第40卷 第9期　　电 子 与 信 息 学 报　　Vol. 40No. 9
2018年9月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Sept. 2018

(k,l)-递归极大平面图的结构

陈祥恩*　　李　婷

(西北师范大学数学与统计学院　兰州　730070)

摘　要：对于一个平面图G实施扩3-轮运算是指在G的某个三角形面xyz内添加一个新顶点v，使v与x, y, z均相邻，最后得到一个阶为$|V(G)|+1$的平面图的过程。一个递归极大平面图是指从平面图K_4出发，逐次实施扩3-轮运算而得到的极大平面图。 所谓一个(k,l)-递归极大平面图是指一个递归极大平面图，它恰好有k个度为3的顶点，并且任意两个3度顶点之间的距离均为l。该文对(k,l)-递归极大平面图的存在性问题做了探讨，刻画了(3,2)-及(2,3)-递归极大平面图的结构。

关键词：平面图；极大平面图；扩3-轮；递归极大平面图

中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2018)09-2281-06

DOI: 10.11999/JEIT171021

The Structure of (k,l)-recursive Maximal Planar Graph

CHEN Xiang'en　　LI Ting

(*College of Mathematics and Statistics*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: For a maximal planar graph G, the operation of extending 3-wheel is a process from G to $G\vee v$, where v is a new vertex embedded in some triangular face xyz of G and $G\vee v$ is a graph of order $|V(G)|+1$ obtained from G by connecting v to each one of x, y, z with one edge. A recursive maximal planar graph is a maximal planar graph obtained from K_4 by extending 3-wheel continuously. A (k,l)-recursive maximal planar graph is a recursive maximal planar graph with exactly k vertices of degree 3 so that the distance between arbitrary two vertices of degree k is l. The existence of (k,l)-recursive maximal planar graph is discussed and the structures of (3,2)-as well as (2,3)-recursive maximal planar graphs are described.

Key words: Planar graph; Maximal planar graph; Extending 3-wheel; Recursive maximal planar graph

1　引言

1976年Appel与Haken等人[1−3]宣布用计算机给出了四色猜想的“证明”，但是给出四色猜想的数学证明仍是一个尚待解决的困难问题。四色猜想的研究对象可归结于极大平面图，因此，弄清楚极大平面图的结构与构造是极为重要的。许多学者对极大平面图的结构进行了研究。文献[4,5]给出了利用纯弦圈构造极大平面图方法。2005年，Brinkmann等人[6]给出了构造最小度为5的极大平面图的一种有效方法。2001 年，Gao等人[7]及2011年，Bose等人[8]对极大平面图的边翻转进行了探讨。我们知道，唯一4-可着色平面图一定是极大平面图，那么唯一3-可着色平面图的充分必要条件是什么，至今尚未解决。文献[9,10]中对唯一3-可着色平面图的临界性及三角形的相邻性做了探讨。

许进教授等人在其系列文献[11－17]中对极大平面图进行了深入的研究。许进教授在文献[13]中对(2,2)-递归极大平面图进行了刻画，同时为了给证明JT猜想做准备，得到了一个重要结果，即“对(2,2)-递归极大平面图G的长为2的路xuy实施扩4轮运算后所得到的图不是唯一4色的，其中x与y是G的两个3度顶点”。本文推广了(2,2)-递归极大平面图到(k,l)-递归极大平面图，对(k,l)-递归极大平面图的存在性及结构问题作一探讨。

