doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.03.007

一类带变号权函数的二阶差分方程 Dirichlet 边值问题正解的存在性

张亚莉

（西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070）

摘　要：本文研究了非线性二阶差分方程 Dirichlet 边值问题 $\Delta^2 u(t-1)+\lambda a(t)f(u(t))=0$，$t\in[1,T]_Z$，$u(0)=u(T+1)=0$ 正解的存在性，其中 $\Delta u(t-1)=u(t)-u(t-1)$，$T>2$ 是一个整数，λ 是一个正参数，$f:[0,\infty)\to R$ 连续且 $f(0)>0$，权函数 $a:[1,T]_Z\to\mathbf{R}$ 允许变号. 主要结果的证明基于 Leray-Schauder 不动点定理.

关键词：差分方程；变号权函数；Leray-Schauder 不动点定理；正解

中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)03-0455-04

Existence of positive solutions for a class of second-order difference equation Dirichlet boundary problems with sign-changing weight function

ZHANG Ya-Li

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of positive solutions for the nonlinear second-order difference equation Dirichlet boundary problems $\Delta^2 u(t-1)+\lambda a(t)f(u(t))=0$, $t\in[1,T]_Z$, $u(0)=u(T+1)=0$, where $\Delta u(t-1)=u(t)-u(t-1)$, $T>2$ is an integer, λ is a positive parameter, $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ is continuous, $f(0)>0$ and $a:[1,T]_Z\to\mathbf{R}$ may change sign. The proof of the main results is based on the Leray-Schauder fixed point theorem.

Keywords: Difference equation; Sign-changing weight function; Leray-Schauder fixed point theorem; Positive solution

(2010 MSC 26A33)

1　引　言

近年来，微分和差分方程边值问题正解的存在性引起了许多学者的关注[1-11]. 然而，就我们所知，相应的差分方程边值问题的研究工作却相对较少. 特别地，Zhang 等[1] 运用临界点理论研究了二阶差分方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{aligned}&\Delta^2 u(t-1)+\lambda f(u(t))=0,\ t\in[1,T]_Z,\\&u(0)=u(T+1)=0\end{aligned}\tag{1}$$

正解的存在性，其中 λ 是一个正参数，$f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 连续. Ma 等[2] 运用分歧理论研究了二阶差分方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{aligned}&\Delta^2 u(t-1)+\lambda a(t)f(u(t))=0,\ t\in[1,T]_Z,\\&u(0)=u(T+1)=0\end{aligned}\tag{2}$$

正解的存在性，其中 λ 是一个正参数，$f:[0,\infty)\to$

收稿日期：2019-03-30

基金项目：国家自然科学基金(11671322)

作者简介：张亚莉(1995－)，女，甘肃平凉人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail:1364946931@qq.com

$[0,\infty)$连续,$a:[1,T]_Z\to[0,\infty)$.

文献[1-2]分别在权函数 $a(t)=1$ 和 $a(t)\geqslant 0$ 情形下研究了非线性差分方程边值问题正解的存在性. 我们自然要问:当二阶差分方程权函数变号时,正解的存在性又将如何?本文在权函数变号的情况下研究问题(2)的正解的存在性,所用方法为 Leray-Schauder 不动点定理.

记 $G(t,s)$为问题 $\Delta^2u(t-1)=0$, $t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}$, $u(0)=u(T+1)=0$ 的 Green 函数,$a^+(t)=\max\{0,a(t)\}$, $a^-(t)=\max\{0,a(t)\}$, $t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}$. 本文总假定:

(H1) λ 是一个正参数;

(H2) $f:[0,\infty]\to\mathbf{R}$ 连续且 $f(0)>0$;

(H3) $a:[1,T]_Z\to\mathbf{R}$, a 不恒为 0,且存在常数 $\mu>1$ 使得

$$\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^+(s)\geqslant\mu\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^-(s),\quad t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}.$$

本文主要结果如下:

定理 1.1　假设条件(H1)~(H3)成立. 则存在 $\lambda^*>0$,使得当 $0<\lambda<\lambda^*$ 时问题(2)至少存在一个正解.

2　预备知识

令 $X:=\{u|u:[0,T+1]_{\mathbf{Z}}\to\mathbf{R}, u(0)=u(T+1)=0\}$. 它在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}}|u(t)|$ 下构成 Banach 空间.

引理 2.1(Leray-Schauder 不动点定理[12]) 设 E 是 Banach 空间,算子 $A:E\to E$ 全连续. 若集合 $\{x|x\in E, x=\theta Ax, 0<\theta<1\}$ 是有界的,则 A 在闭球 T 中必有不动点,其中 $T=\{x|x\in E,\|x\|\leqslant R\}$, $R=\sup\{\|x\||x=\theta Ax, 0<\theta<1\}$.

