第37卷第8期　　西南大学学报（自然科学版）　　2015年8月
Vol. 37　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2015

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2015.08.011

关于(m, n)-主弱平坦序S-系[①]

乔虎生，　陈小飞

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：设S是序幺半群，m，n为正整数．给出了主弱平坦序S-系的一个推广，称之为(m, n)-主弱平坦系．在此新性质的基础上研究了序S-系的同调分类问题，作为应用，推广了一些重要结果．

关　键　词：主弱平坦性；同调分类；S-系

中图分类号：O152.7　　　文献标志码：A　　　文章编号：1673-9868(2015)08-0065-06

在本文中，令 $\mathbb{N}_+$ 表示正整数集，S 是序幺半群．

令 A 是一个非空偏序集，如果存在一个映射 $A\times S\longrightarrow A$，$(a, s)\longmapsto as$，满足：

(ⅰ) 对任意的 $a\in A$，$s,t\in S$，由 $s\leqslant t$ 可推出 $as\leqslant at$；对任意的 $a,b\in A$，$s\in S$，由 $a\leqslant b$ 可推出 $as\leqslant bs$；

(ⅱ) 对任意的 $a\in A$ 和 $s,t\in S$，有 $(as)t=a(st)$ 且 $a\cdot 1=a$.

则称 A 为序右 S-系．

序左 S-系 B 的定义类似．序左(右)S-系关于保序同态形成范畴，分别记为 S-POS 和 POS-S.

20世纪80年代，Fakhruddin等作者研究了序 S-系．近年来，关于该领域出现了一些新成果，例如文献[1－9]等．

设 S 是序幺半群，A 是序右 S-系．由文献[3]，如果对任意的 $s\in S$，$a,a'\in A$，若 $a\otimes s=a'\otimes s$ 在 $A\otimes S$ 中成立，则 $a\otimes s=a'\otimes s$ 在 $A\otimes Ss$ 中成立，则称 A 是主弱平坦的．

设 S 是序幺半群 S 中的元素，如果存在 $x\in S$ 使得 $s=sxs$，则称 S 是正则的．如果 S 中每一个元素正则，则称序幺半群 S 是正则的．文献[3]提出一个公开问题：如果所有的序 S-系是主弱平坦的，那么 S 是否一定是正则的？2007年，文献[4]给出了一个肯定回答．

设 S 为序幺半群，如果对任意的 $p,q\in S$，存在 $u\in S$，使得 $up=uq$，则称 S 是弱左可收缩的．如果对任意的 $s,t\in S$，存在 $u,v\in S$，使得 $us\leqslant vt$，则称 S 是弱右可逆的．

在本文中，我们给出了序 S-系范畴中主弱平坦性的一个推广，运用这个新的性质，得到了一些包含正则序幺半群的更广的序幺半群类．这些新的序幺半群类，无论在环论还是半群理论中，都有其应用背景．同时，本文的主要结果推广了一些已知的重要结论．

设 S 是序幺半群，称序右 S-系 A_S 满足条件(P)，如果对任意的 $a,b\in A$，$s,t\in S$，若 $as\leqslant bt$，则存在 $u,v\in S$，$c\in A$，使得 $a=cu$，$b=cv$，$us\leqslant vt$.

设 S 是序幺半群，I 是 S 中的非空集合．我们说 I 是 S 的右理想，指的是 $IS\subseteq I$(不一定是序右理

---

① 收稿日期：2014-10-27

基金项目：国家自然科学基金项目(11461060)；甘肃省高校基本科研业务费项目．

作者简介：乔虎生(1974-)，男，甘肃灵台人，教授，主要从事半群代数理论的研究．

想). S的两次拷贝,并以其真右理想I为核的融合余积,在研究S-系的同调分类问题时是非常重要的一个工具,一般记作$A(I)$,其定义和偏序参见文献[2].关于序S-系中主弱平坦性的更多讨论,可以参见文献[3].

首先我们给出序S-系上主弱平坦性的一个推广.

定义1 令A是一个序右S-系,m为固定的正整数.如果对任意的$a,a'\in A$,$s\in S$,若$a\otimes s^m=a'\otimes s^m$在$A\otimes S$中成立,则存在$n\in \mathbb{N}_+$,使得$a\otimes s^n=a'\otimes s^n$在$A\otimes Ss^n$中成立,则称$A$为$(m,n)$-主弱平坦的.

注1 由定义1,一个序右S-系A是$(1,1)$-主弱平坦的当且仅当它是主弱平坦的,我们后面将证明(m,n)-主弱平坦性是比主弱平坦性更广的一类性质.

