words：Gorenstein n-flat modules；cotorsion pairs；(pre)covers；(pre)envelopes

0　引言

自从 Enochs 等[1-3]引入和研究了 Gorenstein-平坦模(关于 Gorenstein-平坦模的更多研究见文献[4-7])以来，许多学者对这类模做了各种推广，例如 Bravo 等[8]引入了 Gorenstein AC-平坦模的概念，Estrada 等[9]定义并研究了 Gorenstein B-平坦模，其中 B 是右 R-模类．

2004 年，Enochs 等[10]证明了右凝聚环上的 Gorenstein-平坦左 R-模和它的右正交类构成了完全遗传余挠对，进而得到每个左 R-模都有 Gorenstein-平坦覆盖；2012 年，Yang 等[11]证明了如果 Gorenstein-平坦模关于扩张封闭，则这类模与它的右正交类构成了完全遗传余挠对；2018 年 Šaroch 等[12]证明了在任意环上 Gorenstein-平坦模对扩张封闭，从而任意环上 Gorenstein-平坦模与它的右正交类构成了完全遗传余挠对．

2002 年，Lee 等[13]引入了右 n-凝聚环、n-平坦模及 n-FP-内射模，并证明了右 n-凝聚环的许多性质类似于右凝聚环的性质．

受以上思想启发，文中引入了 Gorenstein n-平坦模的概念并研究了这类模的同调性质．文中首先给出 Gorenstein n-平坦模的一些等价刻画，然后证明 Gorenstein n-平坦模类关于直和项和正向极限封闭，进一步证明 Gorenstein n-平坦模类及其右正交类形成完全遗传余挠对．

1　预备知识

定义 1[13]　设 n 是正整数或 ∞，R 是环．称 R 是右 n-凝聚环，如果投射维数小于等于 $n-1$ 的任意自由右 R-模的所有有限生成子模是有限表示的．

收稿日期：2019-07-15；修改稿收到日期：2019-11-14
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11361051)
作者简介：张翠萍（1974—），女，甘肃武威人，副教授，博士，硕士研究生导师．主要研究方向为环的同调代数．
E-mail：zhangcp@nwnu.edu.cn

定义 2[13] 设 n 是正整数,F 是左 R-模. 称 F 是 n-平坦模,如果对所有投射维数小于等于有 n 的有限表示右 R-模 N,有 $\mathrm{Tor}_1^R(N,F)=0$.

引理 1 设 R 是右 n-凝聚环,N 是投射维数小于等于有 n 的有限表示右 R-模,则对任意 n-平坦左 R-模 F,有 $\mathrm{Tor}_i^R(N,F)=0$,其中整数 $i\geqslant 1$.

证明 因为 R 是右 n-凝聚环,所以存在正合序列

$$0\to P_n\to\cdots\to P_1\to P_0\to N\to 0,$$

其中 P_i 是有限生成投射模,从而由维数转移理论易得结论. 】

定义 3[14] 设 $\mathcal{X}$ 是左 R-模的类. 称 $\mathcal{X}$ 是投射可解的,如果 $\mathcal{X}$ 满足以下条件:

(1)$\mathcal{X}$ 包含所有投射左 R-模;

(2)对任意左 R-模的短正合列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$,若 $A''\in\mathcal{X}$,则 $A\in\mathcal{X}$ 当且仅当 $A'\in\mathcal{X}$.

对偶地,可以定义内射可解模类.

设 $\mathcal{X}$ 是左 R-模的类,M 是左 R-模. 称同态 $f:X\to M$ 是 $\mathcal{X}$-预覆盖,如果 $X\in\mathcal{X}$ 且对任意的 $X'\in\mathcal{X}$,同态 $\mathrm{Hom}_R(X',f):\mathrm{Hom}_R(X',X)\to\mathrm{Hom}_R(X',M)$ 是满同态. 称 $\mathcal{X}$-预覆盖 $f:X\to M$ 是 $\mathcal{X}$-覆盖,如果任意自同态 $g:X\to X$ 满足 $fg=f$,则 g 是同构.

对偶地,可定义 $\mathcal{X}$-预包络和包络.

