山东大学学报(理学版) 2018 年 8 月 第 53 卷 第 8 期
Journal of Shandong University (Natural Science), Vol.53, No.8, 2018

E-mail: xblxb@sdu.edu.cn
http://lxbwk.njournal.sdu.edu.cn
Tel: +86-0531-88396917

文章编号:1671-9352(2018)08-0053-08　　DOI:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2017.240

$K_{1,3,p}$ 和 $K_{1,4,p}$ 的点可区别的 IE-全染色及一般全染色

寇艳芳[1],陈祥恩[1],王治文[2]
(1. 西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 宁夏大学 数学统计学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 利用色集事先分配法,构造染色法,反证法探讨了完全三部图 $K_{1,3,p}$ 和 $K_{1,4,p}$ 的点可区别 IE-全染色和点可区别一般全染色问题,确定了 $K_{1,3,p}$ 和 $K_{1,4,p}$ 的点可区别 IE-全色数和点可区别一般全色数。
关键词: 完全三部图; IE-全染色; 点可区别 IE-全染色; 一般全染色; 点可区别一般全染色
中图分类号: O157.5　　**文献标志码**: A
引用格式: 寇艳芳,陈祥恩,王治文. $K_{1,3,p}$ 和 $K_{1,4,p}$ 的点可区别的 IE-全染色及一般全染色[J]. 山东大学学报(理学版),2018,53(8):53-60.

Vertex-distinguishing IE-total coloring and general-total coloring of $K_{1,3,p}$ and $K_{1,4,p}$

KOU Yan-fang[1], CHEN Xiang-en[1], WANG Zhi-wen[2]
(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, Ningxia, China)

Abstract: The vertex-distinguishing IE-total coloring and vertex-distinguishing general total coloring of complete tripartite graphs $K_{1,3,p}$ and $K_{1,4,p}$ are discussed by distributing the color sets in advance, constructing the colorings and proving by contradiction. The vertex-distinguishing IE-total chromatic number and vertex-distinguishing general total chromatic number of $K_{1,3,p}$ and $K_{1,4,p}$ have been determined.
Key words: complete tripartite graphs; IE-total coloring; vertex-distinguishing IE-total coloring; general total coloring; vertex-distinguishing general total coloring

0 引言

点可区别一般边染色是由 Harary 等于 1985 年在文献[1]中提出的, 在文献[1-6]中均有研究。

近些年来,点可区别的未必正常的全染色也被研究。点可区别 IE-全染色在文献[7]中提出, 而一般点可区别全染色在文献[8]中被提出。

图 G 的 k-一般全染色是指 k 种颜色 $1,2,3,\cdots,k$ 对图 G 的全体顶点及边的一个分配。图 G 的 k-IE-全染色是指使得图 G 的任意 2 个相邻的顶点的颜色不同的一个 k-一般全染色。设 f 是图 G 的 k-IE-全染色, x 为 G 的一个顶点, 将在 f 下 x 的颜色及与 x 关联的边的颜色所构成的集合记为 $C_f(x)$ 或 $C(x)$, 称之为顶点 x 在 f 下的色集合。若对图 G 的任意 2 个不同的顶点 u,v,有 $C(u)\neq C(v)$,则 f 称为图 G 的 k-点可区别 IE-全染色(k-VDIETC)。对图 G 进行点可区别 IE-全染色所需要的最少颜色数称为 G 的点可区别 IE-全色数, 记为 $\chi_{vt}^{ie}(G)$。点可区别一般全染色也叫一般点可区别全染色, 因此简记为 GVDTC; 而点可区别一般全色数也叫一般点可区别全色数[8]。

收稿日期: 2017-05-18; **网络出版时间**: 2018-05-29 10:54:26
网络出版地址: http://kns.cnki.net/kcms/detail/37.1389.N.20180529.0858.002.html
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11761064,61163037,11261046); 宁夏回族自治区百人计划资助项目
第一作者简介: 寇艳芳(1988—), 女, 硕士研究生, 研究方向为图论及其应用. E-mail: 1637191507@qq.com

本文研究 $K_{1,3,p}$ 和 $K_{1,4,p}$ 的点可区别 IE-全染色和一般点可区别全染色，并给出了它们的点可区别 IE-全色数和一般点可区别全色数。所述及的完全三部图 $K_{m,n,p}$ 的顶点集合为 $V=X\cup Y\cup Z$，其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_p\}$，边集合为 $\{x_iy_j\mid i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\}\cup\{y_jz_t\mid j=1,2,\cdots,n;\ t=1,2,\cdots,p\}\cup\{x_iz_t\mid i=1,2,\cdots,m;\ t=1,2,\cdots,p\}$，当 $m=1$ 时，记 $X=\{x\}$。

约定: 在本文一提起或要给出一个图的 l-VDIETC 或 l-GVDTC 时，总认为所使用的 l 种颜色为 $1,2,\cdots,l$。

1 准备工作

由于一个图的点可区别 IE-全染色一定是点可区别一般全染色，因此下述命题 1 显然成立。

命题 1 对任意图 G，有 $\chi_{gvt}(G)\leqslant\chi_{vt}^{ie}(G)$。

引理 1 当 $k\geqslant 6$，$p>\sum_{i=1}^{5}\binom{k-1}{i}-3$ 时，$K_{1,3,p}$ 没有 $(k-1)$-GVDTC。

