DOI：10.16783/j.cnki.nwnuz.2017.02.004

π-正则幺半群的平坦性刻画

刘仲奎，谈 迁
（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘要：设 S 是幺半群，定义了主弱平坦 S-系的一个推广，称之为 π-主弱平坦 S-系．利用该性质给出了 π-正则幺半群的刻画．

关键词：平坦 S-系；π-主弱平坦 S-系；π-正则幺半群
中图分类号：O 152.7 文献标志码：A 文章编号：1001-988Ⅹ(2017)02-0017-04

Characterization of π-regular monoids by flatness property

LIU Zhong-kui，TAN Qian
(College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，Gansu，China)

Abstract：Let S be a monoid，a generalization of principally weakly flat S-act is defined，which is called π-principally weakly flat S-act．Using this property，the characterization of π-regular monoids is given.

Key words：flat S-act；π-principally weakly flat S-act；π-regular monoids

1 引言

在本文中，S 表示一个幺半群，N 表示正整数集．非空集合 A 称作一个右 S-系，通常记为 A_S，如果 S 右作用于 A，即存在一个映射 $A\times S\rightarrow A$，$(a,s)\mapsto as$，满足条件：对于所有的 $a\in A$，$s,t\in S$，有 $(as)t=a(st)$，$a1=a$．设 S 是一个幺半群，A 是一个右 S-系，称 A 是平坦的，如果函子 $A\otimes$ -把任意左 S-系的单同态变为单映射．如果对于 A 的任意左理想(主左理想)，该函子是单的，则称 A 是弱平坦(主弱平坦)的．因此一个右 S-系 A 是主弱平坦的当且仅当对于任意的 $s\in S$，$a,a'\in A$，若 $a\otimes s=a'\otimes s$ 在 $A\otimes S$ 中成立，则 $a\otimes s=a'\otimes s$ 在 $A\otimes Ss$ 中成立．本文中出现的其他相关概念可参见文献[1-3].

众所周知，幺半群 S 称为正则幺半群，如果对任意的 $s\in S$，使得 $s\in sSs$．由文献[4]，幺半群 S 称为终于正则幺半群，如果对任意的 $s\in S$，存在正整数 n，使得 s^n 是正则的．后来这类幺半群被称为 π-正则幺半群.

利用主弱平坦的性质，可以刻画正则幺半群，左几乎正则幺半群等．在本文中，定义了主弱平坦性质的一个推广，利用该性质，给出了 π-正则幺半群的刻画.

现在给出一种主弱平坦性质的推广.

定义1 设 S 是一个幺半群，A 是一个右 S-系．称 A 是 π-主弱平坦的，如果对任意的 $s\in S$，存在一个正整数 n，使得 $A\otimes$ -把单同态 $Ss^n\rightarrow S$ 变为单映射．换言之，如果对任意的 $s\in S$，存在一个自然数 n，对 $a,a'\in A$，若 $a\otimes s^n=a'\otimes s^n$ 在 $A\otimes S$ 中成立，则 $a\otimes s^n=a'\otimes s^n$ 在 $A\otimes Ss^n$ 中成立.

在以上定义中，如果正整数 n 恒为1，那么 π-主弱平坦系是主弱平坦系．显然每个主弱平坦 S-系是 π-主弱平坦 S-系.

假设 I 是 S 的一个真右理想，以下的构造参见文献[5]．设 x，y 和 z 是不属于 S 的元素，记

收稿日期：2016-10-20；修改稿收到日期：2016-12-29
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11361050)
作者简介：刘仲奎(1963—)，男，甘肃通渭人，教授，博士，博士研究生导师．主要研究方向为同调代数和环理论.
E-mail：liuzk@nwnu.edu.cn

$A(I)=(\{x,y\}\times(S-I))\cup(\{z\}\times I)$，如下定义了 $A(I)$ 的一个右 S-作用

$$(x,u)s=\begin{cases}(x,us), & \text{如果 } us\notin I,\\ (z,us), & \text{如果 } us\in I;\end{cases}$$

$$(y,u)s=\begin{cases}(y,us), & \text{如果 } us\notin I,\\ (z,us), & \text{如果 } us\in I;\end{cases}$$

$$(z,u)s=(z,us).$$

那么 $A(I)$ 是一个右 S-系.

