第 45 卷第 6 期
2014 年 11 月

南昌大学学报(人文社会科学版)
JOURNAL OF NANCHANG UNIVERSITY

Vol. 45 No. 6
Nov. 2014

康德数学的构造理论

胡 好

(西北师范大学 哲学与政治学研究院,甘肃 兰州 730070)

摘 要: 康德数学的构造理论使得数学通过纯直观直接地构造概念和判断。纯直观作为第三者,之所以能进行构造,是知性、想像力和感性共同作用的结果。知性提供的直观的公理指出直观都是定量,想像力通过图型将定量形象化,并构造出结果。纯直观在此过程中产生出数学概念。具体而言,算术和几何学的构造分四步进行,首先产生出概念,其次将概念形象化,再次提取同质单位,最后得出结果。这项研究可以为创造性发挥提供基础,并为更好地理解批判哲学体系提供指引。

关键词: 康德; 数学; 构造; 时空; 纯直观; 图型

中图分类号: B516. 31 文献标识码: A 文章编号: 1006 - 0448(2014)06 - 0013 - 06

DOI:10.13764/j.cnki.ncds.2014.06.003

康德的数学观尽管在数学的本体论和认识论问题上富有启发性,但自 20 世纪以来遭到众多专家学者的批评。弗雷格嘲笑康德纯直观在算术中的作用,罗素谴责康德的几何学理论,弗里德曼说康德的几何观有些愚蠢,数学家克莱因认为康德的几何观是鲁莽的[1](P1)[2](P80)。一时间康德的数学观广为诟病,在这种情况下,若有人再对其进行研究,显得不合时宜。然而,笔者认为研究康德的数学观有以下两重意义: 其一,这种数学观未必过时,如有人认为几何学通过集合论即可建立,无需借助于空间直观,但这种观点还存在争议,因为集合论本身的一致性以及连续性都存在问题。既然集合论和空间直观作为基础都不具有压倒性优势,那么康德所说的空间直观至少提供了一种理论解释。几何学虽不必须但可以从空间直观中被构造出来[2](P84)。其二,研究康德的数学观有助于把握他的批判哲学体系。纯粹理性的总问题是"先天综合判断如何可能",它分为四个子问题,纯粹数学如何可能作为第一个子问题,其作用不单是为数学奠基,更重要的是,它为后面的论述提供了一个范本,通过它有助于回答后面三个子问题。

本文无意于为康德的数学观辩护,而是从他的体系出发,给出数学如何可能的系统回答,尤其是揭示出康德数学的构造理论。下文遵循如下顺序: 首先指出数学的构造理论的特点,然后揭示出知性在数学中的作用,接着通过辨析几个概念指出想像力和感性在数学中的作用,最后呈现出数学的构造机制。

一 数学的构造理论的特点

在康德所处的时代,数学是各门科学中的典范科学。康德数学的构造理论是把数学命题当作先天综合判断,从构造的角度揭示出数学的基础。与哲学相比,数学的构造理论呈现出自身的特点。数学是出自概念的构造的知识,哲学是出自概念的知识。数学"可以借助于在对象的直观中构造概念而把该对象的诸谓词先天地直接结合起来",哲学却"永远也不可能只是从概念中就直接确定的"[3](P565)。也就是说,前者能直接地构造出概念和判断,后者却只

收稿日期: 2014 - 07 - 09
基金项目: 教育部人文社会科学重点研究基地重大项目"康德道义论重大理论与实践问题研究"(13JJD720007); 西北师范大学青年教师科研能力提升计划社会科学项目"康德哲学中的第三者研究"(SKQNYB12012)。
作者简介: 胡好(1983 -),男,湖南株洲人,讲师,哲学博士,从事康德哲学研究。