用 $\mathcal{X}^{\perp}$ 表示 $\mathcal{X}$ 的右正交类,用 ${}^{\perp}\mathcal{X}$ 表示 $\mathcal{X}$ 的左正交类,则

$$\mathcal{X}^{\perp}=\{Y\in R\text{-模}\mid \mathrm{Ext}_R^1(X,Y)=0,\ \forall X\in\mathcal{X}\},$$
$${}^{\perp}\mathcal{X}=\{Y\in R\text{-模}\mid \mathrm{Ext}_R^1(Y,X)=0,\ \forall X\in\mathcal{X}\}.$$

称左 R-模类的对子 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是余挠对,如果 $\mathcal{A}^{\perp}=\mathcal{B}$,且 ${}^{\perp}\mathcal{B}=\mathcal{A}$. 称余挠对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是完备的,如果对任意左 R-模 X,存在短正合列 $0\to X\to B\to A\to 0$ 和短正合列 $0\to B'\to A'\to X\to 0$,其中 $A,A'\in\mathcal{A}$ 且 $B,B'\in\mathcal{B}$. 称余挠对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是完全的,如果任意模都存在 $\mathcal{A}$-覆盖和 $\mathcal{B}$-包络.

定义 4 称余挠对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是遗传的,如果下列等价说法中的其中一个成立:

(1)$\mathcal{A}$ 是可解模类,即 $\mathcal{A}$ 关于满同态的核封闭;

(2)$\mathcal{B}$ 是余可解模类,即 $\mathcal{B}$ 关于单同态的余核封闭;

(3)对任意的 $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$ 及任意的整数 $i\geqslant 1$,有 $\mathrm{Ext}_R^i(A,B)=0$.

2 Gorenstein n-平坦模

定义 5 称左 R-模 M 是 Gorenstein n-平坦模,如果存在 n-平坦模的正合序列

$$\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(F_0\to F^0)$ 且对任意投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模 N,有 $N\otimes_R-$正合.

显然,n-平坦模是 Gorenstein n-平坦模,Gorenstein n-平坦模关于直和封闭.

记 $\mathcal{F}^n$ 为 n-平坦模,$\mathcal{GF}^n$ 为 Gorenstein n-平坦模,文中的环均指右 n-凝聚环.

命题 1 设 R 是环,M 是左 R-模,则下列结论等价:

(1)M 是 Gorenstein n-平坦模;

(2)对任意投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模 N,有

(i)$\mathrm{Tor}_i^R(N,M)=0$,其中整数 $i\geqslant 1$;

(ii)存在左 R-模的正合序列 $0\to M\to F^0\to F^1\to F^2\to\cdots$,使得 $N\otimes_R-$正合,其中 F^i 是 n-平坦模;

(3)存在左 R-模的短正合列 $0\to M\to F\to G\to 0$,其中 F 是 n-平坦模,G 是 Gorenstein n-平坦模.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2). 由 Gorenstein n-平坦模的定义和引理 1 可得.

(2)$\Longrightarrow$(1). 取 M 的平坦分解易得结论.

(1)$\Longrightarrow$(3). 显然.

(3)$\Longrightarrow$(2). 设 N 是投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模,$0\to M\to F\to G\to 0$ 是左 R-模的短正合列,其中 F 是 n-平坦模,G 是 Gorenstein n-平坦模. 因为 G 是 Gorenstein n-平坦模,由(1)$\Longrightarrow$(2)可得 $\mathrm{Tor}_i^R(N,G)=0\ (i\geqslant 1)$. 由长正合列引理

$$\mathrm{Tor}_{i+1}^R(N,G)\to\mathrm{Tor}_i^R(N,M)\to\mathrm{Tor}_i^R(N,F)$$

和引理 1 可得 $\mathrm{Tor}_i^R(N,M)=0\,(i\geqslant 1)$,并且有 $0\to N\otimes M\to N\otimes F\to N\otimes G\to 0$ 正合.

另一方面,因为 G 是 Gorenstein n-平坦模,所以存在正合列

$$0\to G\to F^0\to F^1\to F^2\to\cdots,$$

使得 $N\otimes_R-$正合,其中 F^i 是 n-平坦模 $(i\geqslant 0)$. 从而有正合序列

$$0\to M\to F\to F^0\to F^1\to F^2\to\cdots,$$

使得 $N\otimes_R-$正合. 】

命题 2 设 $0\to M\to L\to H\to 0$ 是左 R-模的短正合列. 如果 $H\in\mathrm{F}^n, M\in\mathrm{GF}^n$，那么 $L\in\mathrm{GF}^n$.

