文章编号:1008－1402(2008)02－0265－02

PA列部分和的强收敛性①

张继红

(西北师范大学数学与信息科学学院,甘肃 兰州 730070)

摘　要: 研究了PA列部分和的强收敛性,推广了关于独立随机变量情形时的相应结果.

关键词: PA列;部分和;完全收敛性;强收敛性

中图分类号: O173.1　　**文献标识码:** A

0　引　言

PA(Positively Associated)列是由Esary,Proschan和Walkup于1967年提出的一类重要的相依随机变量,在可靠性理论,渗透理论及多元统计分析中有广泛的应用.

定义1　称随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$为PA,如果对于$R^n$上任意两个使协方差存在且对每个变元均非降的函数$f$和$g$,都有

$$\mathrm{Cov}(f(X_1,X_2,\cdots,X_n),g(X_1,X_2,\cdots,X_n))\geqslant 0.$$

称随机变量序列$\{X_i:i\geqslant 1\}$是PA列,如果对任何自然数$n\geqslant 2$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$都是PA的.

定义2　如果$\forall x>0$,均有

$$\sup P(|X_i|>x)\leqslant P(|X_0|>x).$$

称$\{X_i:i\geqslant 1\}$被随机变量X_0所界.

记$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,n\geqslant 1$.令

$$v(k)=\sup_{i\geqslant 1}\sum_{j-i\geqslant k}\mathrm{Cov}^{\frac{1}{2}}(X_i,X_j).$$

对PA列部分和的完全收敛性已有很深入的结论,但对PA列部分和的强收敛性尚未有结论,因此本文研究了其强收敛性.为证本文结果,需要如下引理:

引理1[1]　设$\{X_i:i\geqslant 1\}$为PA随机变量序列,$EX_i=0(i=1,2,\cdots)$,则

$$E\max_{1\leqslant j\leqslant n}S_j^2\leqslant 4ES_n^2.$$

若进一步假设$\sum_{i=1}^{\infty}v^{\frac{1}{2}}(2^i)<\infty$,则有

$$ES_n^2\leqslant Cn\{\sup_{i\geqslant 1}EX_i^2+(\sup_{i\geqslant 1}EX_i^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

引理2[1]　设$\alpha>\frac{1}{2},0<p<2,\alpha p\geqslant 1$.且设

(i)$h(x)>0$为当$x\to\infty$时的慢变函数,当$\alpha p=1$时假设$h(x)\geqslant c>0$;

(b)$\{X_i:i\geqslant 1\}$为被随机变量X_0所界的PA列,$\sum_{i=1}^{\infty}v^{\frac{1}{2}}(2^i)<\infty$,当$\alpha\leqslant 1$时假设$X_i=0,i\geqslant 1$.

如果

$$E|X_0|^p h(|X_0|^{\frac{1}{\alpha}})<\infty,$$

则$\forall\varepsilon>0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}h(n)P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})<\infty.$$

1　主要结果

定理　设$\alpha\geqslant\frac{1}{2}$,对两两PA列$\{X_i:i\geqslant 1\}$,假设$\sum_{i=1}^{\infty}v^{\frac{1}{2}}(2^i)<\infty$,$\sup_{i\geqslant 1}EX_i^2<\infty$且当$\alpha\leqslant 1$时,$EX_i=0$.则$\forall\varepsilon>0$,有

$$\frac{S_n}{n^{\alpha}}\xrightarrow{a.s.}0,(n\to\infty).$$

证明:　若$\alpha=\frac{1}{2}$,对$\forall\varepsilon>0$,$\sup_{i\geqslant 1}EX_i=:M<\infty$,由Chebyshev不等式,知

$$P(|S_{2^n}|\geqslant 2^{\frac{n}{2}}\varepsilon)\leqslant\frac{ES_{2^n}^2}{2^n\varepsilon^2}.$$