本文所说的图均为无向有限简单图，平面图均指其平面嵌入。

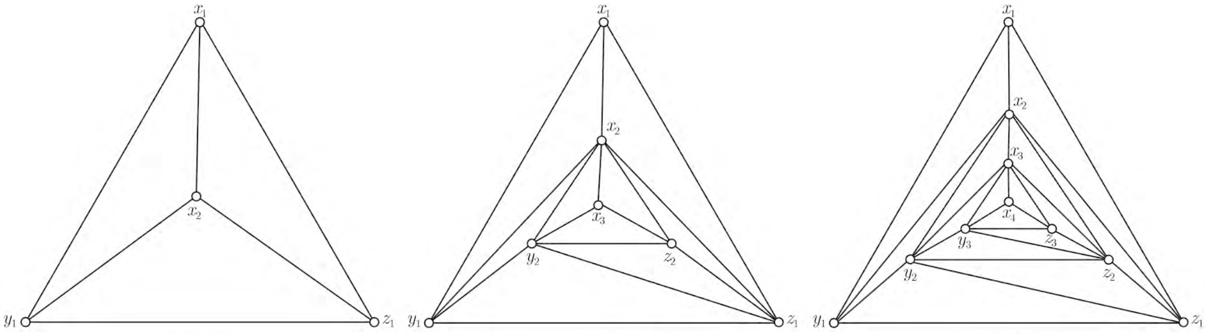
对于一个平面图G实施扩3-轮运算是指在G的某个三角形面xyz内添加一个新顶点v，使v与x, u, y均相邻，最后得到一个阶为$|V(G)|+1$的平面图的过程。这个扩3-轮运算通常记为“v-xyz”。一个递归极大平面图是指从平面图K_4出发，逐次实施扩3-轮运算而得到的极大平面图。所谓一个(k,l)-递归极

收稿日期：2017-11-01；改回日期：2018-06-04；网络出版：2018-07-12
*通信作者：陈祥恩　chenxe@nwnu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(11761064, 61163037, 61163054)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (11761064, 61163037, 61163054)

大平面图是指一个递归极大平面图，它恰好有k个度为3的顶点，并且任意两个3度顶点之间的距离均为l。本文对(k,l)-递归极大平面图的存在性问题做了探讨，刻画了(3,2)-及(2,3)-递归极大平面图的结构。

首先，以如下方式依次构造一系列递归极大平面图$G^{(i)}$，$i=1, 2, 3, \cdots$。其中$G^{(1)}$，$G^{(2)}$，$G^{(3)}$如图1(a), 图1(b)及图1(c)所示。一般地，由$G^{(i)}$构造$G^{(i+1)}$的过程如下：

在$G^{(i)}$的基础上，在面$x_{i+1}y_iz_i$里添加一个新点y_{i+1}，使y_{i+1}与x_{i+1}, y_i, z_i均连边，然后在所得到图的面$x_{i+1}y_{i+1}z_i$里添加一个新点z_{i+1}，使z_{i+1}与x_{i+1}, y_{i+1}, z_i均连边，最后在所得图的面$x_{i+1}y_{i+1}z_{i+1}$里添加一个新点x_{i+2}，使x_{i+2}与x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}均连边，最终得图$G^{(i+1)}$。



(a) $G^{(1)}$ (b) $G^{(2)}$ (c) $G^{(3)}$

图 1 阶分别为4,7,10的递归极大平面图

2 (k,l)-递归极大平面图的存在性探讨

下述两个命题是显然的。

命题1 当$l\ge 2$时，$G^{(l)}$是$(2,l)$-递归极大平面图。

命题2 $G^{(l)}$的最中心的3度顶点x_{l+1}与x_i, y_i, z_i的距离均为$l+1-i$, $i=1, 2, \cdots, l$。特别地，x_{l+1}与外部面的3个顶点x_1, y_1, z_1的距离均为l。

命题3 在$G^{(l)}$的外部面上添加一个新点x，使x与x_1, y_1, z_1均连边(如图2所示)，所得到的$(2,l+1)$-递归极大平面图的阶数最少，其阶数等于$3l+2$。

证明 由于任一面均可为外部面，固定$(2,l+1)$-递归极大平面图G的一个3度顶点为x，它的3个邻点为x_1, y_1, z_1，在此基础上逐次扩3-轮可得G。

先扩3-轮x_2-$x_1y_1z_1$，如图3(a)所示，这是阶数最少的(2,2)-递归极大平面图，其阶等于$5=3\times1+2$。为了得到(2,3)-递归极大平面图，在最后一次扩3-轮时，所在的面的边界不能出现x_1, y_1, z_1，因而还得做两次扩3-轮以便出现所需要的面$x_2y_2z_2$，然后在面$x_2y_2z_2$里扩3-轮，得(2,3)-递归极大平面图(如图3(b))，其阶数最少。将这个过程进行下去，命题得证。

