第37卷第8期 西南大学学报(自然科学版) 2015年8月
Vol. 37 No. 8 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Aug. 2015

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2015.08.011

关于(m, n)-主弱平坦序S-系[①]

乔虎生， 陈小飞

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：设S是序幺半群，m,n为正整数. 给出了主弱平坦序S-系的一个推广，称之为(m, n)-主弱平坦系. 在此新性质的基础上研究了序S-系的同调分类问题，作为应用，推广了一些重要结果.

关 键 词：主弱平坦性；同调分类；S-系

中图分类号：O152.7 文献标志码：A 文章编号：1673-9868(2015)08-0065-06

在本文中，令 $\mathbb{N}_+$ 表示正整数集，S 是序幺半群.

令 A 是一个非空偏序集，如果存在一个映射 $A\times S\longrightarrow A$，$(a, s)\longmapsto as$，满足：

(i) 对任意的 $a\in A$，$s,t\in S$，由 $s\leqslant t$ 可推出 $as\leqslant at$；对任意的 $a,b\in A$，$s\in S$，由 $a\leqslant b$ 可推出 $as\leqslant bs$；

(ii) 对任意的 $a\in A$ 和 $s,t\in S$，有 $(as)t=a(st)$ 且 $a\cdot 1=a$.

则称 A 为序右 S-系.

序左 S-系 B 的定义类似. 序左(右)S-系关于保序同态形成范畴，分别记为 S-POS 和 POS-S.

20世纪80年代，Fakhruddin等作者研究了序 S-系. 近年来，关于该领域出现了一些新成果，例如文献[1-9]等.

设 S 是序幺半群，A 是序右 S-系. 由文献[3]，如果对任意的 $s\in S$，$a,a'\in A$，若 $a\otimes s=a'\otimes s$ 在 $A\otimes S$ 中成立，则 $a\otimes s=a'\otimes s$ 在 $A\otimes Ss$ 中成立，则称 A 是主弱平坦的.

设 S 是序幺半群 S 中的元素，如果存在 $x\in S$ 使得 $s=sxs$，则称 S 是正则的. 如果 S 中每一个元素正则，则称序幺半群 S 是正则的. 文献[3]提出一个公开问题：如果所有的序 S-系是主弱平坦的，那么 S 是否一定是正则的？2007年，文献[4]给出了一个肯定回答.

设 S 为序幺半群，如果对任意的 $p,q\in S$，存在 $u\in S$，使得 $up=uq$，则称 S 是弱左可收缩的. 如果对任意的 $s,t\in S$，存在 $u,v\in S$，使得 $us\leqslant vt$，则称 S 是弱右可逆的.

在本文中，我们给出了序 S-系范畴中主弱平坦性的一个推广，运用这个新的性质，得到了一些包含正则序幺半群的更广的序幺半群类. 这些新的序幺半群类，无论在环论还是半群理论中，都有其应用背景. 同时，本文的主要结果推广了一些已知的重要结论.

设 S 是序幺半群，称序右 S-系 A_S 满足条件(P)，如果对任意的 $a,b\in A$，$s,t\in S$，若 $as\leqslant bt$，则存在 $u,v\in S$，$c\in A$，使得 $a=cu$，$b=cv$，$us\leqslant vt$.

设 S 是序幺半群，I 是 S 中的非空集合. 我们说 I 是 S 的右理想，指的是 $IS\subseteq I$(不一定是序右理

① 收稿日期：2014-10-27
基金项目：国家自然科学基金项目(11461060)；甘肃省高校基本科研业务费项目.
作者简介：乔虎生(1974-)，男，甘肃灵台人，教授，主要从事半群代数理论的研究.

想). S 的两次拷贝,并以其真右理想 I 为核的融合余积,在研究 S-系的同调分类问题时是非常重要的一个工具,一般记作 $A(I)$,其定义和偏序参见文献[2]. 关于序 S-系中主弱平坦性的更多讨论,可以参见文献[3].

首先我们给出序 S-系上主弱平坦性的一个推广.