能间接地将判断的主词和谓词联结起来。

直接确定性和间接确定性的区别在于对经验的依赖。由于数学完全不依赖于经验就可建立起来,因而具有直接的确定性;相反,由于哲学必须依赖于经验方可建立,因而只有间接的确定性。数学和哲学作为先天综合判断,它们主谓词之间的联结都是先天的,这一点没有区别,它们的区别在于前者无需依赖于经验性的直观,而后者则必须依赖。数学和哲学之所以对经验的态度如此不同,是因为它们的第三者不同。数学的第三者是先天直观,哲学的第三者则是先验图型。数学"可以在先天直观中规定我们的概念",因为"这些概念既然指向一个先天直观,它们也就恰好因此而能够先天地、并且勿须任何经验性的材料而在纯直观中被确定地给予出来"[3](P559-560)。也就是说,数学可以在时空直观中通过单纯想像获得概念,比如想像一个三角形。或许我们需要借助于经验性直观构造某些几何学命题,比如通过在纸上画辅助线证明三角形内角和等于180°,但那不是必须的,许多人在单纯想像中就可证明。就此而言,它是理性的直觉性的运用。但哲学不同,先验图型基于自身的两重特性(既具有感性特征,又具有知性特征),一方面充当范畴与现象的中介,另一方面防止范畴直接运用于对象,将其限制在经验上。由于范畴要统摄现象必须借助于先验图型,因此它只能进行经验性的运用。而且,由于哲学是将现象归摄到概念之下的知识,而现象都来自于感性直观,感性的被动性致使质料必须通过外物的刺激才能被给予,所以,哲学依赖于经验,它是理性的推论性的运用。

正因如此,数学是构成性的知识,哲学是调节性的知识。在数学中,"如果比例的三项给予了,第四项也由此而被给予,亦即能够由此而被构造出来"[3](P168);但在哲学中,"我从三个被给予的项中只能认识到和先天地给出与第四项的关系,而不是这个第四项本身,我倒是拥有一条在经验中寻找第四项的规则,和一个在经验中找到第四项的标志"[3](P565)。例如被给予的三项是太阳晒石头、石头变热和苹果落地,鉴于太阳晒是石头热的原因,我们以此为标志,可以先天地知道苹果落地一定有原因,至于这个原因(第四项)是什么,无法先天地给出,必须诉诸经验。因此,数学可以在量的比较中将未知项构造出来,哲学却只能为寻找未知项指明方向,无法直接给出未知项。

所以,数学的构造理论的特点在于,它使得数学通过先天直观直接地构造概念和判断。

二　直观的公理

数学命题需要一个第三者。虽然数学原理的联结是种组合(composition),主词和谓词同质,但它们仍需要一个第三者,因为数学原理是综合判断,对于综合判断,"我们为了能够超出一个概念之外,就必须有一个第三者即中介性的知识"[3](P565)。可见,第三者的提出,不在于主谓词是否同质,而在于它们是否具有综合关系。

数学命题的第三者是时空纯直观。数学命题是通过先天直观来考察的,借助于先天直观,它将主词和谓词联结起来,例如通过空间直观将"三点"和"平面"的概念直接结合起来,构造出"三点任何时候都处于一个平面"[3](P565)。数学分为算术和几何学,具体而言,算术的第三者是时间直观,几何学的第三者是空间直观。康德在《未来形而上学导论》一书中指出:"几何学以空间的纯直观为基础。算术甚至是通过各单位在时间中的渐进相加来完成其数字概念的;而尤其是纯粹力学,惟有借助时间的表象才能完成其关于运动的概念。"[4](P285)

可是,时空纯直观如何使得数学命题成为可能呢?一般认为,先验感性论回答了数学如何可能的问题,单凭感性直观即可构成数学命题。然而,在时空的两个阐明中,形而上学阐明只是就时空本身来阐明它们的性质,与数学无关,先验阐明尽管涉及数学,但没有正面论述如何构造,只是从数学命题的特征反推出时空的性质。康德在《未来形而上学导论》一书中说道:"如果人们对自己的所有综合判断,就它们客观有效而言,都进行分析,那么就将发现,它们绝不是纯然由像人们通常认为的那样仅仅通过比较而在一个判断中联结起来的那些直观构成的;……甚至数学在其最单纯的公理中的判断,也不是这一条件的例外。'直线是两点之间的最短的线',这一原理是以线被归摄在量的概念之下为前提条件的,而量的概念无疑不是纯然的直观,而是仅仅在知性中才有其位置。"[4](P304)这表明数学命题不是单纯由时空直观构成的,还要以量的范畴为根据。所以,数学命题的成立需要感性、知性,乃至想像力的共同作用。