定理1 存在$(k,2)$-递归极大平面图，$k\ge 2$。

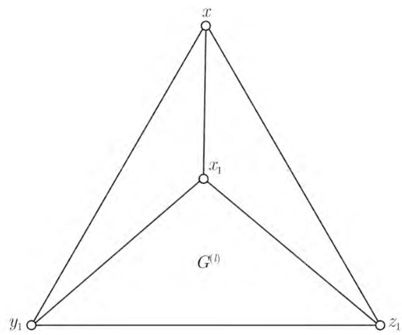
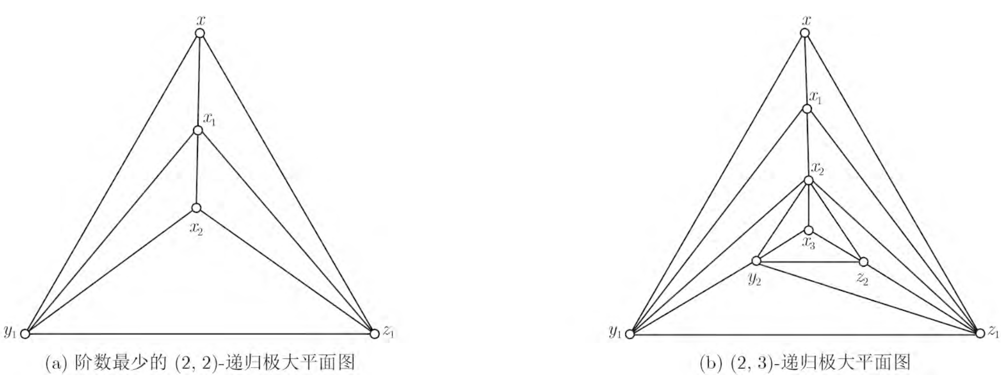


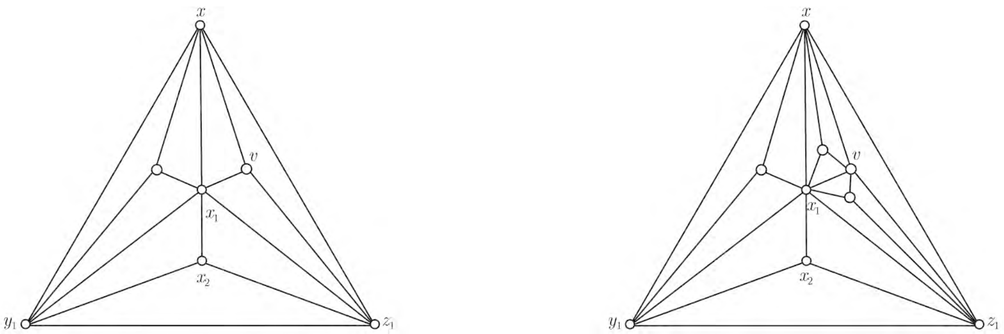
图 2 命题3所述图的结构



(a) 阶数最少的 (2, 2)-递归极大平面图 (b) (2, 3)-递归极大平面图

图 3 命题3证明过程中出现的递归极大平面图

证明　图3(a)给出了一个$(k,2)$-递归极大平面图，称x_1为其中心点，选与3度点x及x_1关联的2个三角形面进行2次扩3-轮，得图4(a)，这是一个(3,2)-递归极大平面图。在此基础上任选一个3度点v，再对与v及x_1关联的2个三角形面均扩3-轮，得图4(b)，这是一个(4,2)-递归极大平面图，这个过程进行下去，任意的$(k,2)$-递归极大平面图均可构造出来。　　证毕



(a) (3, 2)-递归极大平面图　　(b) (4, 2)-递归极大平面图

图 4 定理4证明过程中出现的递归极大平面图

定理2　存在(k,l)-递归极大平面图，这里$k\geq 2$，$l(\geq 2)$是偶数。

证明　由上述定理可知，存在$(k,2)$-递归极大平面图H，H中有k个3度顶点v_1，v_2，$\cdots$，v_k。而$v_ix_1v_j$是H的长为2的路，$1\leq i<j\leq k$，这里x_1是H的一个中心点，注意不会存在一个面使其边界上既含v_ix_1又含v_jx_1，$i\neq j$。对每个v_i，选定一个与v_i和x_1关联的面$v_ix_1u_i$，$i=1, 2, \cdots, k$。

