一类非线性粘弹性杆波动方程的求解

武　祥[1]　郭　鹏[2]　刘远聪[3]
(1.兰州交通大学机电工程学院　甘肃　兰州　730070;2.兰州交通大学数理与软件工程学院　甘肃　兰州　730070;
3.西北师范大学知行学院　甘肃　兰州　730070)

【摘　要】本文通过引入非线性粘弹性的本构方程得到了弹性杆纵向运动的 Kdv- Burgers- Kuramoto 方程并用试探函数法求得近似解析解。

【关键词】非线性弹性杆;Kdv- Burgers- Kuramoto 方程;试探函数法

非线性波动的研究是物理学和工程学许多领域十分关心的问题。非线性波传播理论的发展,揭示了许多有趣而重要的现象。对于非线性波,如略去耗散效应和弥散效应,其相速度一般与波的振幅有关。

本文通过引入非线性粘弹性本构方程得到了弹性杆纵向运动的 Kdv- Burgers- Kuramoto 方程并用试探函数法求得其近似解析解。

1.方程的建立

在连续介质力学中,有 Lagrange 和 Euler 两种描述。由于在 Lagrange 描述下的运动方程比较简单,所以本文采用 Lagrange 描述。假定 x 为 Lagrange 坐标轴,σ, ε分别为 Lagrange 描述下的纵向应力、应变。对于均匀的等截面细杆,由动量守恒定律可得在 Lagrange 描述下的不计体力的纵向运动方程为:

$$\rho_0\partial^2 u/\partial t^2=\partial\sigma/\partial x \quad (1)$$

其中 ρ_0为杆的初始材料密度,u 为纵向位移。假定材料的本构关系为:

$$\sigma=E\varepsilon+a_n E\varepsilon^n+\eta\varepsilon_t+\rho_0 v^2K^2\varepsilon_{xxt}+\mu\varepsilon_{xxt} \quad (2)$$

其中 E 为材料弹性模量,a_n 和 n 为材料常数,$a_n<0$ 为软非线性材料,$a_n>0$ 为硬非线性材料,η为粘性系数,v 为泊松比,K 为截面极回转半径,μ为不稳定系数。把(2)式代入(1)式中,整理后可得用位移表示的弹性细杆的纵向运动方程为:

$$\partial^2u/\partial t^2-c_0^2[1+\alpha(\partial u/\partial x)^{n-1}]\partial^2u/\partial x^2-\beta\partial^3u/\partial x^2\partial t-\gamma\partial^4u/\partial x^2\partial t^2-\lambda\partial^5u/\partial x^4\partial t=0 \quad (3)$$

其中 $c_0^2=E/\rho_0$是线弹性纵波波速的平方,$\alpha=a_n n$, $\beta=\eta/\rho_0$, $\gamma=v^2K^2$, $\lambda=u/\rho_0$ 。

作变换: $\xi=x-c_0t \quad \tau=\alpha t \quad (4)$

考虑到本构方程后四项与第一项相比为一阶小量,则将(4)式代入(3)式,略去二阶以上小量,(3)式可变为:

$$\partial^2u/\partial\xi\partial\tau+c_0/2(\partial u/\partial\xi)^{n-1}\partial^2u/\partial^2u-\beta/2c_0\alpha\,\partial^3u/\partial\xi^3+\gamma/2\alpha(c_0\partial^4u/\partial\xi^4-\partial^5u/\partial\xi^5)=0 \quad (5)$$

若令: $\zeta=2\xi/c_0 \quad v=\partial u/\partial\xi=2/c_0\,\partial u/\partial\zeta \quad (6)$

代入(5)式可得:

$$\partial v/\partial\tau+v^{n-1}\partial v/\partial\xi+\alpha\partial^2v/\partial\zeta^2+\beta\partial^3v/\partial\zeta^3+\gamma\partial^4v/\partial\zeta^4=0 \quad (7)$$

其中: $\alpha=-2\beta/c_0^3\alpha \quad \beta=4\gamma/c_0^2\alpha \quad \gamma=-8\lambda/c_0^4\alpha$。

(7)式中当 n=2 时,我们就得到了弹性杆纵向运动的 Kdv- Burgers- Kuramoto 方程:

$$\partial v/\partial\tau+v\partial v/\partial\xi+\alpha\partial^2v/\partial\zeta^2+\beta\partial^3v/\partial\zeta^3+\gamma\partial^4v/\partial\zeta^4=0 \quad (8)$$

该方程包含非定常项、非线性项、耗散项、频散项和不稳定项[1,2,3]。

对于该方程我们采用刘式适提出的试探函数法[3]进行求解。

2.方程的求解

把高阶导数项和高幂次非线性项加入到 Burgers 方程中,可以得到方程[4]

$$\partial v/\partial\tau+v\partial v/\partial\zeta+\cdots+v^p[\partial v/\partial\zeta]^q+\alpha_1\partial v/\partial\zeta+\cdots+\alpha_n\partial^n v/\partial\zeta^n=0 \quad (9)$$

