弱投射维数

陈永明， 杨晓燕

(西北师范大学数学系, 甘肃 兰州 730070)

摘要：引入了弱投射模及弱投射维数的概念, 说明弱投射模是 FP- 投射模的真子类. 给出了环的整体弱投射维数的刻画, 并得到了凝聚环和 Noether 的一些新的同调刻画.

关键词：弱投射模; 弱投射维数; 凝聚环; Noether 环

中图分类号：O153.3 **文献标识码**：A

文章编号：1008-5513(2020)01-0043-07

DOI：10.3969/j.issn.1008-5513.2020.01.005

1 引言

作为内射模的一种推广, 文献 [1] 引入了 FP- 内射模的概念. FP- 内射模类具有良好的性质. 例如, 在凝聚环上 FP- 内射模类和平坦模类具有良好的对偶性质. 特别的, 在凝聚环上 FP- 内射模类对直和, 直积, 纯子模以及纯商模均封闭. 同时, 相对于 FP- 内射模类的余挠对在一般环上完备但未必遗传. 并且以 FP- 内射模为第一项的短正合列为纯正合列, 因此 FP- 内射模又被称为绝对纯模. 注意到 FP- 内射模类的这些性质在模论, 环论, 代数表示论等领域中得以广泛的应用.

2006 年, 作为对 FP- 内射模类的进一步研究, 文献 [2-3] 研究了 FP- 内射模类的左正交类及相应的维数, 分别称之为 FP- 投射模和 FP- 投射维数. 由文献 [3] 可知, FP- 投射维数在凝聚环上具有良好的同调刻画. 特别的, 在凝聚环上所有 FP- 内射模内射维数的上确界可以实现为该环的整体 FP- 投射维数 (见文献 [3] 定理 3.4).

文献 [4] 引入并研究了弱内射模, 弱平坦模及其维数, 这两类模将 Noether 环上内射模类和平坦模类 (凝聚环上 FP- 内射模类和平坦模类) 的对偶性质推广到了任意环. 受文献 [3] 的启发, 本文考虑弱内射模类的左正交类及相应的维数, 称之为弱投射

收稿日期：2019-09-03.

基金项目：国家自然科学基金 (11761060).

作者简介：陈永明 (1991-), 硕士生, 研究方向：环的同调理论.

模和弱投射维数. 特别的, 刻画了任意环上所有弱内射模内射维数的上确界, 同时给出 Noether 环和凝聚环新的同调刻画.

下面给出后文所需的一些基本概念和基本事实.

贯穿全文, R 表示有单位元的结合环. 除非特殊说明, 所有的模均是指左 R- 酉模. 用 R-Mod 表示左 R- 模范畴.

设 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ 是模类. 称 $\mathcal{X}$ 是投射可解的, 如果投射模类 $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{X}$, 并且对任意模的短正合列

$$0\to X'\to X\to X''\to 0$$

其中 $X''\in\mathcal{X}$, 有 $X'\in\mathcal{X}$ 等价于 $X\in\mathcal{X}$. 对偶的可以定义内射可解模类.

称二元组 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是余挠对, 如果 $\mathcal{X}^{\perp}=\mathcal{Y}$, ${}^{\perp}\mathcal{Y}=\mathcal{X}$. 这里

$$\mathcal{X}^{\perp}=:\ \{M\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Ext}_R^1(X,M)=0,\ \forall\ X\in\mathcal{X}\},$$

类似的可以定义 ${}^{\perp}\mathcal{Y}$.

称余挠对 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是遗传的, 如果对任意的 $X\in\mathcal{X}$, $Y\in\mathcal{Y}$ 及 $m\geq 1$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^m(X,Y)=0$. 称余挠对 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是由集合余生成的, 如果存在 $\mathcal{X}$ 的一个子集 $\mathcal{S}$ 使得 $\mathcal{S}^{\perp}=\mathcal{Y}$. 称余挠对 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是完备的, 如果对任意的 $M\in R$-Mod, 都存在模的两个短正合序列