对每个面$v_ix_1u_i$代之以$G^{(l/2)}$，即面$v_ix_1u_i$及其内部被$G^{(l/2)}$所填充。最后所得图仍含有k个3度点，且任两个3度点之间的距离恰为l。　　证毕

定理3　对奇数$l\geq 3$，存在$(3,l)$-及$(4,l)$-递归极大平面图。

证明　令$l=2s+1$，在$G^{(3)}$的基础上，面$x_1x_2z_1$被$G^{(s)}$所填充，当然$G^{(s)}$的外部面的3条边要和x_1x_2，x_2z_1，z_1x_1分别重合。同样，让$x_3x_4z_3$被$G^{(s)}$所填充，而让$x_2x_3z_2$被$G^{(s+1)}$所填充，最后所得到的图恰有3个3度顶点，并且任意两个3度顶点之间的距离均为l。这样就得到一个$(3,l)$-递归极大平面图。在上述得到了的$(3,l)$-递归极大平面图的基础上，设边界包含x_2x_3的并且包含在最后被填充进去的$G^{(s+1)}$中的一个三角形面为x_2x_3w，这时$G^{(s+1)}$中的3度顶点v与w的距离为s。再在面x_2x_3w中填充进去$G^{(s+1)}$，其的3度顶点记为v'，所得到的图含有4个3度顶点，任意两个3度顶点间的距离为$2s+1=l$。特别地，$\mathrm{d}(v,v')=2s+1$的原因是v'与w之间的距离为$s+1$，而w与v之间的距离为s，结论得证。

本文提出如下猜想。

猜想　不存在(k,l)-递归极大平面图，这里$k\geq 5$，l为奇数，$l\geq 3$。

3　(2,3)-递归极大平面图的结构

设G是(2,3)-递归极大平面图，且G的两个3度顶点分别为x和y。

若x与y之间有3条内部不交的长为3的路，则称G为A型的；

若x与y之间仅有2条内部不交的长为3的路，则称G为B型的；

若x与y之间只有1条内部不交的长为3的路，则称G为C型的。

定理4　A型的(2,3)-递归极大平面图G只有如图5所示的一个，它是8阶的，它也是阶数最少的(2,3)-递归极大平面图。

证明　不妨设在以$\{x, x_1, y_1, z_1\}$为顶点集合的完全图的基础上，逐步在面$x_1y_1z_1$的内部扩3-轮就可得到G。

在此过程中，必然要第1次出现一步，使在一个其边界上的点均不是x_1，y_1，z_1的三角形面$x_2y_2z_2$中扩3-轮。x_2，y_2，z_2中恰有一个点，不妨设为x_2，与x_1，y_1，z_1的距离均为1，x_2，y_2，z_2中恰有一个点与x_2，y_1，z_1或与x_2，x_1,y_1或与x_2，x_1，z_1的距离全为1，不妨

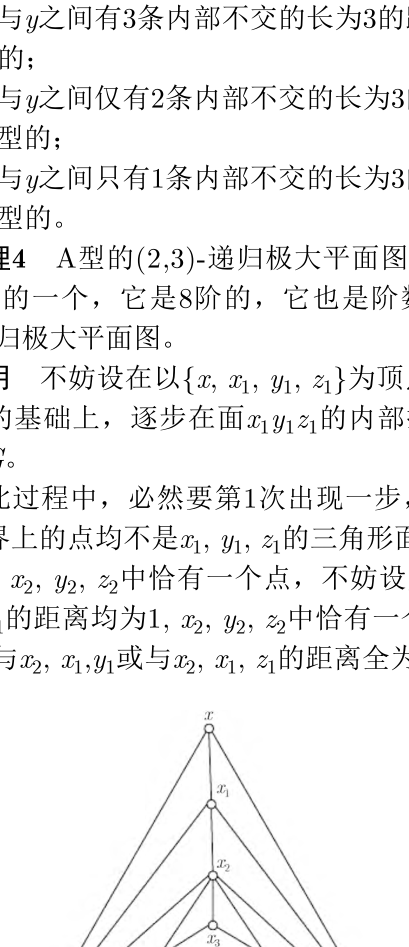


图 5 A型的(2,3)-递归极大平面图

设y_2与x_2, y_1, z_1的距离全为1。紧接着扩3-轮时必须考虑$x_2y_1y_2$或$x_2y_2z_2$(二者等价)，否则，如考虑面y_1, y_2, z_1，那么最终所得(2,3)-递归极大平面图中另一3度点y没有经过x_2的长为3到x的路。