又$\sum_{i=1}^{\infty}v^{\frac{1}{2}}(2^i)<\infty$,则由引理1,对子列$\{2^n\}$求和即得

① 收稿日期:2008－01－23
作者简介:张继红(1978－),女,安徽阜阳,兰州城市学院讲师,在读硕士研究生,主要研究方向为随机分析.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_{2^n}| \geqslant 2^{\frac{n}{2}}\varepsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ES_{2^n}^2}{2^n\varepsilon^2} \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} ES_{2^n}^2 \leqslant \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理，知

$$P(|S_{2^n}| \geqslant 2^{\frac{n}{2}}\varepsilon, i.o.) = 0,$$

故 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\left\{\left|\frac{S_{2^n}}{2^{\frac{n}{2}}}\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) = 0,$$

则有

$$\frac{S_{2^n}}{2^{\frac{n}{2}}} \xrightarrow{a.s.} 0. \qquad (1)$$

又 $\forall k \in N, \exists n \in N$，使得 $2^{\frac{n}{2}} \leqslant k^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{\frac{n+1}{2}}$ 时，

$$|S_k| \leqslant |S_{2^n}| + |S_k - S_{2^n}| \leqslant |S_{2^n}| + D_n,$$

其中 $D_n =: \max\limits_{2^{\frac{n}{2}} \leqslant k^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{\frac{n+1}{2}}} |S_k - S_{2^n}|$.

从而有

$$\frac{|S_k|}{k^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{|S_{2^n}| + D_n}{2^{\frac{n}{2}}} \qquad (2)$$

若能证明 $\frac{D_n}{2^{\frac{n}{2}}} \xrightarrow{a.s.} 0$，由(1)，(2) 就有结论成立.

由 Chebyshev 不等式，引理1和引理2，知

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(2^{-\frac{n}{2}} \max_{2^{\frac{n}{2}} \leqslant k^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{\frac{n+1}{2}}} |S_k - S_{2^n}| > \varepsilon\right)$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{-\alpha} 2^n < \infty.$$

所以 $\frac{D_n}{2^{\frac{n}{2}}} \xrightarrow{a.s.} 0$，这样证明了结论.

若 $\alpha > \frac{1}{2}$，同理由 Chebyshev 不等式，知

$$P(|S_{2^n}| \geqslant 2^{n\alpha}\varepsilon) \leqslant \frac{ES_{2^n}^2}{2^{2\alpha n}\varepsilon^2},$$

从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_{2^n}| \geqslant 2^{n\alpha}\varepsilon) < \infty,$$

故有

$$\frac{S_{2^n}}{2^{n\alpha}} \xrightarrow{a.s.} 0. \qquad (3)$$

又 $\forall k \in N, \exists n \in N$，使得 $2^{n\alpha} \leqslant k^{\alpha} \leqslant 2^{(n+1)\alpha}$ 时，

$$|S_k| \leqslant |S_{2^n}| + |S_k - S_{2^n}| \leqslant |S_{2^n}| + D_n.$$

其中 $D_n =: \max\limits_{2^{n\alpha} \leqslant k^{\alpha} \leqslant 2^{(n+1)\alpha}} |S_k - S_{2^n}|$.

从而有

$$\frac{|S_k|}{k^{\alpha}} \leqslant \frac{|S_{2^n}| + D_n}{2^{n\alpha}}. \qquad (4)$$

同理可证 $\frac{D_n}{2^{n\alpha}} \xrightarrow{a.s.} 0$，由(3)，(4) 结论得证.

参考文献：

[1] 杨善朝. PA 序列部分和的完全收敛性[J]. 应用概率统计，2001，17(2)：197-202.

[2] 陆凤彬. 两两 PQD 序列的完全收敛性和强大数定律[J]. 应用数学，2003，16(4)：29-33.

[3] Lehmann E L. Some Concepts of Dependence[J]. Ann. Math. statist，1966，43：1137-1153.

[4] Stout W F. Almost Sure Convergence[M]. New York：Academic press，1974.

[5] 吴群英. 两两 NQD 列的收敛性质[J]. 数学学报，2002，45(3)：617-624.

Strong Convergence for Sums of Positively Associated Sequences

ZHANG Ji-hong

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract： In this paper, we discusss the strong convergence for sums of positively associated sequences, which extends the results of independent random variables.

Key words： PA sequences；sums；complete convergence；strong convergence