$$0\to Y\to X\to M\to 0\ \text{及}\ 0\to M\to Y'\to X'\to 0$$

其中 $X,X'\in\mathcal{X}$ 且 $Y,Y'\in\mathcal{Y}$. 称模 M 是 FP- 内射模 [1], 如果对于每个有限表示模 F, $\mathrm{Ext}_R^1(F,M)=0$. 用 $\mathcal{FI}$ 表示所有的 FP- 内射模构成的模类. 称 M 是 FP- 投射模 [3], 如果对任意的 $F\in\mathcal{FI}$, $\mathrm{Ext}_R^1(M,F)=0$. 用 $\mathcal{FP}$ 表示所有的 FP- 投射模构成的类. 模 M 的 FP- 投射维数 [3], 记为 $\mathrm{fpd}_R(M)$, 定义如下:

$$\mathrm{fpd}_R(M)=\inf\{m\in\mathbb{N}\mid \mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,X)=0,\ \forall X\in\mathcal{FI}\}.$$

若上述 n 不存在, 则记 $\mathrm{fpd}_R(M)=\infty$.

2 弱投射模

本节给出弱投射模的概念并讨论弱投射模类和 FP- 投射模类的关系, 并由此给出左凝聚环新的同调刻画.

首先回顾弱内射模的定义.

定义 2.1 (1) 称 M 是超有限表示的, 如果 M 具有如下形式的投射分解

$$\cdots\to P_n\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0,$$

其中每个 P_i 都是有限生成投射模.

(2) 称模 M 是弱内射模 [4], 如果对任意超有限表示模 H, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(H,M)=0$.

受文献 [3] 的启发, 引入以下概念.

定义 2.2　称 M 是弱投射模, 如果对任意弱内射模 N, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$.

分别用 $\mathcal{WP}$ 和 $\mathcal{WI}$ 表示所有的弱投射模构成的类和所有的弱内射模构成的类.

注 2.1　显然 $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{WP}\subseteq\mathcal{FP}$.

注 2.2　$\mathcal{P}=\mathcal{WP}$, 当且仅当所有的模都是弱内射的.

由文献 [3] 可知, 对任意环 R, $(\mathcal{FP},\mathcal{FI})$ 是完备的 (但未必遗传) 的余挠对. 下述引理讨论这一结论的弱投射模类对应版本.

引理 2.1　设 R 是环. 则 $(\mathcal{WP},\mathcal{WI})$ 是完备遗传的余挠对. 特别的, $\mathcal{WP}$ 是投射可解的.

证明　设 $\mathcal{S}$ 是互不同构的超有限表示模构成的类, 则 $\mathcal{S}$ 作成一个集合, 并且 $(\mathcal{WP},\mathcal{WI})$ 是由集合 $\mathcal{S}$ 余生成的, 从而是完备的余挠对. 另一方面, 由文献 [5] 知 $\mathcal{WI}$ 是内射可解的, 所以由文献 [6] 知 $(\mathcal{WP},\mathcal{WI})$ 是遗传的, 且 $\mathcal{WP}$ 是投射可解的.

下述定理给出左凝聚环的同调刻画, 同时也说明包含 $\mathcal{WP}\subseteq\mathcal{FP}$ 是严格的.

定理 2.1　设 R 是环, 则以下条件等价

(1) R 是左凝聚环.　(2) $(\mathcal{FP},\mathcal{FI})$ 是完备遗传的余挠对.

(3) $(\mathcal{WP},\mathcal{WI})=(\mathcal{FP},\mathcal{FI})$.　(4) $\mathcal{WP}=\mathcal{FP}$.

证明　由文献 [7] 可知 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

由 $(\mathcal{FP},\mathcal{FI})$ 和 $(\mathcal{WP},\mathcal{WI})$ 均为余挠对可知 (3) $\Leftrightarrow$ (4).

(3) $\Rightarrow$ (2) 由引理 2.3 可证.

(1) $\Rightarrow$ (4) 由文献 [5] 可知 $\mathcal{WI}=\mathcal{FI}$. 因此 $\mathcal{WP}={}^{\perp}\mathcal{WI}={}^{\perp}\mathcal{FI}=\mathcal{FP}$.

本节最后给出左 Noether 环的等价刻画.

定理 2.2　设 R 是环, 则以下条件等价:

(1) R 是左 Noether 环.　(2) 每个有限生成模是超有限表示的.

(3) 每个循环模是超有限表示的.　(4) 每个模是弱投射的.

(5) 每个弱内射模是弱投射的.　(6) 每个弱内射模是内射的.