可设在$x_2y_2z_2$中扩3-轮，增加的顶点为z_2。下一步如果在$x_2z_2z_1$或$y_2z_2z_1$中扩3-轮的话，比如在$x_2z_2z_1$中扩3-轮，增加顶点w，那么里面的3度顶点y(属于最终所得图)与x之间的长恰为3的且经过y_2的路是不存在的。这样就保证不了两个3度顶点之间存在3条内部不交路，因而在$x_2y_2z_2$中扩3-轮新增顶点为x_3，而x_3与x恰有3条内部不交的长为3的路。进一步扩3-轮是不可取的。

在构造B型极大平面图的过程中，前6个点可以设为是固定的，如图6所示。

(1) 第7个点u_1如在面$y_1y_2z_1$内，那么构造出来的图是先依次扩3-轮u_1, u_2, …, u_r，再在面$u_{r-1}u_rz_1$里依次扩3-轮，轮心依次为v_1, v_2, …, v_s，再在面$v_sv_{s-1}u_{r-1}$里依次扩3-轮，轮心依次为w_1, w_2, …, w_t，最后所得图(如图7所示)是w_t与x间恰有两条内部不交的长为3的路。

(2) 第7个点在面$x_2y_2y_1$或$x_2y_2z_1$内(二者等价)，不妨设第7个点z_2在面$x_2y_2z_1$内。

这时如第8个点在$x_2y_2z_2$内，那么以后还要至少进行一次扩3-轮，且每次扩3-轮时是基于3度点及x_2和z_2围成的面(当然可以以y_2和z_2代替这里的x_2和z_2，或以x_2和z_2代替这里的x_2和z_2)。这样就保证恰有两条内部不交的路xx_1x_2y和xz_1z_2y。

如果第8个点w在$x_2z_2z_1$内，第9个点在x_2z_2w内，那么以后扩3-轮时点是基于3度点以及x_2和w所围成的面，其结果如图8所示。

如果第8个点w在$x_2z_2z_1$内，第9个点在z_2wz_1内，这时构造不出来(2,3)-递归极大平面图。

如果第8个点w在$x_2z_2z_1$内，第9个点在x_2wz_1内，那么总有经过逐次扩3-轮(顶点u_1, u_2, …, u_r)之后，总有一步扩3-轮时基于一个边界不含z_1的面$x_2u_{r-1}u_r$，如图9所示。

至于C型的结构就相当松散了，在图6的基础上，在面$x_2y_2z_1$内陆续添点扩3-轮，但要保证扩3-轮时基于的面的边界上要包含x_2，并且有一次添点时所添的点与z_1的距离超过2，有一次所添的点与y_2的距离要超过1，这是为了使两个3度点x与y间有唯一的长为3的路xx_1x_2y。图10给出的就是一个C型的例子。 证毕