设I是序幺半群S的真右理想,K是序幺半群S的凸的真右理想.我们将给出$A(I)$和S/K是(m,n)-主弱平坦系的充要条件.

首先,我们考虑$A(I)$何时是(m,n)-主弱平坦的.

命题1 令I是序幺半群S的真右理想,m为固定的正整数.$A(I)$是(m,n)-主弱平坦的当且仅当对任意$s\in S-I$,$u\in S$,若$su^m\in I$,则存在$n\in\mathbb{N}_+$以及$j\in I$,使得$su^n=ju^n$.

证 **必要性** 对任意的$s\in S-I$以及$u\in S$,若$su^m\in I$,则在$A(I)\otimes S$中有

$$(x,s)\otimes u^m=(y,s)\otimes u^m$$

由于$A(I)$是(m,n)-主弱平坦的,故存在$n\in\mathbb{N}_+$,使得

$$(x,s)\otimes u^n=(y,s)\otimes u^n$$

在$A(I)\otimes Su^n$中成立.那么由文献[8]的定理5.2,存在$s_1,\cdots,s_p,u_1,v_1,\cdots,u_p,v_p\in S$,$w_1,\cdots,w_p\in\{x,y,z\}$,使得:

$$\begin{array}{ll}
(x,s)\leqslant(w_1,s_1)u_1 & \\
(w_1,s_1)v_1\leqslant(w_2,s_2)u_2 & u_1u^n\leqslant v_1u^n\\
(w_2,s_2)v_2\leqslant(w_3,s_3)u_3 & u_2u^n\leqslant v_2u^n\\
\vdots & \vdots\\
(w_p,s_p)v_p\leqslant(y,s) & u_pu^n\leqslant v_pu^n
\end{array}$$

令$s=s_0v_0=s_{p+1}u_{p+1}$.由$A(I)$的定义,存在$k\in\{0,1,\cdots,p\}$,$j\in I$,使得$s_kv_k\leqslant j\leqslant s_{k+1}u_{k+1}$.因此,我们有

$$su^n\leqslant s_1u_1u^n\leqslant\cdots\leqslant s_kv_ku^n\leqslant ju^n\leqslant s_{k+1}u_{k+1}u^n\leqslant\cdots\leqslant s_pv_pu^n\leqslant su^n$$

由于偏序关系具有反对称性,我们有$ju^n=su^n$.

充分性 对任意的$a,a'\in A(I)$,$u\in S$,假设$a\otimes u^m=a'\otimes u^m$在$A(I)\otimes S$中成立.因为$(x,1)S\cong S\cong(y,1)S$,即$A(I)$是自由的序$S$-系,如果$a,a'\in(x,1)S$或$a,a'\in(y,1)S$,那么$A(I)$是$(m,n)$-主弱平坦的.那么不失一般性,我们仅考虑$a=(x,s)$,$a'=(y,t)$ $(s,t\in S-I)$的情形.因为在$A(I)\otimes S$中有$(x,s)\otimes u^m=(y,t)\otimes u^m$,那么$su^m=tu^m\in I$.由假设,总可以找到某个$n\in\mathbb{N}_+$,$j\in I$,使得$su^n=tu^n=ju^n$,则

$$\begin{aligned}(x,s)\otimes u^n=&(x,1)\otimes su^n=(x,1)\otimes ju^n=(z,j)\otimes u^n=\\&(y,1)\otimes ju^n=(y,1)\otimes tu^n=(y,t)\otimes u^n\end{aligned}$$

在$A(I)\otimes Su^n$中成立.

接下来我们考虑Rees商序S-系S/K是(m,n)-主弱平坦系的判别依据.

命题2 设K_S是序幺半群S的凸真右理想,m是固定的正整数.以下条件等价:

(i) S/K是(m,n)-主弱平坦的;

(ii) 对任意$s,u\in S$,若$su^m\in K$,则存在$n\in\mathbb{N}_+$和$k,k'\in K$,使得$ku^n\leqslant su^n\leqslant k'u^n$.