证明 假定 $K_{1,3,p}$ 存在 $(k-1)$-GVDTC g。若顶点 x 的色集合是 1-子集，设为 $\{a\}$，$a\in\{1,2,\cdots,k-1\}$。则 Z 中每个点的色集合里含 a。而 $\{1,2,\cdots,k-1\}$ 中含 a 的 2-子集，3-子集，4-子集及 5-子集共有 $\binom{k-2}{1}+\binom{k-2}{2}+\binom{k-2}{3}+\binom{k-2}{4}$ 个，不能区别 Z 中诸顶点，因为当 $k\geqslant 6$ 时，有 $\binom{k-2}{1}+\binom{k-2}{2}+\binom{k-2}{3}+\binom{k-2}{4}<p$，导致矛盾，所以 x 的色集合不是 1-子集。同理，Y 中点的色集合也不是 1-子集，1-子集只能是 Z 中某个点的色集合。显然 $\{1\},\{2\},\cdots,\{k-1\}$ 不全是 Z 中顶点的色集合，不妨设 $\{1\}$ 不是 Z 中任意顶点的色集合；$\{2\},\cdots,\{k-1\}$ 不全是 Z 中顶点的色集合(否则无法区分 Y 中的点)，不妨设 $\{2\}$ 也不是 Z 中任意顶点的色集合；若 $\{3\},\cdots,\{k-1\}$ 均是 Z 中任意点的色集合，那么 $\{3,4,\cdots,k-1\}\subseteq C(x)$，$\{3,4,\cdots,k-1\}\subseteq C(y_j)$，$j=1,2,3$。$C(x)$、$C(y_j)$ 只能是以下集合之一: $\{1,2,3,\cdots,k-1\}$，$\{1,3,4,\cdots,k-1\}$，$\{2,3,4,\cdots,k-1\}$，$\{3,4,\cdots,k-1\}$，那么 $p\leqslant\sum_{i=1}^{5}\binom{k-1}{i}$，矛盾。引理得证。

引理 2 当 $l\geqslant 7$，且 $\sum_{i=1}^{5}\binom{l-1}{i}-4<p\leqslant\sum_{i=1}^{5}\binom{l}{i}-4$ 时，$K_{1,3,p}$ 存在 l-VDIETC。

证明 为了给出 $K_{1,3,p}$ 的 l-IE-全染色，先对 $K_{1,3,p}$ 的每个顶点对应 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的一个子集，令 $D(y_1)=\{1,2,\cdots,l\}$，$D(y_2)=D(y_1)\setminus\{1\}$，$D(y_3)=D(y_1)\setminus\{3\}$，$D(x)=D(y_1)\setminus\{2\}$，$D(z_i)=\{i+3\}$，$i=1,2,\cdots,l-3$，$D(z_{l-2})=\{1,4\}$，$D(z_{l-1})=\{3,4\}$，将除 $\{1,2\}$、$\{1,4\}$、$\{3,4\}$ 外的 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的其余 2-子集，3-子集，…，5-子集排成一个序列 $\mathscr{S}_1$。令 $D(z_l),D(z_{l+1}),\cdots,D(z_p)$ 依次是 $\mathscr{S}_1$ 中的第 $1,2,\cdots,p-l+1$ 项。因为 $\mathscr{S}_1$ 中含 $\binom{l}{2}+\binom{l}{3}+\cdots+\binom{l}{5}-3$ 项，而 $p-l+1\leqslant\binom{l}{2}+\binom{l}{3}+\cdots+\binom{l}{5}-3$，即 $p\leqslant\sum_{i=1}^{5}\binom{l}{i}-4$。

下面给出 $K_{1,3,p}$ 的一个 l-IE-全染色 f。令 $f(x)=1$，$f(y_j)=2$，$j=1,2,3$；用 $\max D(z_i)$ 染点 z_i，$i=1,2,\cdots,p$。而 z_i 的关联边均染以 $i+3$，$i=1,2,\cdots,l-3$。对 $|D(z_i)|=2$，用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i，$\min[D(y_j)\cap D(z_i)]$ 染边 y_jz_i，$j=1,2,3$，$i=l-2,\cdots,p$；对 $|D(z_i)|=3$，用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i，$\min[(D(y_j)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_jz_i，$j=1,2,3$，$i=l,\cdots,p$；对 $|D(z_i)|=4$，用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i，$\min[(D(y_1)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i，$i=l,\cdots,p$，$\min[(D(y_j)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_jz_i，$j=2,3$，$i=l,\cdots,p$；对 $|D(z_i)|=5$，用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i，$\min[(D(y_1)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i，$i=l,\cdots,p$，$\min[(D(y_2)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_2z_i，$i=l,\cdots,p$；$\min[(D(y_3)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i),f(y_2z_i)\}]$ 染边 y_3z_i，$i=l,\cdots,p$；用 $\min[D(x)\cap D(y_j)]$ 染边 xy_j，$j=1,2,3$。

最后得到的 $K_{1,3,p}$ 的 l-IE 全染色 f 是点可区别的，因为 $\forall v\in V(K_{1,3,p})$，所以有 $C(v)=D(v)$。

注 $K_{1,3,p}(p=56,57,58)$ 的 7-VDIETC 可由 $K_{1,3,115}$ 的 7-VDIETC 限制在 $\{x,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,\cdots,z_p\}$ 上得出。

$K_{1,3,116}$ 的 8-VDIETC 可由 $K_{1,3,214}$ 的 8-VDIETC 限制在 $\{x, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, \cdots, z_{116}\}$ 上得出。

引理 3　当 $k \geqslant 7$，$p > \sum_{i=1}^{6}\binom{k-1}{i} - 4$ 时，$K_{1,4,p}$ 没有 $(k-1)$-GVDTC。

证明　假定 $K_{1,4,p}$ 存在 $(k-1)$-GVDTC g。若顶点 x 的色集合是 1-子集，设为 $\{a\}$，$a \in \{1,2,\cdots,k-1\}$，则 Z 中每个点的色集合里含 a。而 $\{1,2,\cdots,k-1\}$ 中含 a 的 2-子集，…，6-子集共有 $\binom{k-2}{1} + \cdots + \binom{k-2}{5}$ 个，不能区别 Z 中诸顶点，因为当 $k \geqslant 7$ 时，有 $\binom{k-2}{1} + \cdots + \binom{k-2}{5} < p$，矛盾，所以 x 的色集合不是 1-子集。同理，Y 中点的色集合也不是 1-子集。