(7) 对任意 M, $N\in\mathcal{WI}$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$.

证明　显然有 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) 和 (5) $\Leftrightarrow$ (7).

(3) $\Rightarrow$ (6). 设 M 是任意弱内射模. 注意到对 R 的任意左理想 I, R/I 是循环模. 从而由 (3) 知, $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$. 所以由 Bear 准则可知, M 是内射模.

(4) $\Rightarrow$ (6). 设 M 是任意弱内射模, N 是任意模. 则由 (4) 知, $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$. 于是 M 是内射模.

(6) $\Rightarrow$ (5). 设 M, N 是任意弱内射模. 则由 (6) 可知, $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$. 于是 M 是弱投射模.

(5) $\Rightarrow$ (4). 设 M 是任意弱内射模. 则由引理 2.1 可知, 存在模的短正合列

$$0\to M\to E\to C\to 0,$$

其中 $E\in\mathcal{WI}, C\in\mathcal{WP}$. 由 (5) 可知 $E\in\mathcal{WP}$. 从而由 $\mathcal{WP}$ 的投射可解性知 $M\in\mathcal{WP}$.

(6) $\Rightarrow$ (1). 由文献 [5] 可知 R 是左凝聚环且每个 FP- 内射模是内射的, 从而 R 是左 Noether 环.

3 弱投射维数

本节给出弱投射维数的概念, 并讨论一般环上弱投射维数的同调刻画. 在经典的同调代数中, 一个模 M 的投射维数有两种等价的刻画: 一是投射分解长度的下确界, 另一则是使得函子 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,-)$ 消失的 m 的下确界. 下述引理讨论这一事实的弱投射模的相应情况.

引理 3.1 设 R 是环, M 是右 R- 模. 则对任意非负整数 n, 以下条件等价:

(1) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N)=0$, 其中 N 是任意弱内射模.

(2) $\mathrm{Ext}_R^{n+j}(M,N)=0$, 其中 $j\geq 1$, N 是任意弱内射模.

(3) 存在正合列 $0\to W_n\to W_{n-1}\to\cdots\to W_1\to W_0\to M\to 0$, 其中每个 W_i 是弱投射模.

(4) 对任意正合列 $0\to K\to W_{n-1}\to\cdots\to W_1\to W_0\to M\to 0$, 若每个 W_i 是弱投射模, 则 K 是弱投射模.

(5) 对任意的正合序列 $0\to H\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$, 若每个 P_i 是投射模, 则 H 是弱投射模.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 对 j 进行数学归纳. $j=1$ 的情形由 (1) 可知. 设 $j>1$. 考虑短正合列

$$0\to N\to E\to L\to 0,$$

其中 E 是内射模, 则由 $\mathcal{WI}$ 的内射可解性知 $L\in\mathcal{WI}$. 从而由维数转移和归纳假设知,

$$\mathrm{Ext}_R^{n+j}(M,N)\cong\mathrm{Ext}_R^{n+j+1}(M,N)=0.$$

(2) $\Rightarrow$ (5). 设有正合序列 $0\to H\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$, 其中每个 P_i 是投射模. 则对任意的 $W\in\mathcal{WI}$, 由维数转移和 (2) 可知,

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,W)\cong\mathrm{Ext}_R^1(H,W)=0.$$

于是 H 是弱投射模.

(5) $\Rightarrow$ (4). 由引理 2.3 知 $\mathcal{WP}$ 是投射可解的. 同时易知 $\mathcal{WP}$ 对任意直和及直和因子封闭.

考虑 (4) 中待证明的正合列. 则对于 (5) 中的正合列, 由比较引理可得如下复形的交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\parallel"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & W_{n-1} \arrow[r, "\sigma_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\sigma_2"] & W_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & W_0 \arrow[r, "\sigma_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

于是存在如下正合映射锥序列

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \bigoplus K \xrightarrow{f_{n-1}} P_{n-2} \bigoplus W_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \bigoplus W_1 \xrightarrow{f_0} W_0 \longrightarrow 0$$

因为 $P_i,\ W_i \in \mathcal{WP}$, $0 \leq i \leq n-1$, 所以由 $\mathcal{WP}$ 对直和的封闭性可知,

$$P_i \bigoplus W_{i+1} \in \mathcal{WP},\ 0 \leq i \leq n-2.$$

将上述长正合列打断, 记 $\mathrm{Ker} f_i = K_i, i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$, $K_{-1} = W_0$ 则有短正合列

$$0 \to K_i \to P_i \bigoplus W_{i+1} \to K_{i-1} \to 0$$

于是可知 $K_{n-1} \in \mathcal{WP}$ 中, 并且 $P_{n-1} \bigoplus K \in \mathcal{WP}$. 进而由 $\mathcal{WP}$ 对直和因子的封闭性可知, $K \in \mathcal{WP}$.