2 主要结果

引理 1[6] 设 S 是一个幺半群，$a,a'\in A_S$，$b,b'\in {}_SB$. 那么 $a\otimes b=a'\otimes b'$ 在 $A_S\otimes {}_SB$ 中成立，当且仅当存在元素 $a_1,\cdots,a_m\in A_S$，$b_2,\cdots,b_m\in {}_SB$，$s_1,t_1,\cdots,s_m,t_m\in S$，使得

$$\begin{aligned}&a=a_1s_1,\\ &a_1t_1=a_2s_2,\quad s_1b=t_1b_2,\\ &a_2t_2=a_3s_3,\quad s_2b_2=t_2b_3,\\ &\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ &a_mt_m=a',\quad s_mb_m=t_mb'.\end{aligned}$$

引理 2 设 S 是一个幺半群，A 是一个右 S-系. 则以下条件等价：

(1) A 是一个 π-主弱平坦系.

(2) 对于每个 $s\in S$，存在一个正整数 n，对任意的 $a,a'\in A_S$，若 $a\otimes s^n=a'\otimes s^n$ 在 $A\otimes S$ 中成立，则存在元素 $a_1,\cdots,a_m\in A_S$，$s_1,t_1,\cdots,s_m,t_m\in S$，使得

$$\begin{aligned}&a=a_1s_1,\\ &a_1t_1=a_2s_2,\quad s_1s^n=t_1s^n,\\ &a_2t_2=a_3s_3,\quad s_2s^n=t_2s^n,\\ &\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ &a_mt_m=a',\quad s_ms^n=t_ms^n.\end{aligned}$$

证明 (1)$\Longrightarrow$(2). 因为 A 是 π-主弱平坦系，所以对每个 $s\in S$ 及任意的 $a,a'\in A$，存在一个正整数 n，如果 $a\otimes s^n=a'\otimes s^n$ 在 $A\otimes S$ 中成立，那么 $a\otimes s^n=a'\otimes s^n$ 在 $A\otimes Ss^n$ 中成立. 由引理 1，存在 $a_1,\cdots,a_m\in A_S$，$q_2,\cdots,q_m\in Ss^n$，$u_1,v_1,\cdots,u_m,v_m\in S$，使得

$$\begin{aligned}&a=a_1u_1,\\ &a_1v_1=a_2u_2,\quad u_1s^n=v_1q_2,\\ &a_2v_2=a_3u_3,\quad u_2q_2=v_2q_3,\\ &\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ &a_mv_m=a',\quad u_mq_m=v_ms^n.\end{aligned}$$

因为 $q_2,\cdots,q_m\in Ss^n$，则存在 $c_2,\cdots,c_m\in S$，使得 $q_i=c_is^n(i=2,\cdots,m)$. 因此有

$$\begin{aligned}&a=a_1u_1,\\ &a_1v_1c_2=a_2u_2c_2,\qquad u_1s^n=v_1c_2s^n,\\ &a_2v_2c_3=a_3u_3c_3,\qquad u_2c_2s^n=v_2c_3s^n,\\ &\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ &a_{m-1}v_{m-1}c_m=a_mu_mc_m,\quad u_{m-1}c_{m-1}s^n=v_{m-1}c_ms^n,\\ &a_mv_m=a',\qquad u_mc_ms^n=v_ms^n.\end{aligned}$$

记 $u_1=s_1$，$v_m=t_m$，$u_ic_i=s_i$，$v_{i-1}c_i=t_{i-1}$，$i=2,\cdots,m$. 那么结论已证.