1-子集只能是 Z 中点的色集合，显然 $\{1\}, \cdots, \{k-1\}$ 不全是 Z 中点的色集合，不妨设 $\{1\}$ 不是 Z 中任意点的色集合；若 $\{2\}, \cdots, \{k-1\}$ 均是 Z 中点的色集合，那么 $\{2,\cdots,k-1\} \subseteq C(x)$，$\{2,\cdots,k-1\} \subseteq C(y_j)$，$j = 1,2,3,4$，不能区分 Y 中的点，不妨设 $\{2\}$ 不是 Z 中任意点的色集合；同理，$\{3\}, \{4\}, \cdots, \{k-1\}$ 不全是 Z 中点的色集合，不妨设 $\{3\}$ 不是 Z 中任意点的色集合；若 $\{4\}, \{5\}, \cdots, \{k-1\}$ 均是 Z 中点的色集合，那么 $\{4,5,\cdots,k-1\} \subseteq C(x)$，$\{4,5,\cdots,k-1\} \subseteq C(y_j)$，$j = 1,2,3,4$。$C(x)$、$C(y_1)$、$C(y_2)$、$C(y_3)$、$C(y_4)$ 是以下集合之一：$\{1,2,\cdots,k-1\}$，$\{1,4,5,\cdots,k-1\}$，$\{2,4,5,\cdots,k-1\}$，$\{3,4,5,\cdots,k-1\}$，$\{1,2,4,\cdots,k-1\}$，$\{1,3,4,\cdots,k-1\}$，$\{2,3,4,\cdots,k-1\}$，$\{4,5,\cdots,k-1\}$。若 $\{1,2,\cdots,k-1\}$ 是 x 的色集合或是某个 y_j 的色集合，则 $p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{k-1}{i} - 4$，矛盾；若 $\{1,2,\cdots,k-1\}$ 不是 x，y_j 任意一点的色集合，则 $p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{k-1}{i} - 5$，矛盾。

注　$k = 9$ 时，$p = \sum_{i=1}^{6}\binom{k-1}{i} - 4 = 242$，$K_{1,4,242}$ 没有 8-GVDTC。

引理 4　当 $l \geqslant 9$，且 $\sum_{i=1}^{6}\binom{l-1}{i} - 5 < p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{l}{i} - 5$ 时，$K_{1,4,p}$ 存在 l-VDIETC。

证明　如下构造 $K_{1,4,p}$ 的 l-VDIETC f。令 $D(y_1) = \{1,2,\cdots,l\}$，$D(y_2) = D(y_1) \setminus \{1\}$，$D(y_3) = D(y_1) \setminus \{3\}$，$D(y_4) = D(y_1) \setminus \{1,3\}$，$D(x) = D(y_1) \setminus \{2\}$，$D(z_i) = \{i+3\}$，$i = 1,2,\cdots,l-3$，$D(z_{l-2}) = \{1,4\}$，$D(z_{l-1}) = \{3,4\}$。将除 $\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{3,4\}$ 外的 $\{1,2,\cdots,l\}$ 所有 2-子集，3-子集，…，6-子集排成一个序列 $\mathscr{S}_2$，它含 $\binom{l}{2} + \binom{l}{3} + \cdots + \binom{l}{6} - 4$ 个项。让 $D(z_l)$，$D(z_{l+1})$，…，$D(z_p)$ 依次是 $\mathscr{S}_2$ 中的第 1，2，…，$p-l+1$ 项。这一点是可以做到的，因为 $p - l + 1 \leqslant \binom{l}{2} + \binom{l}{3} + \binom{l}{4} + \binom{l}{5} + \binom{l}{6} - 4$，即 $p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{l}{i} - 5$。

下面给出 $K_{1,4,p}$ 的一个 l-IE-全染色 f。令 $f(x) = 1$，$f(y_j) = 2$，$j = 1,2,3,4$；用 $\max D(z_i)$ 染点 z_i，$i = 1,2,\cdots,p$。而 z_i 的关联边均染以 $i+3$，$i = 1,2,\cdots,l-3$。对 $|D(z_i)| = 2$，用 $\min[D(x) \cap D(z_i)]$ 染边 xz_i，$\min[D(y_j) \cap D(z_i)]$ 染边 y_jz_i，$j = 1,2,3,4$，$i = l-2,\cdots,p$；对 $|D(z_i)| = 3$，用 $\min[D(x) \cap D(z_i)]$ 染边 xz_i，$\min[(D(y_j) \cap D(z_i)) \setminus \{f(xz_i)\}]$ 染边 y_jz_i，$j = 1,2,3,4$，$i = l,\cdots,p$；对 $|D(z_i)| = 4$，用 $\min[D(x) \cap D(z_i)]$ 染边 xz_i，$\min[(D(y_1) \cap D(z_i)) \setminus \{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i，$i = l,\cdots,p$，$\min[(D(y_j) \cap D(z_i)) \setminus \{f(xz_i), f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_jz_i，$j = 2,3,4$，$i = l,\cdots,p$；对 $|D(z_i)| = 5$，用 $\min[D(x) \cap D(z_i)]$ 染边 xz_i，$\min[(D(y_1) \cap D(z_i)) \setminus \{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i，$i = l,\cdots,p$，$\min[(D(y_2) \cap D(z_i)) \setminus \{f(xz_i), f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_2z_i，$i = l,\cdots,p$；$\min[(D(y_j) \cap D(z_i)) \setminus \{f(xz_i), f(y_1z_i), f(y_2z_i)\}]$ 染边 y_jz_i，$j = 3,4$，$i = l,\cdots,p$；对 $|D(z_i)| = 6$，用 $\min[D(x) \cap D(z_i)]$ 染边 xz_i，$\min[(D(y_1) \cap D(z_i))\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i，$i = l,\cdots,p$，$\min[(D(y_2) \cap D(z_i)) \setminus \{f(xz_i), f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_2z_i，$i = l,\cdots,p$；$\min[(D(y_3) \cap D(z_i)) \setminus \{f(xz_i), f(y_1z_i), f(y_2z_i)\}]$ 染边 y_3z_i，$i = l,\cdots,p$，$\min[(D(y_4) \cap D(z_i)) \setminus \{f(xz_i), f(y_1z_i), f(y_2z_i), f(y_3z_i)\}]$ 染边 y_4z_i，$i = l,\cdots,p$；用 $\min[D(x) \cap D(y_j)]$ 染边 xy_j，$j = 1,2,3,4$。最后得到的 $K_{1,4,p}$ 的 l-IE 全染色 f 是点可区别的，因为 $\forall v \in V(K_{1,4,p})$，均有 $C(v) = D(v)$。

注　$K_{1,4,241}$ 的 9-VDIETC 可由 $K_{1,4,334}$ 的 9-VDIETC 限制在 $\{x, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, \cdots, z_{241}\}$ 上得出。