定义1 令 A 是一个序右 S-系,m 为固定的正整数. 如果对任意的 $a, a' \in A$,$s \in S$,若 $a \otimes s^m = a' \otimes s^m$ 在 $A \otimes S$ 中成立,则存在 $n \in \mathbb{N}_+$,使得 $a \otimes s^n = a' \otimes s^n$ 在 $A \otimes Ss^n$ 中成立,则称 A 为(m, n)-主弱平坦的.

注1 由定义1,一个序右 S-系 A 是$(1, 1)$-主弱平坦的当且仅当它是主弱平坦的,我们后面将证明(m, n)-主弱平坦性是比主弱平坦性更广的一类性质.

设 I 是序幺半群 S 的真右理想,K 是序幺半群 S 的凸的真右理想. 我们将给出 $A(I)$ 和 S/K 是(m, n)-主弱平坦系的充要条件.

首先,我们考虑 $A(I)$ 何时是(m, n)-主弱平坦的.

命题1 令 I 是序幺半群 S 的真右理想,m 为固定的正整数. $A(I)$ 是(m, n)-主弱平坦的当且仅当对任意 $s \in S - I$,$u \in S$,若 $su^m \in I$,则存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 以及 $j \in I$,使得 $su^n = ju^n$.

证 **必要性** 对任意的 $s \in S - I$ 以及 $u \in S$,若 $su^m \in I$,则在 $A(I) \otimes S$ 中有

$$(x, s) \otimes u^m = (y, s) \otimes u^m$$

由于 $A(I)$ 是(m, n)-主弱平坦的,故存在 $n \in \mathbb{N}_+$,使得

$$(x, s) \otimes u^n = (y, s) \otimes u^n$$

在 $A(I) \otimes Su^n$ 中成立. 那么由文献[8]的定理5.2,存在 $s_1, \cdots, s_p, u_1, v_1, \cdots, u_p, v_p \in S$,$w_1, \cdots, w_p \in \{x, y, z\}$,使得:

$$\begin{array}{ll}
(x, s) \leqslant (w_1, s_1)u_1 & \\
(w_1, s_1)v_1 \leqslant (w_2, s_2)u_2 & u_1u^n \leqslant v_1u^n \\
(w_2, s_2)v_2 \leqslant (w_3, s_3)u_3 & u_2u^n \leqslant v_2u^n \\
\vdots & \vdots \\
(w_p, s_p)v_p \leqslant (y, s) & u_pu^n \leqslant v_pu^n
\end{array}$$

令 $s = s_0v_0 = s_{p+1}u_{p+1}$. 由 $A(I)$ 的定义,存在 $k \in \{0, 1, \cdots, p\}$,$j \in I$,使得 $s_kv_k \leqslant j \leqslant s_{k+1}u_{k+1}$. 因此,我们有

$$su^n \leqslant s_1u_1u^n \leqslant \cdots \leqslant s_kv_ku^n \leqslant ju^n \leqslant s_{k+1}u_{k+1}u^n \leqslant \cdots \leqslant s_pv_pu^n \leqslant su^n$$

由于偏序关系具有反对称性,我们有 $ju^n = su^n$.

充分性 对任意的 $a, a' \in A(I)$,$u \in S$,假设 $a \otimes u^m = a' \otimes u^m$ 在 $A(I) \otimes S$ 中成立. 因为$(x, 1)S \cong S \cong (y, 1)S$,即 $A(I)$ 是自由的序 S-系,如果 $a, a' \in (x, 1)S$ 或 $a, a' \in (y, 1)S$,那么 $A(I)$ 是(m, n)-主弱平坦的. 那么不失一般性,我们仅考虑 $a = (x, s)$,$a' = (y, t)$ $(s, t \in S - I)$ 的情形. 因为在 $A(I) \otimes S$ 中有$(x, s) \otimes u^m = (y, t) \otimes u^m$,那么 $su^m = tu^m \in I$. 由假设,总可以找到某个 $n \in \mathbb{N}_+$,$j \in I$,使得 $su^n = tu^n = ju^n$,则

$$\begin{aligned}(x, s) \otimes u^n = &(x, 1) \otimes su^n = (x, 1) \otimes ju^n = (z, j) \otimes u^n = \\ &(y, 1) \otimes ju^n = (y, 1) \otimes tu^n = (y, t) \otimes u^n\end{aligned}$$

在 $A(I) \otimes Su^n$ 中成立.