其中,p,q,n 和 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$为与自变量 ζ和 τ无关的参数。我们限于求方程(9)的解为下列行波解形式:

$$v=v_0+Be^{b\theta}/(1+e^{a\theta})^d \quad (10)$$

其中 $\theta=\zeta-c\tau$, $v_0=0$ 或 $v_0=c\pm\sqrt{c^2+2A}$;而 c,B,a,b,d 和 A 为待定常数。

首先,我们确定指数 d,可以把(10)代入(9)并令方程中的最高阶导数项与方程中的最高幂次的非线性项的部分平衡求得

$$d=(n-q)/(p+q-1) \quad (11)$$

通过(11)回代到方程(9)和(10)中,经过简单的运算即可确定 c,B,a,b,d 和 A 以及 α_i间的关系,从而求得方程的部分特解。

对于(8)式,d=3,其试探函数形式解为

$$v=v_0+Be^{b\theta}/(1+e^{a\theta})^3 \quad (v_0=c+\sqrt{c^2+2A}) \quad (12)$$

由此求得其对应的解为:

1)当 b=0 时,在满足

$\beta>0,\ \beta^2=144\alpha\gamma/47$　(13)条件下,得到冲击波解

$$\left.\begin{aligned}&v=v_0+15\alpha/47\sqrt{47}\sqrt{\alpha/\gamma}[1+\tanh 1/2\sqrt{47}\sqrt{\alpha/\gamma}\,\theta]^3 \quad (\alpha<0,\gamma<0)\\&v=v_0-15\alpha/47\sqrt{47}\sqrt{\alpha/\gamma}[1-\tanh 1/2\sqrt{47}\sqrt{\alpha/\gamma}\,\theta]^3 \quad (\alpha>0,\gamma>0)\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

2)当 b=a 或 b=2a 时,在满足

$\beta<0,\ \beta^2=16\alpha\gamma$　(15)条件下,得到孤立波解

$$\left.\begin{aligned}&v=v_0+15\alpha\sqrt{\alpha/\gamma}\,\mathrm{sech}^2 1/2\sqrt{\alpha/\gamma}\,\theta[1-\tanh 1/2\sqrt{\alpha/\gamma}\,\theta] \quad (\alpha<0,\gamma<0)\\&v=v_0-15\alpha\sqrt{\alpha/\gamma}\,\mathrm{sech}^2 1/2\sqrt{\alpha/\gamma}\,\theta[1+\tanh 1/2\sqrt{\alpha/\gamma}\,\theta] \quad (\alpha>0,\gamma>0)\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

科

【参考文献】

[1]刘式达,刘式适,黄朝晖,赵强.Kdv- Burgers- Kuramoto 方程的行波解[J].自然科学进展,1999.9: 912- 918.
[2]HUANG Feng, LIU Shikuo。Physical Mechanism and Model of Turbulent Cascades in a Barotropic Atmosphere [J].ADVANCES IN ATMOSPHERIC SCIENCES, 2004,21(1) :34- 40.
[3]刘式适,付遵涛,刘式达,赵强. 求某些非线性偏微分方程特解的一个简洁方法[J].应用数学和力学.2001.22(3): 281- 286.
[4]Kuramoto Y.Chemical Oscillations,Waves and Turbulence[M].Berlin: Springer- Verlag,1984.

作者简介:武祥,男,硕士研究生,1978 年 4 月生。

[责任编辑:韩铭]

(上接第 179 页)方在乐于合作的前提下能进行交际;但礼貌原则则具有更高一层的调节作用,是制约语用的关键。为了恪守礼貌原则,人们甚至不得不牺牲合作原则。这实际上表现出合作原则和礼貌原则之间存在着一种互相补益的关系。在英语口语教学中,教师不但要教学生语言,更要培训学生对交际策略的使用。交际策略是一套技巧,技巧运用的熟练程度和频率因人而异,但却是不可缺少的。教师要以语言为基础,语用为目的,让学生了解语用学中的合作原则和礼貌原则等一些理论知识,以便学以致用,最终提高口语交际能力。科

【参考文献】

[1]文秋芳.英语口语测试与教学[M].上海:上海外语教育出版社.1999.
[2]李传芳.从话语运用和交际策略谈口语交际能力[J].外语教学,2003,(1).
[3]何自然.语用学与英语学习[M].上海:上海外语教育出版社,1997.
[4]周红.合作原则和礼貌原则在大学英语教学中的运用[J].西安外国语学院学报,2003,(2).
[5]杨达复,格赖斯.会话含义的推断[J],外语教学,2003,(1).

[责任编辑:韩铭]