(4) $\Rightarrow$ (3) 显然, (3) $\Rightarrow$ (1) 由维数转移可证.

由上述引理可知, 可通过如下两种方式定义模的弱投射维数.

定义 3.1 设 R 是环, M 是模. M 的弱投射维数记为 $\mathrm{wpd}_R(M)$, 定义如下:

$$\mathrm{wpd}_R(M) = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^{m+1}(M, X) = 0,\ \forall X \in \mathcal{WI}\}$$

等价的,

$$\begin{aligned}\mathrm{wpd}_R(M) = \inf\{ & m \in \mathbb{N} \mid \text{存在正合列} 0 \to P_m \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0, \\ & \text{其中每个} P_i \in \mathcal{WP}\}\end{aligned}$$

若上述 m 不存在, 则记 $\mathrm{wpd}_R(M) = \infty$.

注 3.1 设 R 是环, M 是模.

(1) $\mathrm{wpd}_R(M) = 0$ 当且仅当 $M \in \mathcal{WP}$.

(2) 显然 $\mathrm{fpd}_R(M) \leq \mathrm{wpd}_R(M) \leq \mathrm{pd}_R(M)$.

(3) 由定理 2.4 和定义 3.2 易知环 R 是左凝聚环当且仅当对任意的模 N,

$$\mathrm{fpd}_R(N) = \mathrm{wpd}_R(N).$$

注意到引理 3.1 给出了一般环上 $\mathrm{wpd}_R(M) \leq n$ 的等价刻画. 结合这一引理, 运用通常处理投射维数的方法可得如下结论

命题 3.1 设 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是正合列. $\mathrm{wpd}_R(A), \mathrm{wpd}_R(B), \mathrm{wpd}_R(C)$ 中任意两个有限, 则第三个有限, 并且,

(1) $\mathrm{wpd}_R(B) \leq \sup\{\mathrm{wpd}_R(A),\ \mathrm{wpd}_R(C)\}$.

(2) $\mathrm{wpd}_R(A) \leq \sup\{\mathrm{wpd}_R(B),\ \mathrm{wpd}_R(C) - 1\}$.

(3) $\mathrm{wpd}_R(C) \leq \sup\{\mathrm{wpd}_R(B),\ \mathrm{wpd}_R(A) + 1\}$.

(4) 若 $0 < \mathrm{wpd}_R(A) < \infty$ 且 $B \in \mathcal{WP}$, 则 $\mathrm{wpd}_R(C) = \mathrm{wpd}_R(A) + 1$.

通常定义环的整体弱投射维数如下

定义 3.2 设 R 是环, R 的左整体弱投射维数记为 $\mathrm{l.Wpd}(R)$, 定义如下:

$$\mathrm{l.Wpd}(R) = \sup\{\mathrm{wpd}_R(M) \mid M \in R\text{-Mod}\}.$$

下述定理说明这一整体维数可以实现为所有弱内射模内射维数的上确界.

定理 3.1 设 R 是环. 则以下维数相等:

(1) $\mathrm{l.Wpd}(R)$. (2) $\sup\{\mathrm{wpd}_R(M) \mid M$ 是有限生成模$\}$.

(3) $\sup\{\mathrm{wpd}_R(M) \mid M$ 是循环模$\}$. (4) $\sup\{\mathrm{id}_R(F) \mid F$ 是弱内射模$\}$.

(5) $\sup\{\mathrm{wpd}_R(F) \mid F$ 是弱内射模$\}$.

证明 $(3) \leq (2) \leq (1)$ 和 $(5) \leq (1)$ 显然.