引理 2.2　设 $h:[1,T]_{\mathbf{Z}}\to\mathbf{R}$. 则二阶线性差分方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{aligned}&\Delta^2u(t-1)=-h(t),\ t\in[1,T]_{\mathbf{Z}},\\&u(0)=u(T+1)=0\end{aligned}\tag{3}$$

有唯一解 $u(t)=\sum\limits_{s=1}^{T}G(t,s)h(s)$, $t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}$, 其中

$$G(t,s)=\frac{1}{1+T}\begin{cases}s(1+T-t), & 1\leqslant s\leqslant t\leqslant 1+T,\\ t(1+T-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T.\end{cases}$$

证明　只需验证 $u(t)$满足问题(3). 事实上,

$$u(t)=\frac{1}{1+T}\Big(\sum_{s=1}^{t-1}s(1+T-t)h(s)+\sum_{s=t}^{T}t(1+T-s)h(s)\Big),\ u(t-1)=$$

$$\frac{1}{1+T}\Big(\sum_{s=1}^{t-2}s(2+T-t)h(s)+\sum_{s=t-1}^{T}(t-1)(1+T-s)h(s)\Big),$$

$$u(t+1)=\frac{1}{1+T}\Big(\sum_{s=1}^{t}s(T-t)h(s)+\sum_{s=t+1}^{T}(t+1)(1+T-s)h(s)\Big),$$

所以

$$\begin{aligned}&\Delta^2u(t-1)=u(t+1)-2u(t)+u(t-1)=\\&\frac{1}{1+T}\Big(\sum_{s=1}^{t}s(T-t)h(s)+\sum_{s=t+1}^{T}(t+1)(1+T-s)h(s)-\sum_{s=1}^{t-1}2s(1+T-t)h(s)-\\&\sum_{s=t}^{T}2t(1+T-s)h(s)+\sum_{s=1}^{t-2}s(2+T-t)h(s)+\sum_{s=t-1}^{T}(t-1)(1+T-s)h(s)\Big)=\\&\frac{1}{1+T}\Big(\sum_{s=1}^{t-2}(s(2+T-t)-2s(1+T-t)+s(T-t))h(s)+(t-1)(1+T-s)h(t-1)+\\&t(T-t)h(t)-2(t-1)(1+T-t)h(t-1)+\\&\sum_{s=t+1}^{T}((t+1)(1+T-s)-2t(1+T-s)+(t-1)(1+T-s))h(s)-2t(1+\\&T-t)h(t)+(t-1)(2+T-t)h(t-1)+(t-1)(1+T-t)h(t)\Big)=\\&\frac{1}{1+T}((-(T-t)-(t+1))h(t))=\\&-h(t).\end{aligned}$$

另一方面,易证 $u(0)=u(T+1)=0$. 因而 $u(t)$满足问题(3).

引理 2.3　设 $0<\delta<1$. 则存在 $\bar{\lambda}>0$,使得当 $0<\lambda<\bar{\lambda}$ 时问题

$$\begin{aligned}&\Delta^2u(t-1)+\lambda a^+(t)f(u(t))=0,\ t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}\\&u(0)=u(T+1)=0\end{aligned}\tag{4}$$

有一个正解 $\tilde{u}_\lambda(t)$满足:当 $\lambda\to 0$ 时,$\|\tilde{u}_\lambda\|\to 0$ 且 $\tilde{u}_\lambda(t)\geqslant\lambda\delta f(0)p(t)$,其中 $p(t)=\sum\limits_{s=1}^{T}G(t,s)a^+(s)$.

证明　对任意 $u\in X$,由引理 2.2 定义算子

$$(Au)(t)=\lambda\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^+(s)f(u(s)),\quad t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}\tag{5}$$

显然,$A(X)\subset X$, A 是全连续算子,且 A 的不动点

就是问题(4)的解. 由于 f 连续，$f(0)>0$，取充分小的 $\varepsilon>0$ 使得

$$f(u)\geqslant\delta f(0),\ 0<u<\varepsilon \tag{6}$$

记 $\tilde{f}(u)=\max\limits_{0<v<u}f(u)$. 假设 $0<\lambda<\dfrac{\varepsilon}{2\|p\|\tilde{f}(\varepsilon)}$，即 $\dfrac{\varepsilon}{\tilde{f}(\varepsilon)}<\dfrac{1}{2\lambda\|p\|}$. 由 $\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\tilde{f}(u)}{u}=+\infty$，$\dfrac{\tilde{f}(u)}{u}$ 在 $(0,\varepsilon)$ 上非增，所以存在 $A_\lambda\in(0,\varepsilon)$ 使得

$$\frac{\tilde{f}(A_\lambda)}{A_\lambda}=\frac{1}{2\lambda\|p\|} \tag{7}$$

根据引理 2.1，设 $u\in X$，$0<\theta<1$ 满足 $u=\theta Au$. 则对任意的 $u\in(0,\varepsilon)$，由(5)式及 $\tilde{f}$ 的非减性可知

$$\|u\|=\max_{t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}}\left|\lambda\sum_{s=1}^{T}\theta G(t,s)a^+(s)f(u(s))\right|\leqslant \lambda\tilde{f}(\|u\|)\max_{t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}}\left|\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^+(s)\right|\leqslant \lambda\tilde{f}(\|u\|)\|p\|.$$