注意下述结论是显然的。

定理5 设G是(2,3)-递归极大平面图，v是G的任意一个3度顶点，则

(a) G-v是(2,3)-递归极大平面图。

(b) G -v是非相邻型的(2,2)-递归极大平面图。

4 (3,2)-递归极大平面图的结构

设G是(3,2)-递归极大平面图，x, y, z是G的3个3度顶点，如果x, y, z中任意两个点之间都有两条长

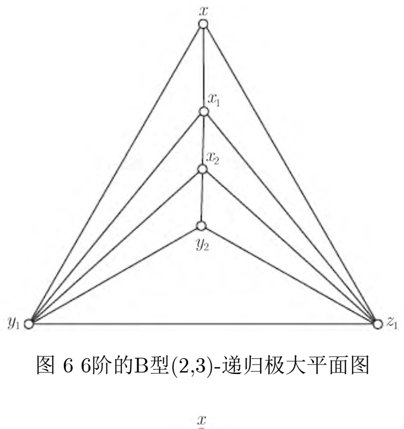


图 6 6阶的B型(2,3)-递归极大平面图

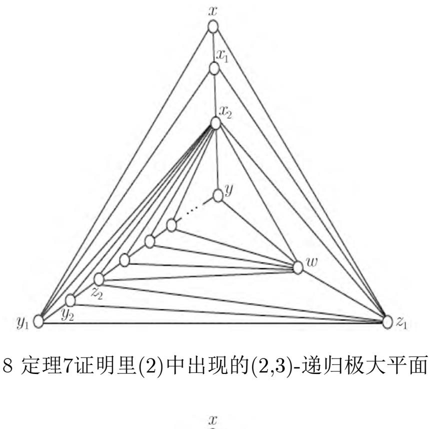


图 8 定理7证明里(2)中出现的(2,3)-递归极大平面图

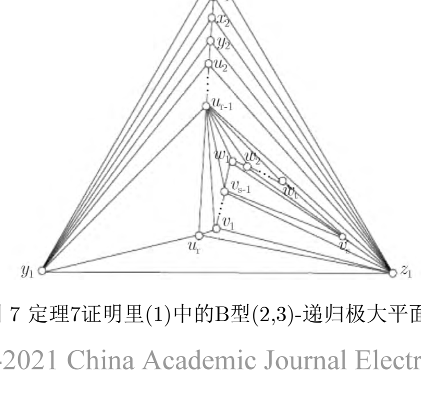


图 7 定理7证明里(1)中的B型(2,3)-递归极大平面图

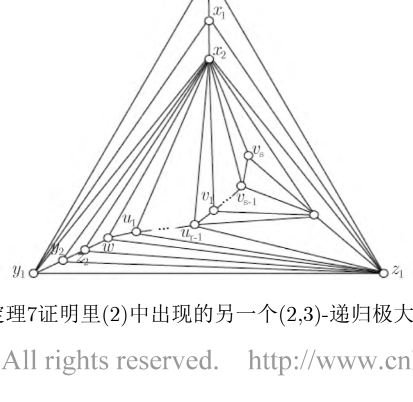


图 9 定理7证明里(2)中出现的另一个(2,3)-递归极大平面图

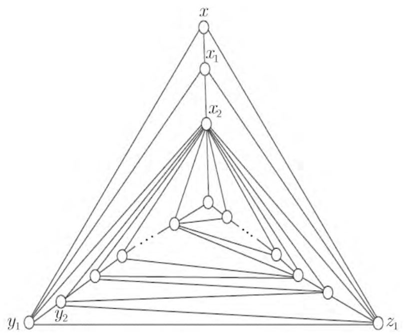


图 10 C型的(2,3)-递归极大平面图

为2的路，那么G称为A型的；

如果x, y, z中恰有两对顶点，不妨设为$\{x, y\}$, $\{x, z\}$，使得x与y之间，x与z之间都有两条长为2的路，那么G称为是B型的；

如果x, y, z中恰有一对顶点，不妨设为$\{x, y\}$，使得x与y之间有两条长为2的路，那么G称为是C型的；

如果x, y, z中任意一对顶点之间只有一条长为2的路，那么G称为是D型的。

定理6 A型的(3,2)-递归极大平面图只有一个，即图11(a)所示的7阶图。

证明 先固定前5个点，且使x永远成为3度点，如图11(b)所示。注意到3个面uv_1v_2, v_1v_2w, uv_2w的彼此等价性，为了得到(3,2)-递归极大平面图，在面uv_1v_2内添点逐步扩3-轮，保证里面最终只有1个3度点，同时在面v_1v_2w内添点逐步扩3-轮，使里面最终只有1个3度点，分别只做1次扩3-轮后所得的7阶图，如图11(b)所示。