证　(i)⇒(ii)　假设S/K是(m, n)-主弱平坦的. 对任意的$s, u \in S$，如果$su^m \in K$，任取$k \in K$，显然在$S/K \otimes S$中有

$$[s] \otimes u^m = [k] \otimes u^m$$

由于S/K是(m, n)-主弱平坦的，因此存在$n \in \mathbb{N}_+$，使得在$S/K \otimes Su^n$中有

$$[s] \otimes u^n = [k] \otimes u^n$$

显然在$S/K \otimes Su^n$中有

$$[1] \otimes su^n = [1] \otimes ku^n$$

由文献[3]的引理4，存在$k_i, k_i', l_j, l_j' \in K(i = 2, 3, \cdots, p;\ j = 2, 3, \cdots, q)$，使得：

$$\begin{gathered} su^n \leqslant k_2 u^n \\ k_2' u^n \leqslant k_3 u^n \\ \vdots \\ k_p' u^n \leqslant ku^n \\ ku^n \leqslant l_2 u^n \\ l_2' u^n \leqslant l_3 u^n \\ \vdots \\ l_q' u^n \leqslant su^n \end{gathered}$$

由$su^n \leqslant k_2 u^n$和$l_q' u^n \leqslant su^n$，结论得证. 当然，如果$su^n = ku^n$，结论显然成立.

(ii)⇒(i)　假设$s, t, u \in S$，且在$S/K \otimes S$中，$[s] \otimes u^m = [t] \otimes u^m$成立. 如果$su^m = tu^m$，那么自然地，$[s] \otimes u^m = [t] \otimes u^m$在$S/K \otimes Su^m$中成立，把$n$取成$m$即可. 否则，由文献[3]的引理3，$su^m, tu^m \in K_S$. 由假设，总存在$k_1, k_1', k_2, k_2' \in K$以及$n \in \mathbb{N}_+$，使得：

$$\begin{gathered} k_1 u^n \leqslant su^n \leqslant k_1' u^n \\ k_2 u^n \leqslant tu^n \leqslant k_2' u^n \end{gathered}$$

在$S/K \otimes Su^n$中，有

$$[1] \otimes su^n \leqslant [1] \otimes k_1' u^n = [k_1'] \otimes u^n = [k_2] \otimes u^n = [1] \otimes k_2 u^n \leqslant [1] \otimes tu^n$$

且

$$[1] \otimes tu^n \leqslant [1] \otimes k_2' u^n = [k_2'] \otimes u^n = [k_1] \otimes u^n = [1] \otimes k_1 u^n \leqslant [1] \otimes su^n$$

即$[s] \otimes u^n = [t] \otimes u^n$在$S/K \otimes Su^n$中成立.

如果K_S是序幺半群S的凸真右理想，且满足命题2的条件(ii)，则我们称K_S是(m, n)-左稳定化右理想. 文献[3]中左稳定化右理想就是这里所讲的$(1, 1)$-左稳定化右理想.

由文献[6]，如K是序幺半群S的右理想，那么K是序幺半群S的凸右理想当且仅当$[K] = K$.

文献[3]研究了经典的平坦系列性质，如自由、投射、强平坦和条件(P)等，且这些性质之间的关系如下：自由$\Rightarrow$投射$\Rightarrow$强平坦$\Rightarrow$条件(P)$\Rightarrow (m, n)$-主弱平坦.

接下来，我们考虑(m, n)-主弱平坦序S-系的同调分类问题. 首先，我们给出所有(有限生成)序右S-系是(m, n)-主弱平坦的序幺半群的刻画.

定理 1　对任意序幺半群S以及固定的正整数m，以下几条等价：

(i) 所有序右S-系是(m, n)-主弱平坦的；

(ii) 所有有限生成的序右S-系是(m, n)-主弱平坦的；

(iii) 对任意的$s \in S$，存在$n \in \mathbb{N}_+$以及$x \in S$，使得$s^n = s^m x s^n$.

证　(i)⇒(ii) 显然.

(ii)⇒(iii)　设$s \in S$，如果$s^m S = S$，显然存在$x \in S$，使得$1 = s^m x$. 因此，对任意的$n \in \mathbb{N}_+$，都有$s^n = s^m x s^n$，否则$s^m S$是S的真右理想. 令$I = s^m S$，由于$A(I)$是有限生成的序右S-系，由假设，$A(I)$是$(m,$

n)-主弱平坦的. 因为 $s^m \in I$，由命题1，存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及 $j \in I$，使得 $s^n = js^n$. 因此存在 $x \in S$，使得 $j = s^m x$，从而 $s^n = s^m x s^n$.

(iii)⇒(i) 假设 A 是序右 S-系. 对任意的 $s \in S$，存在 $n \in \mathbb{N}_+$，$x \in S$，使得 $s^n = s^m x s^n$. 对任意 $a, a' \in A$，如果 $a \otimes s^m = a' \otimes s^m$ 在 $A \otimes S$ 中成立，那么

$$a \otimes s^n = a \otimes s^m x s^n = as^m \otimes xs^n = a's^m \otimes xs^n = a' \otimes s^m x s^n = a' \otimes s^n$$

在 $A \otimes Ss^n$ 中成立.