证明 因为 $M\in\mathrm{GF}^n$，所以存在左 R-模的短正合列 $0\to M\to X\to G\to 0$，其中 $X\in\mathrm{F}^n, G\in\mathrm{GF}^n$. 考虑以下推出图：

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] & 0 \\
& G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为 $H, X\in\mathrm{F}^n$，所以 $W\in\mathrm{F}^n$，故由第二列及命题 1 知 $L\in\mathrm{GF}^n$. 】

引理 2 设 R 是环，则以下结论等价：

（1） Gorenstein n-平坦模类关于扩张封闭；

（2） Gorenstein n-平坦模类是投射可解类；

（3） 对任意左 R-模的短正合列 $0\to G_1\to G_0\to M\to 0$，$G_1, G_0$ 是 Gorenstein n-平坦模. 如果对任意投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模 N，有 $\mathrm{Tor}_1^R(N,M)=0$，那么 M 是 Gorenstein n-平坦模.

证明 （2）$\Longrightarrow$（1）. 显然.

（1）$\Longrightarrow$（2）. 只需证 GF^n 关于满同态的核封闭. 假设存在短正合列

$$0\to M\to L\to H\to 0,$$

其中 $L, H\in\mathrm{GF}^n$，下证 $M\in\mathrm{GF}^n$. 因为 $L\in\mathrm{GF}^n$，所以存在短正合列

$$0\to L\to F\to V\to 0,$$

其中 $F\in\mathrm{F}^n, V\in\mathrm{GF}^n$. 考虑以下推出图：

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & L \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & V \arrow[r, equal] \arrow[d] & V \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 GF^n 关于扩张封闭，所以 $U\in\mathrm{GF}^n$. 由推出图的第二行及命题 1 可得 $M\in\mathrm{GF}^n$.

（1）$\Longrightarrow$（3）. 设 $0\to G_1\to G_0\to M\to 0$ 是左 R-模的短正合列，其中 $G_1, G_0\in\mathrm{GF}^n$. 因此存在短正合列 $0\to G_1\to F\to H\to 0$，其中 $F\in\mathrm{F}^n, H\in\mathrm{GF}^n$. 考虑以下推出图：

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
& H \arrow[r, equal] \arrow[d] & H \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为 $G_0, H\in\mathrm{GF}^n$，故 $U\in\mathrm{GF}^n$. 因此存在短正合列 $0\to U\to X\to G\to 0$，其中 $X\in\mathrm{F}^n, G\in\mathrm{GF}^n$. 故可得以下推出图：

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

下证 $V\in\mathrm{F}^n$. 考虑推出图的第三列 $0\to M\to V\to G\to 0$. 因为 $G\in\mathrm{GF}^n$，并且对任意投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模 N，有 $\mathrm{Tor}_1^R(N,M)=0$，所以有 $\mathrm{Tor}_1^R(N,V)=0$. 故 $V\in\mathrm{F}^n$，因此 $M\in\mathrm{GF}^n$.

（3）$\Longrightarrow$（1）. 假设存在短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$，其中 $A, C\in\mathrm{GF}^n$. 下证 $B\in\mathrm{GF}^n$. 因为 $A, C\in\mathrm{GF}^n$，所以 $\mathrm{Tor}_1^R(N,A)=0, \mathrm{Tor}_1^R(N,C)=0$，故 $\mathrm{Tor}_1^R(N,B)=0$. 又因为 $C\in\mathrm{GF}^n$，所以存在短正合列 $0\to G\to F\to C\to 0$，其中 $F\in\mathrm{F}^n, G\in\mathrm{GF}^n$. 考虑以下拉回图：

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 $A\in\mathrm{GF}^n$，所以存在短正合列 $0\to A\to X\to H\to 0$，其中 $X\in\mathrm{F}^n, H\in\mathrm{GF}^n$，于是有以下推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] & 0 \\
 & H \arrow[r, equal] \arrow[d] & H \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为 $X, F\in\mathrm{F}^n$，所以 $L\in\mathrm{F}^n$. 在推出图的第二列 $0\to M\to L\to H\to 0$ 中，因为 $H\in\mathrm{GF}^n$，所以 $M\in\mathrm{GF}^n$. 在正合列 $0\to G\to M\to B\to 0$ 中，因为 G, $M\in\mathrm{GF}^n$, $\mathrm{Tor}_1^R(N,B)=0$，所以由(3)可得 $B\in\mathrm{GF}^n$. 】

推论 1　若 Gorenstein n-平坦模关于扩张封闭，则 Gorenstein n-平坦模关于直和项封闭.