知性的作用体现在为数学提供一条原理，即直观的公理①。直观的公理是: 一切直观都是外延的量(extensiv Gröвen) 。直观包括纯直观和经验性的直观，公理表明纯直观和经验性的直观都是外延的量。由于经验性的直观(时空中之物) 只有通过纯直观(时空) 才可能，因此，只要纯直观是外延的量，经验性直观也必然是外延的量。

对于纯直观为什么是外延的量，康德在先验感性论就有提到。通过形而上学阐明，时空被描述为无限的量，不过在那里只是略微提及。在直观的公理中，因为时空直观处处都是同质的，又因为量的概念是“同质的杂多的单纯综合”[3](P557)，所以直观是一种量。然而，直观是整体先行于部分的，外延的量是部分先行于整体的，二者不一致，如何能联结到一起? 对此，量的概念的定义无法解释。梅尔尼克(Melnick) 认为 “在公理中，康德不是说空间(作为纯直观) 必须从部分中被构造。相反，他是说空间中的性状(被纯粹直观到的) 必须被构造。”[5](P19) 也就是说，梅尔尼克区分了纯直观(空间) 和经验性的直观(空间中的性状) ，前者是整体先行于部分，后者是部分先行于整体，他认为公理讨论的只是经验性的直观，并非纯直观，所以，它能跟外延的量联结起来。他显然在回避问题。公理说一切直观都是外延的量，已经包括纯直观，所以，试图把纯直观排除在这条原理之外是不行的。实际上，直观的公理本身是先天综合判断，它的主词是直观，谓词是概念，这个判断是将直观归摄到概念之下。由图型法可知，这种联结是通过先验图型，具体而言，是通过量的范畴的图型—数—来完成的。数是对同质单位连续相加进行概括的表象，它“表象的是时间的系列，而系列正是时间自身的本质”[6](P308)，亦即它体现出来的相继性构成了时间本身。数作为先验图型，一方面具有直观的特性，一方面具有概念的特性，因而能把相异的两者在自身中结合起来。

由于纯直观是定量，因而由它规定的数学概念可以被构造。康德在《纯粹理性批判》一书中说: “我们可以在先天直观中规定我们的概念，因为我们是在空间和时间中通过同一式样的综合来自己为自己造成诸对象的，因为我们只是把这些对象看作定量之物。”[3](P559)

知性提供了直观的公理，直观的公理确认一切直观都是定量，定量促成了数学概念的构造。因此，在这个意义上，我们说知性为数学的构造理论提供了基础。

三　纯直观、感性图型、形象、知性图型

在数学的构造理论中，想像力的作用是提供图型(schema) 。图型分为感性图型和知性图型两种。感性图型是“想像力为一个概念取得它的形象的某种普遍的处理方式的表象”[3](P140)，例如通过作图将三角形概念画到纸上，这个图画就是三角形概念的图型。而知性图型是“知性概念在其运用中限制于其上的感性的这种形式的和纯粹的条件”[3](P140)，它作为先验图型，一方面是智性的，另一方面又是感性的。

感性图型不同于形象(bild) 。形象是概念在经验中的具体实例，例如，把数字 5 标记为 5 个点或 5 根手指，那么 5 个点或 5 根手指就是数字 5 的形象。感性图型则是将概念形象化的方式，感性图型是概念先行于形象，所以，能抽象掉形象的差异而达到普遍，例如 5 的概念的形象是 5 个点，这些点的差异全部被抽象掉，它们所例示的 5 的概念是普遍的。相反，形象总是先行于概念的，每个形象的共同属性被概括为概念，此概念只具有相对的，而非严格的普遍性，例如通过直角、锐角、钝角三角形归纳出来的三角形概念，它的普遍性“永远只被局限于这个范围中的一个部分”[3](P140)。邓晓芒先生认为 “感性概念的图型的特点在于它们都带有‘形象’，因而毕竟是空间图型”，意即感性图型只能是空间图型。即便用 5 个点表示数字 5 的是时间图型，它也要被还原到空间图型，因为时间只有空间化才能获得自己的形象[7](P18)。的确，将数字 5 用 5 个点表示通常要借助于空间，但不是必须依靠空间，我们可以像莱布尼茨一样设想 5 个形而上学的点。其实，5 个点作为数字 5 的例示，它们的一切空间属性，包括形状、大小、位置等都会被抽象掉，只剩下 5 个纯粹的同质单位，这些单位是在时间均匀流逝过程中产生的。