假如在uu_1v_1里或uu_1v_2里扩3-轮的话，最终得到的图在uu_1v_1里的3度顶点与v_1v_2w里的3度顶点最多有1条长为2的路。

假如继续在uu_1v_2里3-轮的话，最终所得图在$u_1v_1v_2$里的3度顶点与x间的长为2的路最多只有1条。

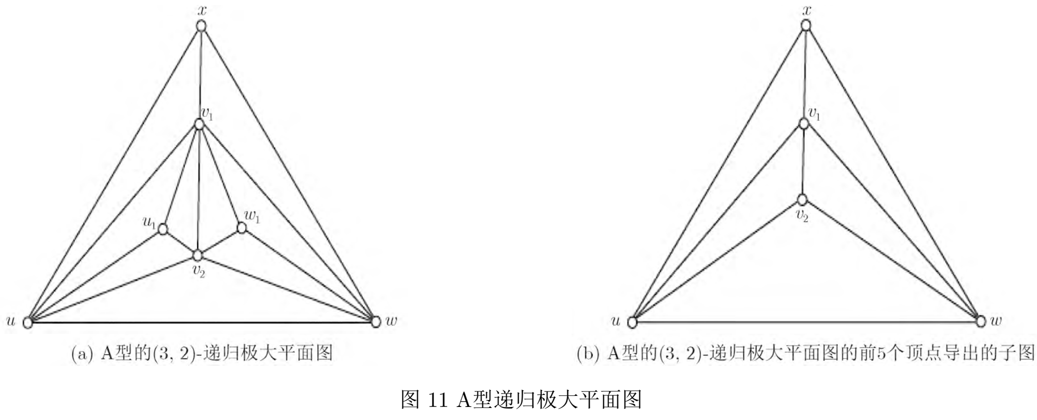
至此定理6得证。

为了得到如图12的B型的(3,2)-递归极大平面图，确保x与另外两个3度顶点的长为2的路均有两条，在图11(a)的基础上，确保x与uv_1v_2内部的3度顶点间的长为2的路有两条，那么在uu_1v_1里扩3-轮如同上段B型的方法，而在v_1v_2w里扩3-轮时，最后一次扩3-轮所基于的面的边上仅含v_1与w中的1个即可。图13所示的(3,2)-递归极大平面图就是C型的。

对于D型的(3,2)-递归极大平面图，只需在图11(a)的基础上逐次扩3-轮，使得最终所得图的面uv_1v_2内的3度顶点y, wv_1v_2内的3度顶点z，满足$|N(x)\cap N(y)|=1$，$|N(x)\cap N(z)|=1$，$|N(y)\cap N(z)|=1$即可，图14所示的(3,2)-递归极大平面图就是D型的。

注意下述结论是显然的。

定理7 若设G是(3,2)-递归极大平面图，v是



(a) A型的(3, 2)-递归极大平面图

(b) A型的(3, 2)-递归极大平面图的前5个顶点导出的子图

图 11 A型递归极大平面图

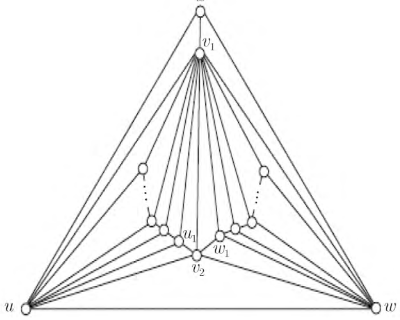


图 12 B型的(3,2)-递归极大平面图

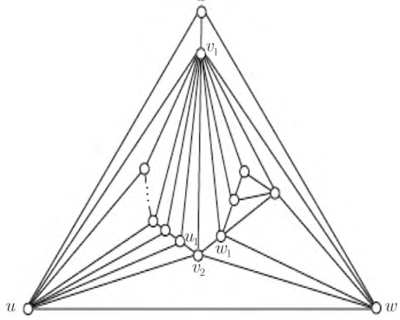


图 13 C型的(3,2)-递归极大平面图

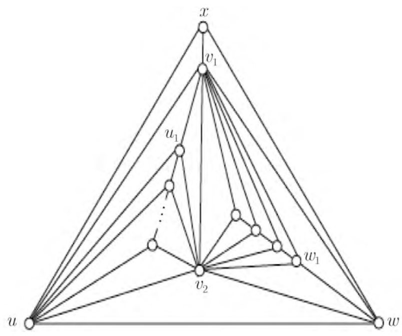


图 14 D型的(3,2)-递归极大平面图

G的任意一个3度顶点，则G-v是(3,2)-递归极大平面图或G -v是(2,2)-递归极大平面图。

5 结束语

本文将文献[13]中讨论的(2,2)-递归极大平面图进行了推广，提出了(k,l)-递归极大平面图，研究了(2,3)-递归极大平面图以及(3,2)-递归极大平面图的结构。我们将会继续对(k,l)-递归极大平面图的结构及着色问题做进一步探索。

参 考 文 献

[1] APPEL K and HAKEN W. The solution of the four-color map problem[J]. *Science American*, 1977, 237(4): 108–121. doi: 10.1038/scientificamerican1077-108.