证明　由引理 2 和文献[14]命题 1.4 即可证明结论. 】

引理 3　若 Gorenstein n-平坦模关于扩张封闭，则 Gorenstein n-平坦模关于正向极限封闭.

证明　由文献[15]命题 2.3 可知，只需证 Gorenstein n-平坦模关于良序集上的正向极限封闭即可. 设 $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 是 Gorenstein n-平坦模在良序集上的正向系统. 若 $\lambda=n<\omega$，则 $\varinjlim M_\alpha=M_{n-1}$.

设 $\lambda=\omega$. 下证 $\varinjlim M_n\ (n<\omega)$ 是 Gorenstein n-平坦模. 因为 M_0 是 Gorenstein n-平坦模，所以存在正合列

$$A(0):0\to M_0\to F_0^0\to F_0^1\to F_0^2\to\cdots,$$

其中 F_0^i 是 n-平坦模($i\geqslant 0$)，使得对任意投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模 N，有 $N\otimes_R$-正合，且对任意整数 $i\geqslant 0$，$K_0^i=\mathrm{Ker}(F_0^i\to F_0^{i+1})$ 是 Gorenstein n-平坦模($K_0^0=M_0$).

考虑同态 $M_0\to F_0^0$ 和同态 $M_0\to M_1$ 的如下推出图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & U \arrow[r] & K_0^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 M_1 和 K_0^1 是 Gorenstein n-平坦模，所以 U 是 Gorenstein n-平坦模，于是存在短正合列

$$0\to U\to F_1^0\to L\to 0,$$

其中 F_1^0 是 n-平坦模，L 是 Gorenstein n-平坦模.

考虑如下推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & F_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_1^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & L \arrow[r, equal] \arrow[d] & L \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 L 和 K_0^1 是 Gorenstein n-平坦模，所以 K_1^1 是 Gorenstein n-平坦模，于是由 $M_0\to M_1$ 同态可诱导出下列同态：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & F_1^0 \arrow[r] & K_1^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

同理可得交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & K_0^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1^1 \arrow[r] & F_1^1 \arrow[r] & K_1^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 F_1^1 是 n-平坦模，K_1^2 是 Gorenstein n-平坦模.

继续上述过程，得到正合列

$$A(1):0\to M_1\to F_1^0\to F_1^1\to F_1^2\to\cdots,$$

其中 F_1^i 是 n-平坦模，$K_1^i=\mathrm{Ker}(F_1^i\to F_1^{i+1})(i\geqslant 0)$ 是 Gorenstein n-平坦模($K_1^0=M_1$)，并且存在由 $M_0\to M_1$ 诱导的同态 $A(0)\to A(1)$. 继续这个过程，可得下列交换图：

$$\begin{tikzcd}
A(0): \arrow[d] & 0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
A(1): \arrow[d] & 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1^0 \arrow[r] \arrow[d] & F_1^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
A(2): \arrow[d] & 0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_2^0 \arrow[r] \arrow[d] & F_2^1 \arrow[r] \arrow[d] & F_2^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

上述交换图中的每一行都是正合的，并且对任意整数 $i\geqslant 0$, $j\geqslant 0$，F_j^i 是 n-平坦模，$K_j^i=\mathrm{Ker}(F_j^i\to F_j^{i+1})$ 是 Gorenstein n-平坦模. 设 N 是投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模，则由命题 1 可得 $N\otimes_R A(n)$ 正合($n=0,1,2,\cdots$). 用 $\varinjlim$ 作用上述交换图，得到正合列

$$\varinjlim A(n):0\to\varinjlim M_n\to\varinjlim F_n^0\to\varinjlim F_n^1\to\varinjlim F_n^2\to\cdots.$$

由文献[16]定理 1 知，n-平坦模关于正向极限

封闭，故$\varinjlim F_n^i$ 是 n-平坦模($i\geqslant 0$).

因为 $N\otimes_R \varinjlim A(n)=\varinjlim(N\otimes_R A(n))$，所以 $N\otimes_R \varinjlim A(n)$正合. 又因为对任意的 $i\geqslant 1$，有 $\mathrm{Tor}_i^R(N,\varinjlim M_n)=\varinjlim \mathrm{Tor}_i^R(N,M_n)=0$，故由命题 1 可得$\varinjlim M_n$ 是 Gorenstein n-平坦模.