引理 5 设 $k \geqslant 8$ 且 $p = \sum_{i=1}^{5}\binom{k}{i}$,则 $K_{1,3,p}$ 存在 k-GVDTC。

证明 如下构造 $K_{1,3,p}$ 的 k-GVDTC: 令 $D(x) = \{1,2,\cdots,k\}$, $D(y_1) = D(x)\setminus\{1\}$, $D(y_2) = D(x)\setminus\{2\}$, $D(y_3) = D(x)\setminus\{1,2\}$, $D(z_i) = \{i+2\}$, $i = 1,2,\cdots,k-2$, $D(z_{k-1}) = \{1,3\}$, $D(z_k) = \{2,3\}$。将除$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$外的$\{1,2,\cdots,k\}$的2-子集、3-子集、4-子集、5-子集排成一个序列 $\mathscr{S}_3$,它有 $\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\binom{k}{4}+\binom{k}{5}-3$ 个项,让 $D(z_{k+1})$,$D(z_{k+2})$,$\cdots$,$D(z_p)$ 依次是 $\mathscr{S}_3$ 中的第 $1,2,\cdots,p-k$ 项。这一点是可以做到的,因为 $p-k = \binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\binom{k}{4}+\binom{k}{5}-3$。

下面给出 $K_{1,3,p}$ 的 k-GVDTC f。令 $f(x) = f(y_j) = k$, $j = 1,2,3$; 用 $\max D(z_i)$ 染点 z_i, $i = 1,2,\cdots,p$。将 z_i 的关联边均染以 $i+2$, $i = 1,2,\cdots,k-2$。对 $|D(z_i)| = 2$,用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i, $\min[D(y_j)\cap D(z_i)]$ 染边 y_jz_i, $j = 1,2,3$, $i = k-1,\cdots,p$; 对 $|D(z_i)| = 3$,用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i, $\min[(D(y_j)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_jz_i, $j = 1,2,3$, $i = k+1,\cdots,p$; 对 $|D(z_i)| = 4$,用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i, $\min[(D(y_1)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i, $i = k+1,\cdots,p$, $\min[(D(y_j)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_jz_i, $j = 2,3$, $i = k+1,\cdots,p$; 对 $|D(z_i)| = 5$,用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i, $\min[(D(y_1)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i, $i = k+1,\cdots,p$, $\min[(D(y_2)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_2z_i, $i = k+1,\cdots,p$; $\min[(D(y_3)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i),f(y_2z_i)\}]$ 染边 y_3z_i, $i = k+1,\cdots,p$; 用 $\min[D(x)\cap D(y_j)]$ 染边 xy_j, $j = 1,2,3$。

引理 6 $3 < k < 6$, $p = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}-7$ 时,$K_{1,3,p}$ 没有 k-VDIETC。

证明 若 $K_{1,3,p}$ 有 k-VDIETC g,不妨设 $g(x) = 1$, $g(y_j) = 2$(可证 $g(y_j)$ 互异时矛盾), $j = 1,2,3$。存在$c_0 \in \{3,4,\cdots,k\}$,使$\{c_0\}$不是 Z 中点的色集合,又$\{1\}$、$\{2\}$、$\{1,2\}$、$C(x)$、$C(y_1)$、$C(y_2)$、$C(y_3)$也均不是 Z 中任意点的色集合,故 $p \leqslant \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}-8$,矛盾。

引理 7 当 $k \geqslant 9$ 且 $p = \sum_{i=1}^{6}\binom{k}{i}-4$ 时, $K_{1,4,p}$ 存在 k-GVDTC。

证明 如下给出 $K_{1,4,p}$ 的 k-GVDTC: 令 $D(x) = \{1,2,\cdots,k\}$, $D(y_1) = D(x)\setminus\{1\}$, $D(y_2) = D(x)\setminus\{2\}$, $D(y_3) = D(x)\setminus\{3\}$, $D(y_4) = D(x)\setminus\{1,2\}$, $D(z_i) = \{i+3\}$, $i = 1,2,\cdots,k-3$, $D(z_{k-2}) = \{1,3\}$, $D(z_{k-1}) = \{2,3\}$, $D(z_k) = \{3,4\}$。将除$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{3,4\}$外的$\{1,2,\cdots,k\}$的2-子集,$\cdots$,6-子集排成一个序列 $\mathscr{S}_4$,它有$\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\binom{k}{4}+\binom{k}{5}+\binom{k}{6}-4$ 个项,让 $D(z_{k+1})$,$D(z_{k+2})$,$\cdots$,$D(z_p)$ 依次是 $\mathscr{S}_4$ 中的第 $1,2,\cdots,p-k$ 项。这一点是可以做到的,因为 $p-k = \binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\binom{k}{4}+\binom{k}{5}+\binom{k}{6}-4$,即 $p = \sum_{i=1}^{6}\binom{k}{i}-4$。

下面给出 $K_{1,4,p}$ 的 k-GVDTC f。令 $f(x) = f(y_j) = k$, $j = 1,2,3,4$; 用 $\max D(z_i)$ 染点 z_i, $i = 1,2,\cdots,p$。将 z_i 的关联边均染以 $i+3$, $i = 1,2,\cdots,k-3$。对 $|D(z_i)| = 2$,用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i, $\min[D(y_j)\cap D(z_i)]$ 染边 y_jz_i, $j = 1,2,3,4$, $i = k-2,\cdots,p$; 对 $|D(z_i)| = 3$,用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i, $\min[(D(y_j)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_jz_i, $j = 1,2,3,4$, $i = k+1,\cdots,p$; 对 $|D(z_i)| = 4$,用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i, $\min[(D(y_1)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i, $i = k+1,\cdots,p$, $\min[(D(y_j)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_jz_i, $j = 2,3,4$, $i = k+1,\cdots,p$; 对 $|D(z_i)| = 5$,用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i, $\min[(D(y_1)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i, $i = k+1,\cdots,p$, $\min[(D(y_2)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_2z_i, $i = k+1,\cdots,p$; $\min[(D(y_j)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i),f(y_2z_i)\}]$ 染边 y_jz_i, $j = 3,4$, $i = k+1,\cdots,p$; 对 $|D(z_i)| = 6$,用 $\min[D(x)\cap D(z_i)]$ 染边 xz_i, $\min[(D(y_1)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i)\}]$ 染边 y_1z_i, $i = k+1,\cdots,p$, $\min[(D(y_2)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i)\}]$ 染边 y_2z_i, $i = k+1,\cdots,p$; $\min[(D(y_3)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i),f(y_2z_i)\}]$ 染边 y_3z_i, $i = k+1,\cdots,p$, $\min[(D(y_4)\cap D(z_i))\setminus\{f(xz_i),f(y_1z_i),f(y_2z_i),f(y_3z_i)\}]$ 染