例1 在定理1中，若取 $m = 2$，则下面的序幺半群 S 满足定理1的第(ii)条，但不是正则的序幺半群，说明(m, n)-主弱平坦性是比主弱平坦性更广的性质：

设 S 是实数集上全体 $n \geqslant 2$ 阶严格上三角形矩阵和2阶单位矩阵构成的集合. 在 S 上规定乘法运算为：当两个同阶矩阵相乘时为普通矩阵的乘法；当两个不同阶矩阵相乘时取阶数较大的矩阵. 按照这个乘法，S 构成幺半群，单位元 $\mathbf{1}$ 就是2阶单位矩阵. 以下用 $\mathbf{0}_n$ 表示 n 阶零矩阵，用 $\mathbf{0}$ 表示 S 中任意阶零矩阵. 显然，对任意的 $\mathbf{0}, \mathbf{1} \neq \boldsymbol{s} \in S$，由 S 的构造，$\boldsymbol{s}$ 必为某个 n 阶严格上三角矩阵，那么显然有 $\boldsymbol{s}^n = \mathbf{0}_n = \boldsymbol{s}^2 \boldsymbol{x} \boldsymbol{s}^n$，这里 $\boldsymbol{x}$ 是 S 中任意一个阶数不大于 n 的矩阵，但 $\boldsymbol{s}$ 未必正则，因为如果存在 $\boldsymbol{y} \in S$，使得 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{sys}$，当 $\boldsymbol{s}$ 的阶数大于 $\boldsymbol{y}$ 的阶数时，$\boldsymbol{sys} = \boldsymbol{ss} = \boldsymbol{s}^2 = \boldsymbol{s}$，必有某个 n，使得 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^n = \mathbf{0}_n$，矛盾；当 $\boldsymbol{s}$ 的阶数等于 $\boldsymbol{y}$ 的阶数时，$\boldsymbol{sy}$ 不可能为单位元，显然由 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{sys}$ 可知 $\boldsymbol{sy}$ 为幂等元，故存在某个自然数 n，使得 $\boldsymbol{sy} = \mathbf{0}_n = \boldsymbol{s}$，矛盾；当 $\boldsymbol{s}$ 的阶数小于 $\boldsymbol{y}$ 的阶数时，$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{sys} = \boldsymbol{y}$，矛盾.

定理2 对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m，以下几条等价：

(i) 所有右 Rees 商序 S-系是(m, n)-主弱平坦的；

(ii) 对任意 $s \in S$，存在 $n \in \mathbb{N}_+$，以及 $s', s'' \in S$，使得 $s^m s' s^n \leqslant s^n \leqslant s^m s'' s^n$.

证 (i)⇒(ii) 对任意的 $s \in S$，$[s^m S]$ 是 S 的凸右理想. 如果 $[s^m S] = S$，那么由文献[6]的引理2.2，存在 $u, v \in S$，使得 $s^m u \leqslant 1 \leqslant s^m v$. 用 s^n 右乘，我们得到

$$s^m u s^n \leqslant s^n \leqslant s^m v s^n$$

如果 $[s^m S] \neq S$，那么 $[s^m S]$ 是 S 的凸真右理想. 由于 $s^m \in [s^m S]$，由命题2，存在 $k, k' \in [s^m S]$，使得 $ks^n \leqslant s^n \leqslant k' s^n$. 因为 $k \in [s^m S]$，存在 $x_1, y_1 \in S$，使得 $s^m x_1 \leqslant k \leqslant s^m y_1$. 用 s^n 右乘，我们得到

$$s^m x_1 s^n \leqslant ks^n \leqslant s^m y_1 s^n$$

另一方面，因为 $k' \in [s^m S]$，存在 $x_2, y_2 \in S$，使得 $s^m x_2 \leqslant k' \leqslant s^m y_2$. 用 s^n 右乘，我们有

$$s^m x_2 s^n \leqslant k' s^n \leqslant s^m y_2 s^n$$

因此我们有

$$s^m x_1 s^n \leqslant ks^n \leqslant s^n \leqslant k' s^n \leqslant s^m y_2 s^n$$