①虽然把直观的公理称为公理，但它实际上只是原理，因为它是将两个概念间接结合在一起的，但公理必须从概念中直接确定。参见康德《纯粹理性批判》，邓晓芒译，杨祖陶校，人民出版社 2004 年出版，第 565 – 566 页。

所以,笔者认为感性图型除了包括空间,而且还包括时间。

感性图型处理的都是感性概念,要么是数学概念,要么是经验性的概念,数学概念包括算术概念和几何学概念,经验性的概念包括像狗这样的物理对象概念。由于主题所限,下文不涉及经验性的概念,谈到感性图型,只考虑将数学概念形象化的情况。将数学概念形象化有两种方式:一种是在纯直观中的单纯想像,另一种是借助于经验性的直观完成,例如,三角形概念可以单纯想像,也可以通过作图展示出来。值得注意的是,这两种方式都是先天地完成的,第二种方式也不例外。为了探寻三角形的性质而作图,或者为了探寻数字之间的关系而掰手指,虽然用到了经验性的直观,但不妨碍结论的普遍性,“因为在这个经验性的直观中被注意的永远只是构造这个概念的行动,对该概念来说许多规定如大小、边、角都是完全无关紧要的,因而这些并不改变三角形概念的差异就都被抽象掉了”[3](P553)。

纯直观是时空,时空是整体,具体时空是它们的部分。具体时空构成了数学概念。空间本身是个至大无外的整体,各种图形通过对其限制构成了几何学概念;时间本身是个绵延不绝的整体,每一段物理时间通过对其限制构成了算术概念。感性图型就是将这样的数学概念形象化。因此,感性图型不是跟时空本身,而是跟具体时空打交道。

感性图型可以将概念(感性)带入形象,但知性图型无法将概念(知性)带入任何形象,像实体、原因这样的知性概念是无法形象化的。一方面,知性图型是一种“先验的时间规定”,因为“就它是普遍的并建立在某种先天规则之上而言,是与范畴(它构成了这个先验时间规定的统一性)同质的;但另一方面,就一切经验性的杂多表象中都包含有时间而言,先验时间规定又是与现象同质的”[3](139)。

时间既是纯直观,又是知性图型,那么,纯直观和知性图型之间是什么关系呢?阿利森(Allison)认为时间的纯直观就是先验图型[8](P61-79),吉本斯(Gibbons)认为这种解释回避了问题,因为将图型等同于纯直观意味着判断的中介跟主词重合了,她主张将先验图型看作构造时间的纯直观的处理方式[9](P56-57)。吉本斯没有看到,时间的纯直观是不能构造的,能够构造的只是对时间做出限制之后的具体时间,因为构造意味着形象化,而时间本身作为无限的量无法形象化。当时间被看作纯直观时,康德强调的是时间是先天的同质的感性杂多;当时间被看作先验图型时,强调的是时间的两重性和综合性。两重性表现在时间既与感性杂多同质,又与知性范畴同质,可以充当现象和范畴的中介,综合性表现在时间是种将杂多相继地综合起来的处理方式。侧重点的差异不表示作为纯直观的时间和作为先验图型的时间是两个东西,而是同一个东西的不同侧面。

四　算术和几何学的构造

直观的公理将一切直观确定为定量,图型将定量带入形象,并对其进行比较,在纯直观中相异的两个数学概念被联结起来。通过知性、想像力和感性的共同作用,数学命题便可以被构造出来。

在康德看来,数学分为算术和几何学两种。他认为,算术的构造是这样的“在它把量的普遍概念按照量的不同关系也用符号标志出来之后,它就把这个量由以被产生和被改变的一切处理过程都按照某些普遍规则在直观中表现出来。”(着重号是笔者所加)[3](P555)其中,“符号”指加减开方等运算法则,“普遍规则”指知性图型,这句话的意思是,算术(或代数)把几个数字概念用加减开方等运算法则标志出来之后,它们所产生的结果按照知性图型在时间纯直观中被构造出来。