边 y_4z_i,$i = k+1,\cdots,p$; 用 $\min[D(x) \cap D(y_j)]$ 染边 xy_j,$j = 1,2,3,4$。

2　主要结果及其证明

定理 1　(ⅰ) $$\chi_{vt}^{ie}(K_{1,3,p}) = \begin{cases} 4, & 3 \leqslant p \leqslant 7 \\ 5, & 8 \leqslant p \leqslant 23 \\ 6, & 24 \leqslant p \leqslant 55 \\ 7, & 56 \leqslant p \leqslant 115 \\ k, & \sum_{i=1}^{5}\binom{k-1}{i} - 4 < p \leqslant \sum_{i=1}^{5}\binom{k}{i} - 4, k \geqslant 8 \end{cases}$$

(ⅱ) $$\chi_{gvt}(K_{1,3,p}) = \begin{cases} 4, & 3 \leqslant p \leqslant 8 \\ 5, & 9 \leqslant p \leqslant 24 \\ 6, & 25 \leqslant p \leqslant 56 \\ 7, & 57 \leqslant p \leqslant 116 \\ k, & \sum_{i=1}^{5}\binom{k-1}{i} - 3 < p \leqslant \sum_{i=1}^{5}\binom{k}{i} - 3, k \geqslant 8 \end{cases}$$

证明　分以下几种情况进行讨论:

情形 1　$k \geqslant 8$ 且 $p = \sum_{i=1}^{5}\binom{k}{i} - 3$。

此时,$K_{1,3,p}$ 没有 k-VDIETC。假如 $K_{1,3,p}$ 有 k-VDIETC,不妨设 $g(x) = 1$,$g(y_j) = 2$(可证 $g(y_j)$ 互异时矛盾),$j = 1,2,3$。若 $\{3\}$,$\{4\}$,$\cdots$,$\{k\}$ 均是 Z 中点的色集合,那么 $\{2,3,\cdots,k\} \subseteq C(y_j)$,$j = 1,2,3$,不能区分 Y 中的点。不妨设 $\{3\}$ 不是 Z 中任意点的色集合,那么 $p \leqslant \sum_{i=1}^{5}\binom{k}{i} - 4$,矛盾。同时,由引理 5 知 $K_{1,3,p}$ 存在 k-GVDTC。

情形 2　$k \geqslant 8$ 且 $\sum_{i=1}^{5}\binom{k-1}{i} - 3 < p \leqslant \sum_{i=1}^{5}\binom{k}{i} - 4$。

此时,由引理 1 可知,$K_{1,3,p}$ 无 $(k-1)$-GVDTC。同时,在引理 2 中令 $l = k$ 可得 $K_{1,3,p}$ 存在 k-VDIETC。又由命题 1 得,$k \leqslant \chi_{gvt}(K_{1,3,p}) \leqslant \chi_{vt}^{ie}(K_{1,3,p}) = k$,即此时 $\chi_{gvt}(K_{1,3,p}) = \chi_{vt}^{ie}(K_{1,3,p}) = k$。

情形 3　$K_{1,3,116}$ 没有 7-VDIETC(可参照情形 1 证明),由引理 2 注记知其有 8-VDIETC。同时,在引理 1 中令 $k = 7$,可得 $K_{1,3,116}$ 没有 6-GVDTC,但是它存在 7-GVDTC,染色与引理 5 中相应染色类似,只是色集合序列中需剔除 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$D(y_3)$。

情形 4　$57 \leqslant p \leqslant 115$。先证 $K_{1,3,57}$ 没有 6-GVDTC。假如 $K_{1,3,57}$ 有 6-GVDTC,由引理 1 的证明知 1-子集只能是 Z 中点的色集合,显然 $\{1\}$,$\cdots$,$\{6\}$ 不全是 Z 中点的色集合,不妨设 $\{1\}$ 不是;易知 $\{2\}$,$\cdots$,$\{6\}$ 不全是 Z 中点的色集合,不妨设 $\{2\}$ 也不是 Z 中任意点的色集合。若 $\{3\}$,$\cdots$,$\{6\}$ 均是 Z 中点的色集合,则 $\{3,\cdots,6\} \subseteq C(x)$,$\{3,\cdots,6\} \subseteq C(y_j)$,$j = 1,2,3$。$C(x)$,$C(y_j)$ 只能是以下集合:$\{1,2,3,\cdots,6\}$,$\{1,3,\cdots,6\}$,$\{2,3,\cdots,6\}$,$\{3,\cdots,6\}$,则 $\{1\}$,$\{2\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3,\cdots,6\}$,$\{2,3,\cdots,6\}$,$\{3,\cdots,6\}$ 不是 Z 中任意点的色集合,$p \leqslant \sum_{i=1}^{5}\binom{6}{i} - 6 = 56$,矛盾。

在引理 2 中令 $l = 7$ 及其注记可知 $K_{1,3,p}$ 有 7-VDIETC。

情形 5　$K_{1,3,56}$ 没有 6-VDIETC。假如 $K_{1,3,56}$ 有 6-VDIETC,不妨设 $g(x) = 1$,$g(y_j) = 2$,$j = 1,2,3$。若 $\{3\}$,$\{4\}$,$\cdots$,$\{k\}$ 均是 Z 中点的色集合,那么 $\{2,3,\cdots,k\} \subseteq C(y_j)$,$j = 1,2,3$,不能区分 Y 中的点。不妨设 $\{3\}$ 不是 Z 中任意点的色集合。若 $\{4\}$、$\{5\}$、$\{6\}$ 均是 Z 中点的色集合,则 $\{2,4,5,6\} \subseteq C(y_j)$,$C(y_1)$,$C(y_2)$,$C(y_3)$ 是以下集合之一:$\{1,2,3,4,5,6\}$,$\{1,2,4,5,6\}$,$\{2,3,4,5,6\}$,$\{2,4,5,6\}$,若 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 是 Y 中某个点的色集合,则 $p \leqslant \sum_{i=1}^{5}\binom{6}{i} - 7 = 55$,矛盾。若 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 不是 Y 中任意点的色集合,则 $p \leqslant \sum_{i=1}^{5}\binom{6}{i} -$