接下来我们考虑 Rees 商序 S-系 S/K 是(m, n)-主弱平坦系的判别依据.

命题2 设 K_S 是序幺半群 S 的凸真右理想,m 是固定的正整数. 以下条件等价:

(ⅰ) S/K 是(m, n)-主弱平坦的;

(ⅱ) 对任意 $s, u \in S$,若 $su^m \in K$,则存在 $n \in \mathbb{N}_+$ 和 $k, k' \in K$,使得 $ku^n \leqslant su^n \leqslant k'u^n$.

证　(ⅰ)⇒(ⅱ)　假设S/K是(m,n)-主弱平坦的．对任意的$s,u\in S$，如果$su^m\in K$，任取$k\in K$，显然在$S/K\otimes S$中有

$$[s]\otimes u^m=[k]\otimes u^m$$

由于S/K是(m,n)-主弱平坦的，因此存在$n\in\mathrm{N}_+$，使得在$S/K\otimes Su^n$中有

$$[s]\otimes u^n=[k]\otimes u^n$$

显然在$S/K\otimes Su^n$中有

$$[1]\otimes su^n=[1]\otimes ku^n$$

由文献[3]的引理4，存在$k_i,k_i',l_j,l_j'\in K(i=2,3,\cdots,p;\ j=2,3,\cdots,q)$，使得：

$$\begin{gathered}su^n\leqslant k_2u^n\\ k_2'u^n\leqslant k_3u^n\\ \vdots\\ k_p'u^n\leqslant ku^n\\ ku^n\leqslant l_2u^n\\ l_2'u^n\leqslant l_3u^n\\ \vdots\\ l_q'u^n\leqslant su^n\end{gathered}$$

由$su^n\leqslant k_2u^n$和$l_q'u^n\leqslant su^n$，结论得证．当然，如果$su^n=ku^n$，结论显然成立．

(ⅱ)⇒(ⅰ)　假设$s,t,u\in S$，且在$S/K\otimes S$中，$[s]\otimes u^m=[t]\otimes u^m$成立．如果$su^m=tu^m$，那么自然地，$[s]\otimes u^m=[t]\otimes u^m$在$S/K\otimes Su^m$中成立，把$n$取成$m$即可．否则，由文献[3]的引理3，$su^m,tu^m\in K_S$．由假设，总存在$k_1,k_1',k_2,k_2'\in K$以及$n\in\mathrm{N}_+$，使得：

$$\begin{gathered}k_1u^n\leqslant su^n\leqslant k_1'u^n\\ k_2u^n\leqslant tu^n\leqslant k_2'u^n\end{gathered}$$

在$S/K\otimes Su^n$中，有

$$[1]\otimes su^n\leqslant[1]\otimes k_1'u^n=[k_1']\otimes u^n=[k_2]\otimes u^n=[1]\otimes k_2u^n\leqslant[1]\otimes tu^n$$

且

$$[1]\otimes tu^n\leqslant[1]\otimes k_2'u^n=[k_2']\otimes u^n=[k_1]\otimes u^n=[1]\otimes k_1u^n\leqslant[1]\otimes su^n$$

即$[s]\otimes u^n=[t]\otimes u^n$在$S/K\otimes Su^n$中成立．

如果K_S是序幺半群S的凸真右理想，且满足命题2的条件(ⅱ)，则我们称K_S是(m,n)-左稳定化右理想．文献[3]中左稳定化右理想就是这里所讲的$(1,1)$-左稳定化右理想．