所以

$$\frac{\tilde{f}(\|u\|)}{(\|u\|)}\geqslant\frac{1}{\lambda\|p\|}>\frac{1}{2\lambda\|p\|} \tag{8}$$

于是由(7)和(8)式可得 $\|u\|\neq A_\lambda$. 注意到当 $\lambda\to0$ 时 $A_\lambda\to0$，由引理 2.1 知 A 存在一个不动点 $\tilde{u}_\lambda(t)$ 满足 $\|\tilde{u}_\lambda\|\leqslant A_\lambda<\varepsilon$. 进一步，由(5)和(6)式得

$$\tilde{u}_\lambda(t)=\lambda\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^+(s)f(\tilde{u}_\lambda(s))\geqslant \lambda\delta f(0)\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^+(s)\geqslant\lambda\delta f(0)p(t).$$

证毕.

3 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 令

$$q(t)=\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^-(s).$$

由 $\lim\limits_{u\to0^+}f(u)=f(0)$，对 $\dfrac{\mu-1}{2}f(0)>0$，存在 $\alpha>0$ 使得当 $0<u<\alpha$ 时有

$$|f(u)-f(0)|\leqslant\frac{\mu-1}{2}f(0),$$

即

$$|f(u)|\leqslant\frac{\mu+1}{2}f(0) \tag{9}$$

由条件(H3)，$q(t)\leqslant\dfrac{1}{\mu}p(t)$. 结合(9)式得

$$q(t)|f(u)|\leqslant\frac{1}{\mu}p(t)|f(u)|\leqslant \frac{\mu+1}{2\mu}p(t)f(0).$$

取 $\gamma=\dfrac{\mu+1}{2\mu}$，$\dfrac{1}{2}<\gamma<1$，则对任意 $t\in[0,T+1]_{\mathbf{Z}}$ 有

$$q(t)|f(u)|\leqslant\gamma p(t)f(0),\ 0<u<\alpha \tag{10}$$

固定 $\delta\in(\gamma,1)$ 并设 $\lambda^*>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda^*$ 时有

$$\|\tilde{u}_\lambda\|+\lambda\delta f(0)\|p\|\leqslant\alpha \tag{11}$$

其中 $\tilde{u}_\lambda(t)$ 是问题(4)的解. 又设对任意的 $u_1,u_2\in[-\alpha,\alpha]$，$|u_1-u_2|\leqslant\lambda^*\delta f(0)\|p\|$ 有

$$|f(u_1)-f(u_2)|\leqslant\frac{\delta-\gamma}{2}f(0) \tag{12}$$

对于 $0<\lambda<\lambda^*$，设 $v_\lambda(t)$ 是问题

$$\begin{aligned}&\Delta^2v(t-1)=-\lambda a^+(t)(f(\tilde{u}_\lambda(t)+v(t))-\\&f(\tilde{u}_\lambda(t)))+\lambda a^-(t)f(\tilde{u}_\lambda(t)+v(t)),\\&t\in[1,T]_{\mathbf{Z}},v(0)=v(T+1)=0\end{aligned} \tag{13}$$

的解. 结合问题(4)和问题(13)，问题(2)有形如 $\tilde{u}_\lambda(t)+v_\lambda(t)$ 的解，记为 $u_\lambda(t)$.

对任意的 $w\in X$，由引理 2.2 定义算子

$$\begin{aligned}(Tw)(t)&=\lambda\sum_{s=1}^{T}G(t,s)(a^+(s)(f(\tilde{u}_\lambda(s)+\\&w(s))-f(\tilde{u}_\lambda(s)))-\lambda a^-(s)f(\tilde{u}_\lambda(s)+\\&w(s))),\ t\in[1,T]_Z\end{aligned} \tag{14}$$

显然 $T(X)\subset X$，T 是全连续算子，且 T 的不动点就是问题(13)的解. 由引理 2.1，设 $v\in X$，$0<\theta<1$，满足 $v=\theta Tv$. 则

$$\begin{aligned}v(t)&=\theta\lambda\sum_{s=1}^{T}G(t,s)(a^+(s)(f(\tilde{u}_\lambda(s)+v(s))-\\&f(\tilde{u}_\lambda(s)))+\lambda a^-(s)f(\tilde{u}_\lambda(s)+v(s)))\end{aligned} \tag{15}$$