$8=54$,矛盾。由引理2注记知 $K_{1,3,56}$ 有7-VDIETC。

在引理1中令 $k=6$ 知 $K_{1,3,56}$ 没有5-GVDTC。但是它存在6-GVDTC,染色与引理5中相应染色类似,只是色集合序列中需剔除$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$D(y_j)$,$j=1,2,3$。

情形6 $25\leqslant p\leqslant 55$。先证 $K_{1,3,25}$ 没有5-GVDTC。假如 $K_{1,3,25}$ 有5-GVDTC,由引理1的证明知1-子集只能是 Z 中点的色集合,显然$\{1\},\cdots,\{5\}$不全是 Z 中点的色集合,不妨设$\{1\}$不是;易知$\{2\},\cdots,\{5\}$不全是 Z 中点的色集合,不妨设$\{2\}$也不是 Z 中任意点的色集合。若$\{3\}$、$\{4\}$、$\{5\}$均是 Z 中点的色集合,则$\{3,4,5\}\subseteq C(x)$,$\{3,4,5\}\subseteq C(y_j)$,$j=1,2,3$。$C(x)$,$C(y_j)$只能是以下集合:$\{1,2,3,4,5\}$,$\{1,3,4,5\}$,$\{2,3,4,5\}$,$\{3,4,5\}$,则 $p\leqslant \sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}-7=24$,矛盾。

在引理6中令 $k=5$,知 $K_{1,3,24}$ 没有5-VDIETC,那么 $K_{1,3,p}(25\leqslant p\leqslant 55)$ 不存在5-VDIETC。但是它存在6-VDIETC,染色与引理2中相应染色类似,只是色集合序列中需剔除$\{1,2\}$、$\{1,4\}$、$\{3,4\}$、$D(y_2)$、$D(y_3)$、$D(x)$。

情形7 $9\leqslant p\leqslant 23$。先证 $K_{1,3,9}$ 没有4-GVDTC。假如 $K_{1,3,9}$ 有4-GVDTC,由引理1的证明知1-子集只能是 Z 中点的色集合,由情形5的证明可设$\{1\}$,$\{2\}$不是 Z 中点的色集合,若$\{3\}$,$\{4\}$均是 Z 中点的色集合,则$\{3,4\}\subseteq C(x)$,$\{3,4\}\subseteq C(y_j)$,$j=1,2,3$。$C(x)$,$C(y_j)$只能是以下集合:$\{1,2,3,4\}$,$\{1,3,4\}$,$\{2,3,4\}$,$\{3,4\}$,则 $p\leqslant \sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}-7=8$,矛盾。

在引理6中令 $k=4$,知 $K_{1,3,8}$ 没有4-VDIETC,那么 $K_{1,3,p}(9\leqslant p\leqslant 23)$ 不存在4-VDIETC。但是它存在5-VDIETC,染色与引理2中相应染色类似,只是色集合序列中需剔除$\{1,2\}$、$\{1,4\}$、$\{3,4\}$、$D(x)$、$D(y_j)$。

情形8 在引理6中令 $k=5$,可知 $K_{1,3,24}$ 没有5-VDIETC。$K_{1,3,24}$ 的6-VDIETC可由 $K_{1,3,55}$ 的6-VDIETC限制在$\{x,y_1,y_2,y_3,z_1,\cdots,z_{24}\}$上得到。

同时,由情形7可知 $K_{1,3,24}$ 没有4-GVDTC,但是它存在5-GVDTC,染色与引理5中相应染色类似,只是色集合序列中需剔除$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$D(x)$、$D(y_j)$,$j=1,2,3$。

情形9 $3\leqslant p\leqslant 7$。先证 $K_{1,3,3}$ 没有3-GVDTC。$\{1,2,3\}$有7个非空子集,若 $K_{1,3,3}$ 有3-GVDTC,则7个非空子集均是 $K_{1,3,3}$ 中点的色集合,又因为1-子集只能是 Z 中点的色集合,矛盾。

若 $K_{1,3,p}$ 有3-VDIETC,不妨设 $g(x)=1$,$g(y_j)=2$(可证明 $g(y_j)$ 互异时矛盾),$j=1,2,3$,则 Z 中顶点必用3染。而$\{1,2,3\}$的含3的子集为$\{3\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$。若 Z 中某个顶点的色集合为$\{3\}$,则 $X\cup Y$ 中点的色集合必为$\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$,矛盾;若 Z 中任意顶点的色集合不为$\{3\}$,此时只能令 $p=3$,且$\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$不是 $K_{1,3,p}$ 中任意顶点的色集合,矛盾。因此 $K_{1,3,p}(3\leqslant p\leqslant 7)$ 无3-VDIETC。

下面构造 $K_{1,3,7}$ 的4-VDIETC。令 $D(y_1)=\{1,2,3,4\}$,$D(y_2)=D(y_1)\setminus\{1\}$,$D(y_3)=D(y_1)\setminus\{3\}$,$D(x)=D(y_1)\setminus\{2\}$,$D(z_1)=\{4\}$,$D(z_2)=\{1,4\}$,$D(z_3)=\{3,4\}$,将除$\{1,2\}$、$\{1,4\}$、$\{3,4\}$、$D(x)$、$D(y_j)$外的$\{1,2,3,4\}$的所有2-子集、3-子集、4-子集,排成一个序列 $\mathscr{S}_5$,它含 $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}-7=4$ 个项,让 $D(z_4),\cdots,D(z_7)$ 依次是 $\mathscr{S}_5$ 中的第1,2,3,4项,显然成立。具体染色可参照引理2。