由文献[6]，如K是序幺半群S的右理想，那么K是序幺半群S的凸右理想当且仅当$[K]=K$．

文献[3]研究了经典的平坦系列性质，如自由、投射、强平坦和条件(P)等，且这些性质之间的关系如下：自由⇒投射⇒强平坦⇒条件(P)⇒(m,n)-主弱平坦．

接下来，我们考虑(m,n)-主弱平坦序S-系的同调分类问题．首先，我们给出所有(有限生成)序右S-系是(m,n)-主弱平坦的序幺半群的刻画．

定理1　对任意序幺半群S以及固定的正整数m，以下几条等价：

(ⅰ) 所有序右S-系是(m,n)-主弱平坦的；

(ⅱ) 所有有限生成的序右S-系是(m,n)-主弱平坦的；

(ⅲ) 对任意的$s\in S$，存在$n\in\mathrm{N}_+$以及$x\in S$，使得$s^n=s^mxs^n$．

证　(ⅰ)⇒(ⅱ) 显然．

(ⅱ)⇒(ⅲ)　设$s\in S$，如果$s^mS=S$，显然存在$x\in S$，使得$1=s^mx$．因此，对任意的$n\in\mathrm{N}_+$，都有$s^n=s^mxs^n$，否则s^mS是S的真右理想．令$I=s^mS$，由于$A(I)$是有限生成的序右S-系，由假设，$A(I)$是$(m,$

n)-主弱平坦的. 因为 $s^m \in I$，由命题 1，存在 $n \in \mathrm{N}_+$ 以及 $j \in I$，使得 $s^n = js^n$. 因此存在 $x \in S$，使得 $j = s^m x$，从而 $s^n = s^m x s^n$.

(iii)⇒(i) 假设 A 是序右 S-系. 对任意的 $s \in S$，存在 $n \in \mathrm{N}_+$，$x \in S$，使得 $s^n = s^m x s^n$. 对任意 $a, a' \in A$，如果 $a \otimes s^m = a' \otimes s^m$ 在 $A \otimes S$ 中成立，那么

$$a \otimes s^n = a \otimes s^m x s^n = as^m \otimes xs^n = a' s^m \otimes xs^n = a' \otimes s^m x s^n = a' \otimes s^n$$

在 $A \otimes Ss^n$ 中成立.

例 1 在定理 1 中，若取 $m = 2$，则下面的序幺半群 S 满足定理 1 的第 (ii) 条，但不是正则的序幺半群，说明(m，n)-主弱平坦性是比主弱平坦性更广的性质：

设 S 是实数集上全体 $n \geqslant 2$ 阶严格上三角形矩阵和 2 阶单位矩阵构成的集合. 在 S 上规定乘法运算为：当两个同阶矩阵相乘时为普通矩阵的乘法；当两个不同阶矩阵相乘时取阶数较大的矩阵. 按照这个乘法，S 构成幺半群，单位元 $\mathbf{1}$ 就是 2 阶单位矩阵. 以下用 $\mathbf{0}_n$ 表示 n 阶零矩阵，用 $\mathbf{0}$ 表示 S 中任意阶零矩阵. 显然，对任意的 $\mathbf{0}, \mathbf{1} \neq \boldsymbol{s} \in S$，由 S 的构造，$\boldsymbol{s}$ 必为某个 n 阶严格上三角矩阵，那么显然有 $\boldsymbol{s}^n = \mathbf{0}_n = \boldsymbol{s}^2 \boldsymbol{x} \boldsymbol{s}^n$，这里 $\boldsymbol{x}$ 是 S 中任意一个阶数不大于 n 的矩阵，但 $\boldsymbol{s}$ 未必正则，因为如果存在 $\boldsymbol{y} \in S$，使得 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{sys}$，当 $\boldsymbol{s}$ 的阶数大于 $\boldsymbol{y}$ 的阶数时，$\boldsymbol{sys} = \boldsymbol{ss} = \boldsymbol{s}^2 = \boldsymbol{s}$，必有某个 n，使得 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^n = \mathbf{0}_n$，矛盾；当 $\boldsymbol{s}$ 的阶数等于 $\boldsymbol{y}$ 的阶数时，$\boldsymbol{sy}$ 不可能为单位元，显然由 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{sys}$ 可知 $\boldsymbol{sy}$ 为幂等元，故存在某个自然数 n，使得 $\boldsymbol{sy} = \mathbf{0}_n = \boldsymbol{s}$，矛盾；当 $\boldsymbol{s}$ 的阶数小于 $\boldsymbol{y}$ 的阶数时，$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{sys} = \boldsymbol{y}$，矛盾.