(ii)⇒(i) 让 K 是序幺半群 S 的凸右理想，我们将证明 S/K 是(m, n)-主弱平坦的. 如果 $K = S$，易知 S/K 是(m, n)-主弱平坦的，否则 K 是序幺半群 S 的凸真右理想. 对任意的 $u, v, s \in S$，假设 $[u] \otimes s^m = [v] \otimes s^m$. 如果 $us^m = vs^m$，显然 $[u] \otimes s^m = [v] \otimes s^m$ 在 $S/K \otimes Ss^m$ 中成立，取 n 等于 m 即可. 否则，由文献[3]的引理3，我们有 $us^m, vs^m \in K$. 由第(ii)条，存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及 $s', s'' \in S$，使得

$$s^m s' s^n \leqslant s^n \leqslant s^m s'' s^n$$

因此在 $S/K \otimes Ss^n$ 中，有

$$[u] \otimes s^n \leqslant [u] \otimes s^m s'' s^n = [us^m s''] \otimes s^n = [vs^m s'] \otimes s^n = [v] \otimes s^m s' s^n \leqslant [v] \otimes s^n$$

且

$$[v] \otimes s^n \leqslant [v] \otimes s^m s'' s^n = [vs^m s''] \otimes s^n = [us^m s'] \otimes s^n = [u] \otimes s^m s' s^n \leqslant [u] \otimes s^n$$

故在 $S/K \otimes Ss^n$ 中 $[u] \otimes s^n = v \otimes s^n$ 成立.

推论1 对任意序幺半群 S，以下几条等价：

(i) 所有 Rees 商序 S-系是主弱平坦的；

(ii) 对任意的$s \in S$，存在$s', s'' \in S$，使得$ss's \leqslant s \leqslant ss''s$.

例 2　设S是一个诣零的序幺半群(对任意的$1 \neq s \in S$，存在$n \in \mathrm{N}_+$，使得$s^n = 0$)，很容易证明：对任意的$s \in S$，如果$1 \neq s$，那么$sS \neq S$且$Ss \neq S$. 易知S满足定理 2 的(ii)，但是它不满足推论 1 的(ii). 因为对任意的$s \in S$，如果存在$s', s'' \in S$，使得$ss's \leqslant s \leqslant ss''s$，那么对任意的$n \in \mathrm{N}_+$，

$$(ss')^n s \leqslant s \leqslant s(s''s)^n$$

若$s \notin \{0, 1\}$，那么$(ss')^n s \leqslant s \leqslant s(s''s)^n$使得$s = 0$，矛盾.

接下来，我们考虑 Rees 商序S-系的(m, n)-主弱平坦性与其余经典平坦性质的一致性，即同调分类问题.

定理 3　对任意序幺半群S以及固定的正整数m，以下条件等价：

(i) 所有(m, n)-主弱平坦右 Rees 商序S-系是自由的；

(ii) $S = \{1\}$.

证　(i)⇒(ii)　因为Θ_S是(m, n)-主弱平坦的，由假设，Θ_S是自由的. 由文献[3]的定理 1，我们得到$S = \{1\}$.

(ii)⇒(i)　显然.

定理 4　对任意序幺半群S以及固定的正整数m，以下条件等价：

(i) 所有(m, n)-主弱平坦右 Rees 商序S-系是投射的；

(ii) S有左零元，且S没有真的(m, n)-左稳定凸右理想K，使得$|K| > 1$.

证　(i)⇒(ii)　由于Θ_S是(m, n)-主弱平坦的，由假设，Θ_S是投射的. 由文献[3]的定理 1 可知S有一个左零元. 假设S有一个真广义左稳定凸右理想K，使得$|K| > 1$. 由命题 2，S/K是(m, n)-主弱平坦的，因此它是投射的，由文献[6]的引理 1.8，$|K| = 1$，矛盾.

(ii)⇒(i)　设K是序幺半群S的凸右理想，且S/K是(m, n)-主弱平坦的. 如果K是序幺半群S的凸真右理想，由命题 2，K是序幺半群S的一个真广义左稳定凸右理想. 由假设知$|K| = 1$，故是S/K投射的. 如果$K = S$，则$S/K \simeq \Theta_S$是(m, n)-主弱平坦的. 因为S有左零元，由文献[3]的定理 1，S/K是投射的.

定理 5　对任意序幺半群S以及固定的正整数m，以下几条等价：

(i) 所有(m, n)-主弱平坦右 Rees 商序S-系是强平坦的；

(ii) S是可收缩的，且S没有真的(m, n)-左稳定化凸右理想K，使得$|K| > 1$.