情形10 在引理6中令 $k=4$,知 $K_{1,3,8}$ 没有4-VDIETC,其5-VDIETC可由 $K_{1,3,23}$ 的5-VDIETC限制在$\{x,y_1,y_2,y_3,z_1,\cdots,z_8\}$上得到。由情形8知 $K_{1,3,8}$ 没有3-GVDTC,其4-GVDTC容易给出。

定理2 (i)
$$\chi_{vt}^{ie}(K_{1,4,p})=\begin{cases}4, & p=4,5\\ 5, & 6\leqslant p\leqslant 21\\ 6, & 22\leqslant p\leqslant 53\\ 7, & 54\leqslant p\leqslant 117\\ 8, & 118\leqslant p\leqslant 240\\ 9, & p=241\\ k, & \sum_{i=1}^{6}\binom{k-1}{i}-5<p\leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{k}{i}-5,\ k\geqslant 9\end{cases}$$

$$（ⅱ）\chi_{gvt}(K_{1,4,p}) = \begin{cases} 4, & 4 \leqslant p \leqslant 6 \\ 5, & 7 \leqslant p \leqslant 22 \\ 6, & 23 \leqslant p \leqslant 54 \\ 7, & 55 \leqslant p \leqslant 118 \\ 8, & 119 \leqslant p \leqslant 241 \\ 9, & p = 242 \\ k, & \sum_{i=1}^{6}\binom{k-1}{i} - 4 < p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{k}{i} - 4,\ k \geqslant 9 \end{cases}$$

证明　分以下几种情况进行讨论。

情形 1　当 $k \geqslant 9$ 且 $p = \sum_{i=1}^{6}\binom{k}{i} - 4$ 时，$K_{1,4,p}$ 没有 k-VDIETC。若 $K_{1,4,p}$ 有 k-VDIETC，不妨设 $g(x) = 1$。如果 $g(y_1), \cdots, g(y_4)$ 中至少有两个互异，不妨设 $g(y_1) = 2$，$g(y_2) = 3$，那么 $\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{1,2,3\}$ 不是 Z 中任意点的色集合，$p \leqslant \sum_{i=1}\binom{k}{i} - 7$，矛盾，因此可假设 $g(y_j) = 2$，$j = 1,2,3,4$，假如 $\{3\}, \{4\}, \cdots, \{k\}$ 均是 Z 中点的色集合，那么 $\{2,3,\cdots,k\} \subseteq C(y_j)$，$j = 1,2,3,4$，矛盾，不妨设 $\{3\}$ 不是 Z 中任意点的色集合。除 $\{1\}$、$\{2\}$、$\{1,2\}$、$\{3\}$ 外，$\{1,2,\cdots,k\}$ 其他的 1-子集，2-子集，…，6-子集均是 Z 中点的色集合，$\{4\}, \cdots, \{k\}$ 毫不例外，于是 $\{1,4,5,\cdots,k\} \subseteq C(x)$，$\{2,4,5,\cdots,k\} \subseteq C(y_j)$，$j = 1,2,3,4$，因而 $C(y_1), \cdots, C(y_4)$ 只能是 $\{1,2,\cdots,k\}$，$\{1,2,\cdots,k\} \backslash \{1\}$，$\{1,2,\cdots,k\} \backslash \{3\}$，$\{1,2,\cdots,k\} \backslash \{1,3\}$。不妨设 $C(y_4) = \{1,2,\cdots,k\} \backslash \{1,3\}$，但是 $\{1,3\}$ 是 Z 中某点的色集合，从而 $C(y_4) \cap C(z) = \varnothing$，矛盾。同时，由引理 3 知 $K_{1,4,p}$ 没有 $(k-1)$-GVDTC，但是由引理 7 可得其 k-GVDTC。

情形 2　当 $k \geqslant 9$，$\sum_{i=1}^{6}\binom{k-1}{i} - 4 < p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{k}{i} - 5$ 时，由引理 3 可证 $K_{1,4,p}$ 没有 $(k-1)$-GVDTC。同时，在引理 4 中令 $l = k$ 知 $K_{1,4,p}$ 有 k-VDIETC，因此，由命题 1 得，$k \leqslant \chi_{gvt}(K_{1,4,p}) \leqslant \chi_{vt}^{ie}(K_{1,4,p}) = k$，即此时 $\chi_{gvt}(K_{1,4,p}) = \chi_{vt}^{ie}(K_{1,4,p}) = k$。

情形 3　$K_{1,4,242}$ 没有 8-GVDTC（由引理 3 的注记可知），$K_{1,4,242}$ 的 9-GVDTC 可由 $K_{1,4,461}$（在引理 7 中令 $k = 9$）的 9-GVDTC 限制在 $\{x, y_1, \cdots, y_4, z_1, \cdots, z_{242}\}$ 上得到。

$K_{1,4,241}$ 没有 8-VDIETC，参照情形 1 可证明。由引理 4 的注记知 $K_{1,4,241}$ 有 9-VDIETC。

情形 4　$119 \leqslant p \leqslant 240$。先证 $K_{1,4,119}$ 没有 7-GVDTC。若 $K_{1,4,119}$ 存在 7-GVDTC，类似于引理 3，若 $\{1,2,\cdots,7\}$ 是 x, y_j 某点的色集合，则 $p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{7}{i} - 8 = 118$，矛盾；若 $\{1,2,\cdots,7\}$ 不是 x, y_j 任意一点的色集合，则 $p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{7}{i} - 10 = 116$，矛盾。

$K_{1,4,240}$ 的 8-VDIETC 依照引理 4 去染，只是色集合序列中需剔除 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{1,4\}$、$\{3,4\}$、$D(y_4)$。

情形 5　当 $55 \leqslant p \leqslant 117$ 时，$K_{1,4,p}$ 没有 6-GVDTC。若 $K_{1,4,55}$ 有 6-GVDTC，类似于引理 3，若 $\{1,2,\cdots,6\}$ 是 x, y_j 中某点的色集合，则 $p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{6}{i} - 9 = 54$，矛盾；若 $\{1,2,\cdots,6\}$ 不是 x、y_j 任意一点的色集合，则 $p \leqslant \sum_{i=1}^{6}\binom{6}{i} - 11 = 52$，矛盾。

同时，$K_{1,4,117}$ 的 7-VDIETC f 依照引理 4 去染，只是色集合序列中需剔除 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{1,4\}$、$\{3,4\}$、$D(y_2)$、$D(y_3)$、$D(y_4)$、$D(x)$。