定理 2 对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m，以下几条等价：

(i) 所有右 Rees 商序 S-系是(m，n)-主弱平坦的；

(ii) 对任意 $s \in S$，存在 $n \in \mathrm{N}_+$，以及 $s', s'' \in S$，使得 $s^m s' s^n \leqslant s^n \leqslant s^m s'' s^n$.

证 (i)⇒(ii) 对任意的 $s \in S$，$[s^m S]$ 是 S 的凸右理想. 如果 $[s^m S] = S$，那么由文献[6]的引理 2.2，存在 $u, v \in S$，使得 $s^m u \leqslant 1 \leqslant s^m v$. 用 s^n 右乘，我们得到

$$s^m u s^n \leqslant s^n \leqslant s^m v s^n$$

如果 $[s^m S] \neq S$，那么 $[s^m S]$ 是 S 的凸真右理想. 由于 $s^m \in [s^m S]$，由命题 2，存在 $k, k' \in [s^m S]$，使得 $ks^n \leqslant s^n \leqslant k' s^n$. 因为 $k \in [s^m S]$，存在 $x_1, y_1 \in S$，使得 $s^m x_1 \leqslant k \leqslant s^m y_1$. 用 s^n 右乘，我们得到

$$s^m x_1 s^n \leqslant ks^n \leqslant s^m y_1 s^n$$

另一方面，因为 $k' \in [s^m S]$，存在 $x_2, y_2 \in S$，使得 $s^m x_2 \leqslant k' \leqslant s^m y_2$. 用 s^n 右乘，我们有

$$s^m x_2 s^n \leqslant k' s^n \leqslant s^m y_2 s^n$$

因此我们有

$$s^m x_1 s^n \leqslant ks^n \leqslant s^n \leqslant k' s^n \leqslant s^m y_2 s^n$$

(ii)⇒(i) 让 K 是序幺半群 S 的凸右理想，我们将证明 S/K 是(m，n)-主弱平坦的. 如果 $K = S$，易知 S/K 是(m，n)-主弱平坦的，否则 K 是序幺半群 S 的凸真右理想. 对任意的 $u, v, s \in S$，假设 $[u] \otimes s^m = [v] \otimes s^m$. 如果 $us^m = vs^m$，显然 $[u] \otimes s^n = [v] \otimes s^n$ 在 $S/K \otimes Ss^m$ 中成立，取 n 等于 m 即可. 否则，由文献[3]的引理 3，我们有 $us^m, vs^m \in K$. 由第 (ii) 条，存在 $n \in \mathrm{N}_+$ 以及 $s', s'' \in S$，使得

$$s^m s' s^n \leqslant s^n \leqslant s^m s'' s^n$$

因此在 $S/K \otimes Ss^n$ 中，有

$$[u] \otimes s^n \leqslant [u] \otimes s^m s'' s^n = [us^m s''] \otimes s^n = [vs^m s'] \otimes s^n = [v] \otimes s^m s' s^n \leqslant [v] \otimes s^n$$

且

$$[v] \otimes s^n \leqslant [v] \otimes s^m s'' s^n = [vs^m s''] \otimes s^n = [us^m s'] \otimes s^n = [u] \otimes s^m s' s^n \leqslant [u] \otimes s^n$$

故在 $S/K \otimes Ss^n$ 中 $[u] \otimes s^n = v \otimes s^n$ 成立.