下面以7+5=12为例,阐明算术的构造。对于7+5=12,“我们必须超出这些概念之外,借助于与这两个概念之一相应的直观,例如我们的5个手指,或者(如谢格奈在其《算术》中所说的)5个点,这样一个一个地把直观中给予的5的这些单位加到7的概念上去”[3](P12),其中,“5个手指”或“5个点”是5的概念的形象(经验性的直观),将5的概念形象化的是感性图型“一个一个地把直观中给予的5的这些单位加到7的概念上去”,这涉及数这个知性图型,因为数是“一个单位一个单位(同质单位)连续的相加进行概括的表象”[3](P141-142)。

对于7+5=12的构造,康德在《纯粹理性批判》一书中说“我首先取的是7这个数,并且,由于我为了5这个概念而求助于我的手指的直观,于是我就将我原先合起来构成5这个数的那些单位凭借我手指的形象一个一个地加到7这个数上去,这样就看到了12这个数产生了。”[3](P12)对此,彭志君采

用四要件模型进行分析，他认为存在四个要件: (1) 7 +5; (2) 和的概念; (3) 时间; (4) 12。时间直观作为第三者先从 7 +5 中分析出和的概念，然后将和的概念同 12 联结起来，之所以能够联结，是因为“时间构造了 7、5、12 和 7 + 5 之和这些概念”[10](P41)。他的不足在于忽视了知性和想像力在算术中的作用，而是单从感性直观的角度考虑。

实际上，这个构造过程先要诉诸感性图型，将 7 和 5 的概念带入形象，如用 7 根手指表示 7，5 个点表示 5，或者都用手指来表示 7 和 5，然后将这些具体的点和手指之间的差异(如长短、粗细、颜色等)抽象掉，剩下它们所例示的那些同质单位，再诉诸数的知性图型，把组成 5 的那些单位一个一个连续地加到 7 上去，最后将 12 构造出来。整个过程源自先验统觉的本源的统一性，通过量的范畴以及它的图型构造出结果。作为第三者，时间纯直观的作用体现在通过限制它产生出具体时间，而具体时间构成诸如 7 和 5 这样的数字概念。

通过上述例子，我们可以将算术的构造过程概括成:

(1) 概念的产生: 通过限制作为整体的时间直观产生数字;

(2) 概念形象化: 用手指、点或者其他方式表示这些数字;

(3) 提取同质单位: 抽象掉具体形象，并把各个数字的单位整齐划一;

(4) 同质单位连续相加，得出结果。

(1)(2)(4) 分别体现了纯直观、感性图型和知性图型的作用，(3) 也不容忽视，因为如果没有它，就无法将结果构造出来。比如都用手指表示 7 和 5，但 7 是以 1 根手指为单位，5 却以 5 根手指为单位，单位不统一，这样一个单位一个单位连续相加就得不出 12 的结果。所以，需要提取同质单位。

几何学的构造从空间直观开始。通过空间直观产生几何学概念，比如要构造一个三角形，通常是通过作图的方式在纸上绘制出三角形[3](P553)，然后展示出那个概念的性质。与算术不同的是，几何学的构造不完全依靠知性图型，有时单凭感性图型也可以完成。例如，要证明“三角形内角和等于两直角之和”，就不需要知性图型。其证明如下“两直角之和恰好与从直线上一点所能够引出的所有邻角之和有相等的结果，于是他就延长这三角形的一边而得到与两直角之和相等的两个邻角。现在他通过引一条与这三角形的对边相平行的线来分割这两个角中的外角，并且看到在这里产生了与一个内角相等的一个外邻角，以及与另一个内角相等的另一个外邻角，而这两个外邻角与它们的内邻角之和本来就等于两直角，所以三角形的三内角之和为两直角看，此证。”[3](P555)这个命题等价于三角形内角和等于 180°，它可通过延长三角形底边并作另一边的平行线，利用两直线平行，同位角相等的公理证成。此证明分为两步: 第一，作图，画出三角形并作辅助线(延长一条边并作另一边的平行线); 第二，利用公理求证。显然，整个过程没有求助于一个单位一个单位的连续相加。