情形 6　$K_{1,4,118}$。此时，$K_{1,4,118}$ 没有 7-VDIETC（证明类似于情形 1）。同时，将 $K_{1,4,240}$ 的 8-VDIETC 限制在 $\{x, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, \cdots, z_{118}\}$ 上就得到 $K_{1,4,118}$ 的 8-VDIETC。由情形 5 知 $K_{1,4,118}$ 没有 6-GVDTC。但是 $K_{1,4,118}$ 存在 7-GVDTC，染色依照引理 7 去染，只是色集合序列中需剔除 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{3,4\}$、$D(y_j)$，$j = 1,2,3,4$。

情形 7 当 $23 \leqslant p \leqslant 53$ 时, $K_{1,4,p}$ 没有 5-GVDTC,若 $K_{1,4,23}$ 有 5-GVDTC,类似于引理 3, $p \leqslant \sum_{i=1}^{5}\binom{5}{i}-9=22$,矛盾。同时, $K_{1,4,53}$ 存在 6-VDIETC,可依照引理 4 去染,只是色集合序列中需剔除 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{1,4\}$、$\{3,4\}$、$D(y_2)$、$D(y_3)$、$D(y_4)$、$D(x)$。

情形 8 $K_{1,4,54}$ 没有 6-VDIETC(证明类似于情形 1),其 7-VDIETC 可由 $K_{1,4,117}$ 的 7-VDIETC 限制在 $\{x, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, \cdots, z_{54}\}$ 上得到。由情形 7 可知 $K_{1,4,54}$ 没有 5-GVDTC,但是 $K_{1,4,54}$ 存在 6-GVDTC,染色依照引理 7 去染,只是色集合序列中需剔除 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{3,4\}$、$D(x)$、$D(y_j)$, $j=1,2,3,4$。

情形 9 当 $7 \leqslant p \leqslant 21$ 时, $K_{1,4,p}$ 没有 4-GVDTC,若 $K_{1,4,7}$ 有 4-GVDTC,类似于引理 3, $p \leqslant \sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}-9=6$,矛盾。构造 $K_{1,4,21}$ 的 5-VDIETC f:令 $D(y_1)=\{1,2,\cdots,5\}$, $D(y_2)=D(y_1)\setminus\{1\}$, $D(y_3)=D(y_1)\setminus\{3\}$, $D(y_4)=D(y_1)\setminus\{1,3\}$, $D(x)=D(y_1)\setminus\{2\}$, $D(z_i)=\{i+3\}$, $i=1,2$, $D(z_3)=\{1,4\}$, $D(z_4)=\{3,4\}$。将除 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{1,4\}$、$\{3,4\}$、$D(x)$、$D(y_j)$ 外的 $\{1,2,\cdots,5\}$ 所有 2-子集、3-子集、4-子集、5-子集排成一个序列 $\mathscr{S}_6$,它含 $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\cdots+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}-9=17$ 个项。让 $D(z_5),\cdots,D(z_{21})$ 依次是 $\mathscr{S}_6$ 中的第 $1,2,\cdots,17$ 项。显然成立。具体染色参照引理 4。

情形 10 $K_{1,4,22}$ 没有 5-VDIETC(证明类似于情形 1),其 6-VDIETC 可由 $K_{1,4,53}$ 的 6-VDIETC 限制在 $\{x, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, \cdots, z_{22}\}$ 上得到。由情形 9 可知 $K_{1,4,22}$ 没有 4-GVDTC,如下构造 $K_{1,4,22}$ 的 5-GVDTC:令 $D(x)=\{1,2,\cdots,5\}$, $D(y_1)=D(x)\setminus\{1\}$, $D(y_2)=D(x)\setminus\{2\}$, $D(y_3)=D(x)\setminus\{3\}$, $D(y_4)=D(x)\setminus\{1,2\}$, $D(z_i)=\{i+3\}$, $i=1,2$, $D(z_3)=\{1,3\}$, $D(z_4)=\{2,3\}$, $D(z_5)=\{3,4\}$。将除 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{3,4\}$、$D(x)$、$D(y_j)$ 外的 $\{1,2,\cdots,5\}$ 的 2-子集、3-子集、4-子集、5-子集排成一个序列 $\mathscr{S}_7$,它有 $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}-9=17$ 个项,让 $D(z_6),\cdots,D(z_{22})$ 依次是 $\mathscr{S}_7$ 中的第 $1,2,\cdots,17$ 项。显然成立。具体染色参照引理 7。

情形 11 $K_{1,4,p}(p=4,5)$ 没有 3-GVDTC(易证),存在 4-VDIETC(其染色容易给出)。

$K_{1,4,6}$ 没有 4-VDIETC(易证),存在 5-VDIETC(其染色容易给出)。没有 3-GVDTC(易证),存在 4-GVDTC(其染色容易给出)。

对于一般的完全三部图的 VDIETC 与 GVDTC,我们正在进一步探索中。

参考文献:

[1] HARARY F, PLANTHOLT M. "Conditional colorability in graphs," in graphs and applications [M]. New York: John Wiley & Sons, 1985.

[2] HORNAK M, SOTAK R. The fifth jump of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. Ars Combinatoria, 1996, 42: 233-242.

[3] HORNAK M, SOTAK R. Localization jumps of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. Discuss Math Graph Theory, 1997, 17: 243-251.

[4] HORNAK M, ZAGAGLIA-SALVI N. On the point-distinguishing chromatic index of $K_{m,n}$ [J]. Ars Combinatoria, 2006, 80: 75-85.

[5] ZAGAGLIA-SALVI N. On the value of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. Ars Combinatoria, 1990, 29B: 235-244.

[6] CHEN Xiang'en. Point-distinguishing chromatic index of the union of paths [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2014, 64(3): 629-640.

[7] CHEN Xiang'en, GAO Yuping, YAO Bing. Vertex-distinguishing IE-total colorings of complete bipartite graphs $K_{m,n}(m<n)$ [J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2013, 33: 289-306.

[8] LIU C, ZHU E. General Vertex-distinguishing total coloring of graphs [J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, Article ID 849748, 7 pages.

(编辑: 祁业卿)