推论 1 对任意序幺半群 S，以下几条等价：

(i) 所有 Rees 商序 S-系是主弱平坦的；

(ⅱ) 对任意的 $s\in S$，存在 $s',s''\in S$，使得 $ss's\leqslant s\leqslant ss''s$.

例 2　设 S 是一个诣零的序幺半群(对任意的 $1\neq s\in S$，存在 $n\in \mathrm{N}_+$，使得 $s^n=0$)，很容易证明：对任意的 $s\in S$，如果 $1\neq s$，那么 $sS\neq S$ 且 $Ss\neq S$. 易知 S 满足定理 2 的 (ⅱ)，但是它不满足推论 1 的 (ⅱ). 因为对任意的 $s\in S$，如果存在 $s',s''\in S$，使得 $ss's\leqslant s\leqslant ss''s$，那么对任意的 $n\in \mathrm{N}_+$，

$$(ss')^n s\leqslant s\leqslant s(s''s)^n$$

若 $s\notin\{0,1\}$，那么$(ss')^n s\leqslant s\leqslant s(s''s)^n$ 使得 $s=0$，矛盾.

接下来，我们考虑 Rees 商序 S-系的(m, n)-主弱平坦性与其余经典平坦性质的一致性，即同调分类问题.

定理 3　对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m，以下条件等价：

(ⅰ) 所有(m, n)-主弱平坦右 Rees 商序 S-系是自由的；

(ⅱ) $S=\{1\}$.

证　(ⅰ)⇒(ⅱ)　因为 Θ_S 是(m, n)-主弱平坦的，由假设，Θ_S 是自由的. 由文献[3]的定理 1，我们得到 $S=\{1\}$.

(ⅱ)⇒(ⅰ)　显然.

定理 4　对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m，以下条件等价：

(ⅰ) 所有(m, n)-主弱平坦右 Rees 商序 S-系是投射的；

(ⅱ) S 有左零元，且 S 没有真的(m, n)-左稳定凸右理想 K，使得 $|K|>1$.

证　(ⅰ)⇒(ⅱ)　由于 Θ_S 是(m, n)-主弱平坦的，由假设，Θ_S 是投射的. 由文献[3]的定理 1 可知 S 有一个左零元. 假设 S 有一个真广义左稳定凸右理想 K，使得 $|K|>1$. 由命题 2，S/K 是(m, n)-主弱平坦的，因此它是投射的，由文献[6]的引理 1.8，$|K|=1$，矛盾.

(ⅱ)⇒(ⅰ)　设 K 是序幺半群 S 的凸右理想，且 S/K 是(m, n)-主弱平坦的. 如果 K 是序幺半群 S 的凸真右理想，由命题 2，K 是序幺半群 S 的一个真广义左稳定凸右理想. 由假设知 $|K|=1$，故是 S/K 投射的. 如果 $K=S$，则 $S/K\simeq\Theta_S$ 是(m, n)-主弱平坦的. 因为 S 有左零元，由文献[3]的定理 1，S/K 是投射的.

定理 5　对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m，以下几条等价：

(ⅰ) 所有(m, n)-主弱平坦右 Rees 商序 S-系是强平坦的；

(ⅱ) S 是可收缩的，且 S 没有真的(m, n)-左稳定化凸右理想 K，使得 $|K|>1$.

证　(ⅰ)⇒(ⅱ)　Θ_S 是(m, n)-主弱平坦的，由假设，Θ_S 是强平坦的. 由文献[3]的定理 1 可得 S 是左可收缩的. 假设 S 有真(m, n)-左稳定化凸右理想 K，使得 $|K|>1$. 由命题 2，S/K 是(m, n)-主弱平坦的，由文献[6]的引理 1.8，它是强平坦的，可得 $|K|=1$，矛盾.