下面给模 $M_0,M_1,M_2,\cdots,M_\omega,M_{\omega+1},\cdots$重新编号，使得 $M_\omega=\varinjlim M_n$ 且 $M_{\omega+1}$ 是 M_ω 的后一项. 因此可以假设系统是连续的，即 $M_\beta=\varinjlim M_\alpha$，如果 β 是有限序数且 $\beta<\lambda$，利用超限归纳法可证明 $\varinjlim M_\alpha(\alpha<\lambda)$是 Gorenstein n-平坦模. 】

引理 4 任意环上的 Gorenstein n-平坦模类是 Kaplansky 类.

证明 由文献[17]命题 2.1 知，n-平坦模关于纯子模和纯商模封闭，又因为 n-平坦模关于正向极限封闭，类似于文献[15]命题 2.6 的证明可得，任意环上的 Gorenstein n-平坦模类是 Kaplansky 类. 】

定理 1 若 Gorenstein n-平坦模类关于扩张封闭，则(GF^n,($\mathrm{GF}^n)^\perp$)是完全遗传余挠对.

证明 由引理 3、引理 4 和文献[15]定理 2.9 得(GF^n,($\mathrm{GF}^n)^\perp$)是完全余挠对. 由引理 2 知 Gorenstein n-平坦模类是投射可解类，从而得到(GF^n,($\mathrm{GF}^n)^\perp$)是遗传的. 】

推论 2 若 Gorenstein n-平坦模类关于扩张封闭，则任意模都有 GF^n-覆盖.

推论 3 若 Gorenstein n-平坦模类关于扩张封闭，则任意模都有($\mathrm{GF}^n)^\perp$-包络.

参考文献：

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein flat modules[J]. *Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan*, 1993, **10**: 1.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein flat preenvelopes and resolvents[J]. *Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan*, 1995, **12**: 1.

[3] ENOCHS E E, Xu J. Gorenstein flat covers of modules over Gorenstein rings[J]. *J Algrbra*, 1996, **181**(1): 288.

[4] MAO L X, DING N Q. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules[J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2008, **7**(4): 491.

[5] SONG W L, HUANG Z Y. Gorenstein flatness and injectivity over Gorenstein rings[J]. *Sci China Ser A*, 2008, **51**(2): 215.

[6] LIU Z K, YANG X Y. Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. *J Aust Math Soc*, 2009, **87**: 395.

[7] GILLESPIE J. Model structured on modules over Ding-Chen rings[J]. *Homology, Homotopy Appl*, 2010, **12**(1): 61.

[8] BRAVO D, ESTRADA S, IACOB A. FP n-injective and FP n-flat covers and envelopes, and Gorenstein AC-flat covers[J]. *Algebra Colloquium*, 2018, **25**(2): 319.

[9] ESTRADA S, IACOB A, PÉRES M A. Model structures and relative Gorenstein flat modules. Arxiv: 1709.00658, 2017.

[10] ENOCHS E E, JENDA O M G, LÖPEZ-RAMOS J A. The existence of Gorenstein flat covers[J]. *Math Scand*, 2004, **94**(1): 46.

[11] YANG G, LIU Z K. Gorenstein flat covers over GF-closed rings[J]. *Commun Algebra*, 2012, **40**(5): 1632.

[12] ŠAROCH J, ŠTOVÍĈEK J. Singular compactness and definability for Σ-cotorsion and Gorenstein modules. 2018, ArXiv: 1804.09080, 2018.

[13] LEE S B. n-coherent rings[J]. *Comm Algebra*, 2002, **30**(3): 1119.

[14] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. *J Pure Appl Algebra*, 2004, **189**(1-3): 167.

[15] ENOCHS E E, LÓPEZ-RAMOS J A. Kaplansky classes[J]. *Rend Semin Mat Univ Padova*, 2002,: **107**: 67.

[16] SELVARAJ C, UDHAYAKUMAR R. Derived functors of Hom relative to n-flat covers[J]. *Vietnam J Math*, 2015, **43**: 571.

[17] YANG X Y, LIU Z K. n-flat and n-FP-injective modules[J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2011, **61**(2): 359.

（责任编辑　马宇鸿）