[2] APPEL K and HAKEN W. Every planar map is four colorable, I: Discharging[J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1977, 21(3): 429–490.

[3] APPEL K, HAKEN W, and KOCH J. Every planar map is four-colorable, II: Reducibility[J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1977, 21(3): 491–567.

[4] 王邵文. 构造极大平面图的圈加点法[J]. 北京机械工业学院学报, 2000, 15(1): 26–29.
WANG Shaowen. Method of cycle add-point to construct a maximum plate graph[J]. *Journal of Beijing Institute of Machinery*, 2000, 15(1): 26–29.

[5] 王邵文. 构造极大平面图的三种方法[J]. 北京机械工业学院学报, 1999, 14(1): 16–22.
WANG Shaowen. Three methods to construct maximum plain graph[J]. *Journal of Beijing Institute of Machinery*, 1999, 14(1): 16–22.

[6] BRINKMANN G and MCKAY B D. Construction of planar triangulations with minimum degree 5[J]. *Discrete Mathematics*, 2005, 301(2-3): 147–163. doi: 10.1016/j.disc.2005.06.019.

[7] GAO Z C, URRUTIA J, and WANG J Y. Diagonal flips in labeled planar triangulations[J]. *Graphs and Combinatorics*, 2004, 17(4): 647–656. doi: 10.1007/s003730170006.

[8] BOSE P, JANSENS D, VAN RENSSEN A, *et al.* Making triangulations 4-connected using flips[C]. Proceedings of the 23rd Canadian Conference on Computational Geometry, Toronto, 2014: 187–197. doi: 10.1016/j.comgeo.2012.10.012.

[9] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, *et al.* Size of edge-critical uniquely 3-colorable planar graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2016, 339(4): 1242–1250. doi: 10.1016/j.disc.2015.11.009.

[10] LI Zepeng, ZHU Enqiang, SHAO Zehui, *et al.* A note on uniquely 3-colorable planar graphs[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2017, 94(5): 1028–1035. doi: 10.1080/00207160.2016.1167196.

[11] 许进. 极大平面图的结构与着色理论: (1)色多项式递推公式与四色猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(4): 763–779. doi: 10.11999/JEIT160072.
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs: (1) Recursion formula of chromatic polynomial and four-color conjecture[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(4): 763–779. doi: 10.11999/JEIT160072.

[12] 许进. 极大平面图的结构与着色理论: (2)多米诺构形与扩缩运算[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1271–1327. doi: 10.11999/JEIT160224.
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs: (2)Domino configurations and extending-contracting operations[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1271–1327. doi: 10.11999/JEIT160224.

[13] 许进. 极大平面图的结构与着色理论: (3) 纯树着色与唯一4色极大平面图猜想[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1328–1363. doi: 10.11999/JEIT160409.
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs: (3) Purely tree-colorable and uniquely 4-colorable maximal planar graph conjecture[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1328–1363. doi: 10.11999/JEIT160409.

[14] 许进. 极大平面图的结构与着色理论: (4)σ-运算与Kempe等价类[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.
XU Jin. Theory on the structure and coloring of maximal planar graphs: (4) σ-operations and Kempe equivalent classes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.

[15] XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. On purely tree-colorable planar graphs[J]. *Information Processing Letter*, 2016, 116(8): 532–536. doi: 10.1016/j.ipl.2016.03.011.

[16] 许进, 李泽鹏, 朱恩强. 极大平面图理论研究进展[J]. 计算机学报, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01680.
XU Jin, LI Zepeng, and ZHU Enqiang. Research progress on maximal planar graphs[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2015, 38(8): 1680–1704. doi: 10.11897/SP.J.1016.2015.01680.

[17] ZHU Enqiang, LI Zepeng, SHAO Zehui, *et al.* Acyclically 4-colorable triangulations[J]. *Information Processing Letter*, 2016, 116(6): 401–408. doi: 10.1016/j.ipl.2015.12.005.

陈祥恩：男，1965年生，教授，主要研究方向为图论及其应用.
李 婷：女，1993年生，硕士生，研究方向为图论及其应用.