(2)$\Longrightarrow$(1). 对于每个 $s\in S$，存在一个正整数 n，对任意的 $a,a'\in A_S$，若 $a\otimes s^n=a'\otimes s^n$ 在 $A\otimes S$ 中成立. 由(2)得，存在 $a_1,\cdots,a_m\in A_S,s_1,t_1,\cdots,s_m,t_m\in S$，使得

$$\begin{aligned}&a=a_1s_1,\\ &a_1t_1=a_2s_2,\quad s_1s^n=t_1s^n,\\ &a_2t_2=a_3s_3,\quad s_2s^n=t_2s^n,\\ &\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ &a_mt_m=a',\quad s_ms^n=t_ms^n.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}a\otimes s^n&=a_1s_1\otimes s^n=a_1\otimes s_1s^n=a_1\otimes t_1s^n=\\ &a_1t_1\otimes s^n=a_2s_2\otimes s^n=a_2\otimes s_2s^n=\\ &a_2\otimes t_2s^n=a_2t_2\otimes s^n=\cdots=a'\otimes s^n\end{aligned}$$

在 $A\otimes Ss^n$ 中成立. 】

推论 1 设 S 是一个右可消幺半群，A 是右 S-系. 则以下条件等价：

(1) A 是 π-主弱平坦系.

(2) A 是主弱平坦系.

定理 1 设 S 是一个幺半群且关于主右理想满足升链条件，则以下条件等价：

(1) 所有右 S-系是 π-主弱平坦系.

(2) 所有具有性质(E)的右 S-系是 π-主弱平坦系.

(3) 所有具有性质(E)的有限生成的右 S-系是 π-主弱平坦系.

(4) S 是一个 π-正则幺半群.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3)是显然的.

(3)$\Longrightarrow$(4). 设 $s\in S$，若对于每个正整数 n，$s^nS=S$，则存在 $x\in S$，使得 $s^nxs^n=s^n$. 否则存在一个正整数 m，使得 s^mS 是 S 的一个真右理想. 不失一般性，我们假设 m 是使得 $s^mS\neq S$ 的最小正整数. 记 $I=s^mS$，那么 $A(I)$ 是有限生成的右 S-系

并具有性质(E)，由条件（3）知 $A(I)$是 π-主弱平坦系．对 $s\in S$，存在正整数 n，使得 $A(I)\otimes Ss^n\rightarrow A(I)\otimes S$ 是单的．分两种情形讨论：

(a) $m=1$．如果 $n=1$，则$(x,1)\otimes s=(y,1)\otimes s$ 在 $A(I)\otimes S$ 中成立．由引理 2 存在 $p_1,\cdots,p_m\in S$，$s_1,t_1,\cdots,s_m,t_m\in S$，以及 $w_1,\cdots,w_m\in\{x,y,z\}$，使得

$$\begin{aligned}&(x,1)=(w_1,p_1)s_1,\\&(w_1,p_1)t_1=(w_2,p_2)s_2,\quad s_1s=t_1s,\\&(w_2,p_2)t_2=(w_3,p_3)s_3,\quad s_2s=t_2s,\\&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\&(w_m,p_m)t_m=(y,1),\qquad s_ms=t_ms.\end{aligned}$$

必存在 $k\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，使得 $w_k\neq w_{k+1}$，则存在 $j\in sS$，使得 $p_kt_k=p_{k+1}s_{k+1}=j$．从而有：

$$s=p_1s_1s=p_1t_1s=p_2s_2s=\cdots=p_ks_ks=js.$$

因此存在 $x\in S$，使得 $j=sx$．即 $s=sxs$．假如 $n>1$，那么类似于 $n=1$ 的情形讨论可得，存在 $x\in S$，使得 $j=sx$，且 $s^n=sxs^n$．由于 S 关于主右理想满足升链条件，必存在正整数 k，使得 $s^kS=s^{k+1}S=\cdots$．那么在 $s^n=sxs^n$ 两边乘以 s 的适当次幂，一定存在正整数 l 以及 $y\in S$，使得 $s^l=s^lys^l$．

(b) $m>1$．由情形(a)的讨论，只需考虑 $n<m$ 的情形，其他类似于情形(a)的讨论，如果 $n<m$，由 m 的取法可知，必有 $s^nS=S$，那么必有存在 $x\in S$，使得 $s^nxs^n=s^n$．

（4）$\Longrightarrow$（1）．假设 A 是一个右 S-系．对于每个 $s\in S$，存在正整数 $n\in N$，以及 $x\in S$，使得 $s^nxs^n=s^n$．对每个 $a,a'\in A_S$，若 $a\otimes s^n=a'\otimes s^n$ 在 $A\otimes S$ 中成立，则 $as^n=a's^n$．从而

$$\begin{aligned}&a\otimes s^n=a\otimes s^nxs^n=as^n\otimes xs^n=\\&\quad a's^n\otimes xs^n=a'\otimes s^nxs^n=a'\otimes s^n\end{aligned}$$