(ⅱ)⇒(ⅰ)　令 K 是序幺半群 S 的一个凸右理想，S/K 是(m, n)-主弱平坦的. 如果 K 是序幺半群 S 的凸真右理想，由命题 2，K 是 S 的一个真的(m, n)-左稳定化凸右理想. 由假设，$|K|=1$，即 S/K 是强平坦的. 如果 $K=S$，则 $S/K\simeq\Theta_S$ 是(m, n)-主弱平坦的. 由于 S 是左可收缩的，故由文献[3]的定理 1 知 S/K 是强平坦的.

定理 6　对任意序幺半群 S 以及固定的正整数 m，以下条件等价：

(ⅰ) 所有(m, n)-主弱平坦右 Rees 商序 S-系满足条件(P)；

(ⅱ) S 是弱右可逆的，且 S 没有真的(m, n)-左稳定化凸右理想 K，使得 $|K|>1$.

证　(ⅰ)⇒(ⅱ)　Θ_S 是(m, n)-主弱平坦的，由假设，Θ_S 满足条件(P). 由文献[3]的定理 1 可知 S 是弱右可逆的. 假设 S 有一个真(m, n)-左稳定化凸右理想 K，且 $|K|>1$. 由命题 2，S/K 是(m, n)-主弱平坦的，因此它满足条件(P)，且由文献[6]的引理 1.8，$|K|=1$，矛盾.

(ⅱ)⇒(ⅰ)　K 是序幺半群 S 的凸右理想，且 S/K 是(m, n)-主弱平坦的. 如果 K 是 S 的一个凸真右理

想，由命题2，K 是 S 的一个真(m, n)-左稳定化右理想. 由假设，$|K|=1$，且 S/K 满足条件(P). 但是若 $K=S$，则 $S/K \simeq \Theta_S$ 是(m, n)-主弱平坦的. 由于 S 是弱右可逆的，由文献[3]的定理1可得 S/K 满足条件(P).

注2 本文的研究结果针对任意的序 S-系. 很自然地，如果将序幺半群及序 S-系的偏序都取成离散序，m,n 都取成1，则很容易得到文献[7]中 S-系的相关结果.

参考文献:

[1] BULMAN-FLEMING S, LAAN V. Lazard's Theorem for S-Posets [J]. Math Nachr, 2005, 278(15): 1743-1755.

[2] BULMAN-FLEMING S, MAHMOUDI M. The Category of S-Posets [J]. Semigroup Forum, 2005, 71(3): 443-461.

[3] BULMAN-FLEMING S, GUTERMUTH D, GILMOUR A, et al. Flatness Properties of S-Posets [J]. Comm Alg, 2006, 34(4): 1291-1317.

[4] QIAO Hu-sheng, LI Fang. When All S-Posets Are Principally Weakly Flat [J]. Semigroup Forum, 2007, 75(3): 536-542.

[5] QIAO Hu-sheng, LI Fang. The Flatness Properties of S-Poset $A(I)$ and Rees Factor S-Posets [J]. Semigroup Forum, 2008, 77(2): 306-315.

[6] QIAO Hu-sheng, LIU Zhong-kui. On the Homological Classification of Pomonoids by Their Rees Factor S-Posets [J]. Semigroup Forum, 2009, 79(2): 385-399.

[7] QIAO Hu-sheng, WEI Chong-qing. On a Generalization of Principal Weak Flatness Property [J]. Semigroup Forum, 2012, 85(1): 147-159.

[8] SHI Xiao-ping, LIU Zhong-kui, WANG Fang-gui, et al. Indecomposable, Projective and Flat S-Posets [J]. Comm Alg, 2005, 33(1): 235-251.

[9] SHI Xiao-ping. Strongly Flat and Po-Flat S-Posets [J]. Comm Alg, 2005, 33(12): 4515-4531.

On (m, n)-Principally Weakly Flat *S*-Posets

QIAO Hu-sheng, CHEN Xiao-fei

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Let S be a pomonoid and m, n be positive integrals. In this paper, we give a generalization of principally weakly flat S-poset and call it (m, n)-principally weakly flat poset. On this new property, the homological classification problems of S-posets are investigated. As applications, some known results are extended.

Key words: principal weak flatness; homological classification; S-poset

责任编辑 廖 坤