我们断言

$$\|v\|\neq\lambda\delta f(0)\|p\| \tag{16}$$

反设 $\|v\|=\lambda\delta f(0)\|p\|$. 则

$$\|\tilde{u}_\lambda+v\|\leqslant\|\tilde{u}_\lambda\|+\|v\|\leqslant\alpha \tag{17}$$

且

$$\begin{aligned}&|\tilde{u}_\lambda(t)+v(t)-\tilde{u}_\lambda(t)|=|v(t)|\leqslant\lambda\delta f(0),\\&\|p\|\leqslant\lambda^*\delta f(0)\|p\|\end{aligned} \tag{18}$$

由(12)式知

$$|f(\tilde{u}_\lambda(t)+v(t))-f(\tilde{u}_\lambda(t))|\leqslant\frac{\delta-\gamma}{2}f(0) \tag{19}$$

结合(15)和(19)式得

$$\begin{aligned}|v(t)|&=\left|\theta\lambda\sum_{s=1}^{T}G(t,s)(a^+(s)(f(\tilde{u}_\lambda(s)+\right.\\&v(s))-f(\tilde{u}_\lambda(s)))-\\&\left.a^-(s)f(\tilde{u}_\lambda(s)+v(s)))\right|\leqslant\\&\left|\lambda\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^+(s)(f(\tilde{u}_\lambda(s)+v(s))-\right.\\&\left.f(\tilde{u}_\lambda(s)))\right|+\end{aligned}$$

$$|\lambda\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^{-}(s)f(\tilde{u}_\lambda(s)+v(s))|\leqslant$$
$$\lambda\sum_{s=1}^{T}G(t,s)a^{+}(s)f(0)\frac{\delta-\gamma}{2}+$$
$$\lambda\gamma p(t)f(0)=\lambda p(t)f(0)\frac{\delta-\gamma}{2}+\lambda\gamma p(t)f(0)=$$
$$\lambda p(t)f(0)\frac{\delta+\gamma}{2},$$

即 $\|v\|\leqslant\lambda\|p\|f(0)\frac{\delta+\gamma}{2}<\lambda\delta\|p\|f(0)$. 这与假设矛盾. 断言为真.

根据引理 2.1, T 存在一个不动点 $v_\lambda(t)$ 满足 $\|v_\lambda\|\leqslant\lambda\delta f(0)\|p\|$, 且

$$u_\lambda(t)=\tilde{u}_\lambda(t)+v_\lambda(t)\geqslant\tilde{u}_\lambda(t)-|v_\lambda(t)|\geqslant$$
$$\lambda\delta f(0)p(t)-\lambda\frac{\delta+\gamma}{2}f(0)p(t)=$$
$$\lambda\frac{\delta-\gamma}{2}f(0)p(t)>0.$$

从而 $u_\lambda(t)$ 是问题(2)的一个正解. 证毕.

参考文献:

[1] Zhang G Q, Liu S Y. On a class of semipositone discrete boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 2007, 325: 175.

[2] Ma R Y, Xu Y J, Gao C H. A Global description of the positive solutions of sublinear second-order discrete boundary value problems [J] Adv Differ Equ, 2009, 2009: 15.

[3] Erbe L H, Hu S C, Wang H Y. Multiple positive solutions of some boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1994, 184: 640.

[4] Ma R Y, Raffoul Y N. Positive solutions of three-point nonlinear discrete second order boundary value problem [J]. J Differ Equ Appl, 2004, 10: 129.

[5] Ma R Y, Ma H L. Global structure of positive solutions for superlinear discrete boundary value problems [J]. J Differ Equ Appl, 2011, 9: 1219.

[6] Ma R Y, Gao C H, Xu Y J. Bifurcation interval for positive solutions to discrete second-order boundary value problems [J]. J Differ Equ Appl, 2011, 17: 1251.

[7] Lu Y Q, Gao C H. Existence of positive solutions of second-order discrete Neumann boundary value problems with variable coefficients [J]. J East China Norm Univ, 2011, 5: 66.

[8] Ma R Y, Ma H L. Positive solutions for nonlinear discrete periodic boundary value problems [J]. Comput Math Appl, 2010, 59: 136.

[9] 叶芙梅. 一类非线性二阶常微分方程 Dirichlet 问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 463.

[10] 马满堂. 一类非线性二阶常微分方程周期问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 693.

[11] 赵中姿. 一类三阶非线性常微分方程边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 189.

[12] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.

引用本文格式:

中　文: 张亚莉. 一类带变号权函数的二阶差分方程 Dirichlet 边值问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 455.

英　文: Zhang Y L. Existence of positive solutions for a calss of second-order difference equation Dirichlet boundary problems with sign-changing weight function [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 455.