证　(i)⇒(ii)　Θ_S是(m, n)-主弱平坦的，由假设，Θ_S是强平坦的. 由文献[3]的定理 1 可得S是左可收缩的. 假设S有真(m, n)-左稳定化凸右理想K，使得$|K| > 1$. 由命题 2，S/K是(m, n)-主弱平坦的，由文献[6]的引理 1.8，它是强平坦的，可得$|K| = 1$，矛盾.

(ii)⇒(i)　令K是序幺半群S的一个凸右理想，S/K是(m, n)-主弱平坦的. 如果K是序幺半群S的凸真右理想，由命题 2，K是S的一个真的(m, n)-左稳定化凸右理想. 由假设，$|K| = 1$，即S/K是强平坦的. 如果$K = S$，则$S/K \simeq \Theta_S$是(m, n)-主弱平坦的. 由于S是左可收缩的，故由文献[3]的定理 1 知S/K是强平坦的.

定理 6　对任意序幺半群S以及固定的正整数m，以下条件等价：

(i) 所有(m, n)-主弱平坦右 Rees 商序S-系满足条件(P)；

(ii) S是弱右可逆的，且S没有真的(m, n)-左稳定化凸右理想K，使得$|K| > 1$.

证　(i)⇒(ii)　Θ_S是(m, n)-主弱平坦的，由假设，Θ_S满足条件(P). 由文献[3]的定理 1 可知S是弱右可逆的. 假设S有一个真(m, n)-左稳定化凸右理想K，且$|K| > 1$. 由命题 2，S/K是(m, n)-主弱平坦的，因此它满足条件(P)，且由文献[6]的引理 1.8，$|K| = 1$，矛盾.

(ii)⇒(i)　K是序幺半群S的凸右理想，且S/K是(m, n)-主弱平坦的. 如果K是S的一个凸真右理

想，由命题2，K是S的一个真(m, n)-左稳定化右理想. 由假设，$|K|=1$，且S/K满足条件(P). 但是若$K=S$，则$S/K \simeq \Theta_S$是(m, n)-主弱平坦的. 由于S是弱右可逆的，由文献[3]的定理1可得S/K满足条件(P).

注2 本文的研究结果针对任意的序S-系. 很自然地，如果将序幺半群及序S-系的偏序都取成离散序，m,n都取成1，则很容易得到文献[7]中S-系的相关结果.

参考文献：

[1] BULMAN-FLEMING S, LAAN V. Lazard's Theorem for *S*-Posets [J]. Math Nachr, 2005, 278(15): 1743-1755.

[2] BULMAN-FLEMING S, MAHMOUDI M. The Category of *S*-Posets [J]. Semigroup Forum, 2005, 71(3): 443-461.

[3] BULMAN-FLEMING S, GUTERMUTH D, GILMOUR A, et al. Flatness Properties of *S*-Posets [J]. Comm Alg, 2006, 34(4): 1291-1317.

[4] QIAO Hu-sheng, LI Fang. When All *S*-Posets Are Principally Weakly Flat [J]. Semigroup Forum, 2007, 75(3): 536-542.

[5] QIAO Hu-sheng, LI Fang. The Flatness Properties of *S*-Poset $A(I)$ and Rees Factor *S*-Posets [J]. Semigroup Forum, 2008, 77(2): 306-315.

[6] QIAO Hu-sheng, LIU Zhong-kui. On the Homological Classification of Pomonoids by Their Rees Factor *S*-Posets [J]. Semigroup Forum, 2009, 79(2): 385-399.

[7] QIAO Hu-sheng, WEI Chong-qing. On a Generalization of Principal Weak Flatness Property [J]. Semigroup Forum, 2012, 85(1): 147-159.

[8] SHI Xiao-ping, LIU Zhong-kui, WANG Fang-gui, et al. Indecomposable, Projective and Flat *S*-Posets [J]. Comm Alg, 2005, 33(1): 235-251.

[9] SHI Xiao-ping. Strongly Flat and Po-Flat *S*-Posets [J]. Comm Alg, 2005, 33(12): 4515-4531.

On (m, n)-Principally Weakly Flat *S*-Posets

QIAO Hu-sheng, CHEN Xiao-fei

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Let S be a pomonoid and m,n be positive integrals. In this paper, we give a generalization of principally weakly flat *S*-poset and call it (m, n)-principally weakly flat poset. On this new property, the homological classification problems of *S*-posets are investigated. As applications, some known results are extended.

Key words: principal weak flatness; homological classification; *S*-poset

责任编辑 廖 坤