在 $A\otimes Ss^n$ 中成立．　】

命题 1　设 S 是一个幺半群，I 是 S 的真右理想．则以下条件等价：

（1）S/I 是 π-主弱平坦系．

（2）对每个 $s\in S$，存在一个正整数 n，如果 $r\in S-I$，使得 $rs^n\in I$，那么存在 $j\in I$，使得 $rs^n=js^n$．

证明　（1）$\Longrightarrow$（2）．因为 S/I 是 π-主弱平坦的．对每个 $s\in S$，存在一个正整数 n，如果 $r\in S-I$，使得 $rs^n\in I$，那么对每个 $j'\in I$，有$[r]\otimes s^n=[j']\otimes s^n$，在 $A\otimes S's^n$ 中成立，由引理 2 存在 $u_1,\cdots,u_m\in S$，以及 $s_1,t_1,\cdots,s_m,t_m\in S$，使得

$$\begin{aligned}&[r]=[u_1]s_1,\\&[u_1]t_1=[u_2]s_2,\qquad s_1s^n=t_1s^n,\\&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\&[u_{m-1}]t_{m-1}=[u_m]s_m,\quad s_{m-1}s^n=t_{m-1}s^n,\\&[u_m]t_m=[j'],\qquad s_ms^n=t_ms^n.\end{aligned}$$

因为 $j'\in I$，我们有 $u_mt_m\in I$．设 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$是使得 $u_kt_k\in I$ 的最小正整数．如果 $j=u_kt_k$，那么 $u_{k-1}t_{k-1}\in S-I$．因为$[u_{k-1}]t_{k-1}=[u_k]s_k$，得到 $u_{k-1}t_{k-1}=u_ks_k$，因此

$$\begin{aligned}&rs^n=u_1s_1s^n=u_1t_1s^n=u_2s_2s^n=u_2t_2s^n=\cdots=\\&\quad u_{k-1}t_{k-1}s^n=u_ks_ks^n=u_kt_ks^n=js^n.\end{aligned}$$

（2）$\Longrightarrow$（1）．对每个 $s\in S$，任意的 $u,u'\in S$，如果$[u]\otimes s^n=[u']\otimes s^n$，我们考虑以下四种情形：

情形 1　$u,u'\in I$．则显然$[u]\otimes s^n=[u']\otimes s^n$ 在 $S/I\otimes Ss^n$ 中成立．

情形 2　$u\in I,u'\in S-I$．由条件知存在 $j\in I$，使得 $u's^n=js^n$．那么

$$\begin{aligned}&[u]\otimes s^n=[j]\otimes s^n=[1]\otimes js^n=\\&\quad[1]\otimes u's^n=[u']\otimes s^n\end{aligned}$$

在 $S/I\otimes Ss^n$ 中成立．

情形 3　$u\in S-I,u'\in I$．类似于情形 2．

情形 4　$u,u'\in S-I$．则 $us^n=u's^n$ 或者 $us^n,u's^n\in I$．如果 $us^n=u's^n$，则结论显然成立．否则由条件知，存在一个正整数 $n_1\in N$，以及 $j_1\in I$，使得 $us^{n_1}=j_1s^{n_1}$．同理也存在一个正整数 $n_2\in N$，以及 $j_2\in I$，使得 $u's^{n_2}=j_2s^{n_2}$．令 $n=\max\{n_1,n_2\}$，那么有 $us^n=j_1s^n$ 以及 $u's^n=j_2s^n$．从而有

$$\begin{aligned}&[u]\otimes s^n=[1]\otimes us^n=[1]\otimes j_1s^n=\\&\quad[j_1]\otimes s^n=[j_2]\otimes s^n=[1]\otimes j_2s^n=\\&\quad[1]\otimes u's^n=[u']\otimes s^n\end{aligned}$$

