DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2009.04.006
第21卷 第4期 甘肃科学学报 Vol.21 No.4
2009年12月 Journal of Gansu Sciences Dec.2009

# $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$中条件期望的等价表述

胡晶文,韩 琦
(西北师范大学 数学与信息科学学院,甘肃 兰州 730070)

摘 要: 证明了当样本空间为有限集时$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$中条件期望的等价形式.揭示了该空间中条件期望为范数的关系.

关键词: 条件期望;σ-代数;范数
中图分类号: O211.6 文献标志码: A 文章编号:1004-0366(2009)04-0112-02

## An Equivalent Expression about Conditional Expectation in $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$

HU Jing-wen, HAN Qi
(School of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract**: The equivalent form of conditional expectation in $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ is proved when the sample space is a limited set. The relationship between the conditional expectation and the norm in this space is discussed.

**Key words**: conditional expectation; σ-algebra; norm

## 1 预备知识

设$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$表示概率空间上方差存在的随机变量全体.

易见$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$为hilbert空间,若$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}$,则$L^2(\Omega,\mathscr{F}_n,P)$可看作$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$的闭子空间[2,3,6,7].

通常情况下,($\mathscr{F}$-可测)随机变量$X$关于σ-代数$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}$的条件数学期望定义为一个$\mathscr{F}_n$-可测的随机变量$X_n$,它满足

$$\forall A_n\in\mathscr{F}_n, E[X_nI_{A_n}]=E[X_nI_{A_n}],$$

其中$I_{A_n}$是集合$A_n\subset\Omega$的特征函数,这种定义只限于方差存在的情形[1~8].

## 2 主要结果

在这种情形下,对任何$X\in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$,可定义$X$在$L^2(\Omega,\mathscr{F}_n,P)$的投影$X_{\mathscr{F}}$为以下问题的解:

$$\|X-X_{\mathscr{F}}\|_{L^2}=\min_{Y\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_n,P)}\|X-Y\|_{L^2}.$$

命题 当$\Omega$为有限集时,$X$关于$\mathscr{F}_n$的条件数学期望是$X_{\mathscr{F}_n}$,即

$$E[X\mid\mathscr{F}_n]=X_{\mathscr{F}_n}=\arg\min_{Y\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_n,P)}\|X-Y\|_{L^2},$$

其中arg表示极值问题的解.

证明 设

$$\Omega=\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N=\omega_n^1\cup\omega_n^2\cup\cdots\cup\omega_n^k,$$

其中$\omega_n^j$, $j=1,2,\cdots,k$为$\Omega$中两两不交子集,并且它们的并、交、余运算生成$\mathscr{F}_n$,而$\mathscr{F}$为$\Omega$的所有子集组成,

收稿日期:2009-04-07

又设$(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率, 定义为

$$P(\omega_i) = p_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, N,\ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

于是, 对于任意随机变量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_N)$(它相当于一个 $N$ 维向量),

$$E[(X - x)^2] = \sum_{i=1}^{N} p_i (X_i - x)^2,$$

对上式关于 $x$ 求导, 并令其 $= 0$, 于是上式的最小值解 $\bar{x}$ 满足

$$2\sum_{i=1}^{N} p_i (X - \bar{x}) = 0,$$

即

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} p_i X_i = E[X],$$

从而

$$E[X] = \arg\min_{x \in R} E[(X - x)^2].$$

再设 $Y$ 为 $\mathscr{F}_n$- 可测随机变量, 即 $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$(它可视为一个 $k$ 维向量),

因

$$E[(X - Y)^2] = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i \in \omega_n^j} p_i (X_i - Y_j)^2,$$

关于 $k$ 个变量 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 求其最小值 $\bar{Y} = (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \cdots, \bar{Y}_k)$, 其中

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{\sum_{i \in \omega_n^j} p_i} \sum_{i \in \omega_n^j} p_i X_i = \frac{1}{p(\omega_n^j)} \sum_{i \in \omega_n^j} p_i X_i,\ j = 1, 2, \cdots, k$$

即

$$\forall \omega_n^j \in \mathscr{F}_n, E[X \mid \mathscr{F}_n](\omega_n^j) = E[X \mid \omega_n^j],$$

从而

$$E[X \mid \mathscr{F}_n] = \arg\min_{Y \in R^k} E[(X - Y)^2],$$

而

$$\arg\min_{Y \in R^k} E[(X - Y)^2] = \arg\min_{Y \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_n, P)} \| X - Y \|_{L^2}.$$

说明: 1. 当 $\Omega$ 为无限集时, 仍有类似的结论, 将在以后作深入讨论;

2. 按照这样定义条件数学期望, 显然对于任何 $\xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 有

$$\| E[X \mid \mathscr{F}_n] \|_{L^2} \leqslant \| X \|_{L^2}.$$

参考文献:

[1] 韩琦. 教育信息传播过程中的二叉树模型[J]. 数学教学研究, 2009, 28(2): 54-55.

[2] Hui-hsiung Kuo. Introduction to Stochastic Integrantion[M]. New York: Springer-verlag, 2006.

[3] 黄志远. 随机分析学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[4] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003.

[5] 刘次华, 万建平. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.

[6] 程士宏. 测度论与概率论基础[M]. 北京: 北京大学出版社, 2004.

[7] 严加安. 测度论讲义[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[8] 郭精军, 王才士. B-值广义泛函意义下 Cable 方程的白噪声分析法[J]. 甘肃科学学报, 2009, 20(1): 8-12.

作者简介:

胡晶文 (1982-) 男, 天津市塘沽人, 2007 级西北师范大学数学与信息科学学院硕士研究生, 研究方向为随机分析及其应用.