$(3) \leq (4)$. 假设 $\sup\{\mathrm{id}_R(F) \mid F$ 是弱内射模$\}=m < \infty$. 设 M 是任意模, N 是任意弱内射模. 由于 $\mathrm{id}_R(N) \leq m$, 从而 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(M, N) = 0$. 所以 $\mathrm{wpd}_R(M) \leq m$.

$(4) \leq (2)$. 假设 $\sup\{\mathrm{wpd}_R(M) \mid M$ 是一个循环模$\}=n < \infty$. 设 N 是弱内射模, I 是 R 的任意左理想, 则由 (2) 知 $\mathrm{wpd}_R(R/I) \leq n$. 从而由引理 3.1 和定义 3.1 知 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/I, N) = 0$, 所以 $\mathrm{id}_R(N) \leq n$.

$(3) \leq (5)$. 设 $\sup\{\mathrm{wpd}_R(F) \mid F$ 是弱内射模$\}=n < \infty$. 设 M 是模, 由引理 2.1 知存在短正合列 $0 \to M \to I \to C \to 0$, 其中 I 是弱内射模, C 是弱投射模, 从而由命题 3.1 知 $\mathrm{wpd}_R(M) \leq \mathrm{wpd}_R(F) \leq n$.

根据文献 [5-8], 称模 M 是 Gorenstein AC- 内射模 (Gorenstein 内射模), 如果存在内射模的 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{WI}, -)$- 正合 ($\mathrm{Hom}_R(\mathcal{I}, -)$- 正合) 的正合列

$$\cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

使得 $M = Im(I_0 \to I^0)$. 由定义, 显然每个 Gorenstein AC- 内射模是 Gorenstein 内射模, 但不清楚这一包含是否为严格的. 由文献 [5] 可知, 若每个内射模具有有限的内射维数, 则 Gorenstein AC- 内射模和 Gorenstein 内射模一致. 作为定理 3.1 的应用, 有

推论 3.1 设 R 是环. 则以下条件等价:

(1) $\mathrm{l.Wpd}(R) < \infty$. (2) $\sup\{\mathrm{wpd}_R(M) \mid M$ 是有限生成模$\} < \infty$.

(3) $\sup\{\mathrm{wpd}_R(M) \mid M$ 是循环模$\} < \infty$. (4) $\sup\{\mathrm{id}_R(F) \mid F$ 是弱内射模$\} < \infty$.

(5) $\sup\{\mathrm{wpd}_R(F) \mid F$ 是弱内射模$\} < \infty$.

当以上条件之一满足时, Gorenstein AC- 内射模和 Gorenstein 内射模一致.

注 3.2 由定理 2.1 知, $\mathcal{WP} = \mathcal{FP}$ 当且仅当 R 是左凝聚环. 因此, 文献 [3] 中的命题 3.1, 命题 3.2, 推论 3.3, 定理 3.5 可视为引理 3.1, 命题 3.1, 定理 3.1 的特殊情形.

参考文献

[1] Stenstrom B. Coherent rings and FP-injective modules [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1970,2(2):323-329.

[2] Mao L X, Ding N Q. Notes on FP-projective Modules and FP-injective Modules [M]. Berlin: Birkhäuser Basel, 2005.

[3] Mao L X, Ding N Q. FP-projective dimensions [J]. Communications in Algebra, 2005,33(4):1153-1170.

[4] Gao Z H, Wang F G. Weak injective and weak flat modules [J]. Communications in Algebra, 2015,43:3857-3868.

[5] Bravo D, Gillespie J, Hovey M. The stable module category of a general ring [J]. Mathematics, 2014:1-38.

[6] Enochs E E, Jenda O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2011.

[7] Bravo D, Pérez, Marco A. Finiteness conditions and cotorsion pairs [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2017,6:1249-1267.

[8] Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules [J]. Mathematische Zeitschrift, 1995,220(1):611-633.

Weak projective dimensions

Chen Yongming, Yang Xiaoyan

(Department of Mathematics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In the article, we introduce the notions of weak projective modules and weak projective dimensions of rings and modules; show that the class of weak projective modules are strictly contained in that of FP-projective modules. We give a characterizations of the global weak projective dimensions of rings; and obtain some new homological characterizations of coherent rings and Noether rings.

Key words: weak projective module, weak projective dimension, coherent ring, Noether ring

2019 MSC: 09M03