在 $S/I\otimes Ss^n$ 中成立．　】

推论 2[7]　设 S 是一个幺半群，I 是 S 的真右理想．则以下条件等价：

（1）S/I 是主弱平坦系．

（2）对每个 $i\in I$，存在 $j\in I$，使得 $i=ji$．

定理 2　设 S 是一个幺半群，且关于主右理想满足升链条件，则以下条件等价：

（1）所有循环右 S-系是 π-主弱平坦系．

（2）所有右 Ress 商 S-系是 π-主弱平坦系．

（3）S 是 π-正则幺半群．

证明　（1）$\Longrightarrow$（2）是显然的．

（2）$\Longrightarrow$（3）．设 $s\in S$，如果对于每个正整

数 n，都有 $s^nS=S$，则易知存在 $x\in S$，使得 $s^nxs^n=s^n$. 否则存在一个正整数 m，使得 s^mS 是 S 的一个真右理想. 记 $I=s^mS$，那么 S/I 是 π-主弱平坦系. 类似于定理1的讨论可证明 S 是 π-正则幺半群.

(3)$\Longrightarrow$(1). 由定理1知显然成立.

命题2 每个 π-主弱平坦 S-系是挠自由 S-系.

证明 设 A 是一个 π-主弱平坦 S-系. 如果 $ac=bc$，其中 $a,b\in A$ 以及 c 是 S 的右可消元. 由于 $ac=bc$，那么 $ac^n=bc^n$. 因此由引理2，存在元素 $a_1,\cdots,a_m\in A_S$，$s_1,t_1,\cdots,s_m,t_m\in S$，使得

$$\begin{aligned}
&a=a_1s_1,\\
&a_1t_1=a_2s_2,\quad s_1c^n=t_1c^n,\\
&a_2t_2=a_3s_3,\quad s_2c^n=t_2c^n,\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\
&a_mt_m=b,\qquad s_mc^n=t_mc^n.
\end{aligned}$$

因为 c 是 S 的右可消元，所以得到

$$\begin{aligned}
&s_1=t_1,\\
&\quad\vdots\\
&s_{m-1}=t_{m-1},\\
&s_m=t_m.
\end{aligned}$$

那么

$$a=a_1s_1=a_1t_1=a_2s_2=\cdots=a_ms_m=a_mt_m=b$$

从而 A 是挠自由的.

参考文献:

[1] KILP M, KNAUER U, MIKNALEV A. Characterization of monoids by properties of their left Rees factors(in Russian)[J]. *Tartu Toim*, 1983, **640**: 29.

[2] GOULD V A R. Divisible *S*-systems and *R*-modules [J]. *Proc Edinb Math Soc*, 1983, **30**: 187.

[3] LAAN V. Pullbacks and flatness properties of acts. Part I [J]. *Commun Algebra*, 2001, **29**: 829.

[4] EDWARDS P M. Eventually regular semigroups[J]. *Bull Aust Math Soc*, 1983, **28**: 23.

[5] BULMAN-FLEMING S. Flat and strongly flat *S*-systems[J]. *Commun Algebra*, 1992, **20**: 2553.

[6] HOWIE M. *Fundamentals of Semigroup Theory* [M]. Oxford: Oxford Science Publications, 1995: 351.

[7] LAAN V. When torsion free acts are principally wakly flat[J]. *Semigroup Forum*, 2000, **60**: 321.

(责任编辑 陆泉芳)

(上接第16页)

[6] ZHOU X, LI C P. On the algebraic structure of Abelian integrals for a kind of pertubed cubic Hamiltonian systems [J]. *J Math Anal Appl*, 2009, **359**: 209.

[7] WU J J, ZHANG Y K, LI C P. On the number of zeros of Abelian integrals for a kind of quartic Hamiltonians[J]. *Appl Math Comput*, 2014, **228**: 329.

[8] YANG J H, ZHAO L Q. Zeros of Abelian integrals for a quartic Hamiltonian with figure-of-eight loop through anilpotent saddle[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2016, **27**: 350.

[9] ZHAO L Q, QI M H, LIU C J. The cylicity of period annuli of a class of quintic Hamiltonian systems[J]. *J Math Anal Appl*, 2013, **403**: 391.

[10] LI W G, ZHAO Y L, ZHANG Z F. Abelian integrals for quadratic centers having almost all their orbits formed by quadratic[J]. *Nonlinearity*, 2002, **15**: 863.

(责任编辑 马宇鸿)