但是，如果涉及量的比较，则必须依靠知性图型。例如，两点之间直线最短，这个命题等价于两点之间直线的长度小于其他任何曲线的长度。如果要证明的话，在康德看来，可以这么做: 第一，作图，标出两个点，并在两点之间画出一条直线和任意一条曲线; 第二，抽象掉直线和曲线在颜色、粗细等方面的差异，给二者选取相同的单位; 第三，同质单位连续相加，得到直线的长度和曲线的长度; 第四，通过比较，得出两点之间直线的长度小于任何其他曲线的长度。这个证明虽然受制于个别的图形，却无损于结论的普遍性。在这个过程中，感性图型和知性图型都发挥了作用。空间直观的作用体现在，只有对它进行限制才能画出点和线。

同样的，我们可以将几何学的构造概括成:

(1) 概念的产生: 通过限制作为整体的空间直观产生几何学概念;

(2) 概念形象化: 通过作图的方式表现出这个概念;

(3) 提取同质单位: 抽象掉具体形象，并把各个概念的单位整齐划一;

(4) 同质单位连续相加，比较出结果。

(1)(2)(4) 分别体现出空间直观、感性图型和知性图型的作用。不过，有的几何学命题通过前两步即可被构造，只有那些涉及量的比较的几何学命题才需要四步。

或许我们现在不再对康德数学的构造理论感兴趣，不会认同这就是数学的基础，甚至不会认同数学是先天综合判断。但是，这种构造理论把数学建立

在主观的认识形式之上，是具有启发意义的。例如时间被主观化为想像力的图型，这给了海德格尔灵感，让其从中找到了存在者存在的意义。并且，先验统觉、范畴和先验图型的共同作用是数学得以可能的条件，同时也是自然科学得以可能的条件，这种思路还可以延续到定言命令的分析中。因此，通过完整地描述康德数学的构造理论，可以为创造性发挥提供一定的基础，并为更好地理解批判哲学体系提供指引。

参考文献:

[1] Posy C J. Introduction: Mathematics in Kant's Critique of Pure Reason in Kant's Philosophy of Mathematics [M]. Posy C J. Kluwer Academic Publishers, 1992.
[2] 包向飞. 论现代数学背景下的康德几何观 [J]. 哲学研究, 2012(2).
[3] 康德. 纯粹理性批判 [M]. 邓晓芒, 译, 杨祖陶, 校. 北京: 人民出版社, 2004.
[4] 康德. 未来形而上学导论 [M] //康德著作全集: 第 4 卷. 李秋零, 译. 北京: 中国人民大学出版社, 2005.
[5] Melnick A. Kant's Analogies of Experience [M]. Chicago: University of Chicago Press, 1973.
[6] 齐良骥. 康德的知识学 [M]. 北京: 商务印书馆, 2011.
[7] 邓晓芒. 康德时间观的困境和启示 [J]. 江苏社会科学, 2006(6).
[8] Allison H. Kant's Transcendental Idealism [M]. New Haven: Yale University Press, 1983.
[9] Gibbons S. Kant's Theory of Imagination [M]. Oxford: Oxford University Press, 1994.
[10] 彭志君. 先天综合判断的第三者问题研究——以纯粹理性批判为中心 [J]. 山东科技大学学报, 2012(5).

Kant's Theory of Mathematical Construction

HU Hao

(Institute of Philosophy and Political Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Mathematics directly constructs concepts and propositions by the pure intuition due to Kant's theory of mathematical construction. That the pure intuition, as the third thing, can construct them is the result of combined action of the understanding and the imagination and the sense. Axioms of intuition provided by the understanding advance that all intuitions are extensive magnitudes. The imagination puts these magnitudes into images and constructs the result by the schema. The pure intuition produces mathematical concepts in the constructive process. Specifically, the construction of arithmetic and geometry is divided into four steps: firstly, concepts are produced; secondly, they are put into images; thirdly, homogeneous units are extracted; and finally, the result is constructed. This paper may provide the base for the creative interpretation and the conduct for understanding the whole critical philosophy better.

Key words: Kant; mathematics; construction; space – time; pure intuition; schema

(责任编辑　王能昌)