DOI :10.13885/j.issn.0455-2059.2008.02.012

文章编号: 0455-2059(2008)02-0107-04

具有 Holling Ⅲ 类功能反应的捕食者—食饵扩散模型的稳定性

郭　凌, 伏升茂
(西北师范大学 数学与信息科学学院, 甘肃 兰州 730070)

摘　要: 讨论了一类捕食者无密度制约, 食饵具有非线性密度制约的Holling Ⅲ类功能反应的捕食者—食饵扩散模型解的整体性态. 应用线性化方法和Lyapunov泛函方法证明了该模型正平衡点的局部渐近稳定性和全局渐近稳定性.

关键词: 非线性密度制约; Holling Ⅲ 类功能反应; 捕食者—食饵模型; 稳定性
中图分类号: O175.26　　**文献标识码:** A

Stability of a diffusive predator-prey model with Holling Ⅲ type functional response

GUO Ling, FU Sheng-mao
(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The global behavior of solutions for a predator-prey diffusive model with Holling Ⅲ type functional response was considered, where the density of the prey was nonlinearly restricted and the density of the predator was restricted. The local asymptotic stability and the global asymptotic stability of the positive equilibrium point were given by linearization and Lyapunov function respectively.

Key words: nonlinear density restrict; Holling Ⅲ type functional response; predator-prey model; stability
AMS Subject Classifications(2000): 92D25; 35K57; 35B35

讨论食饵具有非线性密度制约的带Holling Ⅲ类功能反应项的如下捕食者—食饵扩散模型[1-2]:

$$\begin{cases} X_t - d\triangle X = X(A - BX - CX^2) - Y\dfrac{DX^2}{1+EX^2}, & x\in\Omega, t>0, \\ Y_t - d\triangle Y = -FY + GY\dfrac{DX^2}{1+EX^2}, & x\in\Omega, t>0, \\ \partial_\eta X = \partial_\eta Y = 0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ X(x,0) = X_0(x)\geqslant 0, Y(x,0) = Y_0(x)\geqslant 0, & x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

解的存在唯一性、一致有界性和正平衡点的稳定性. 其中: Ω是$\mathbb{R}^n$中具有光滑边界的有界区域; η是$\partial\Omega$上的单位外法向量; $X(x,t)$, $Y(x,t)$分别是食饵种群和捕食者种群的密度函数; $\frac{DX^2}{1+EX^2}$是Holling Ⅲ类功能反应函数; 扩散系数d及生命系数A, B, C, D, E, F, G都是正常数; $X(x,0)$, $Y(x,0)$是非负且不恒为0的光滑函数.

对于食饵是线性密度制约(即$C=0$)的模型(1), 无论是$d=0$的常微分方程组, 还是$d>0$的反应扩散方程组, 无论是自治系统还是时间周期系统, Tineo等已对其解的动力学性态进行了深入研究[2-7]. 对于食饵具有非线性密度制约的捕食

收稿日期: 2007-01-31.　　**修改稿收到日期:** 2008-02-20.
基金项目: 国家自然科学基金(10471157), 甘肃省自然科学基金(3ZS061-A25-015), 甘肃省教育厅科研项目(0601-21)和西北师范大学创新工程项目(NWNU-KJCXGC-03-39)资助.
作者简介: 郭凌(1982-), 女, 陕西黄陵人, 硕士研究生, 研究方向为偏微分方程和生态数学, e-mail: gling0826@126.com.
伏升茂(1966-), 男, 甘肃秦安人, 教授, 博士, 硕士研究生导师, 研究方向为偏微分方程和生态数学, 通讯联系人, e-mail: fusm@nwnu.edu.cn.

者—食饵模型的解的整体性态而言, 近十年来才受到人们的关注. 此外, 对相应于(1)式的常微分方程组, 当反应函数的系数都是正数且存在唯一不稳定的正平衡点时, 则(1)式存在唯一的极限环. 若正平衡点存在唯一且局部稳定, 则该正平衡点全局渐近稳定[1, 8].

本文主要应用线性化方法和Lyapunov泛函方法讨论反应扩散问题(1)的正平衡点的稳定性. 注意到(1)式的常微分方程组形式的解是问题(1)的特解. 因此, 当常微分方程组形式的(1)式存在唯一的不稳定的正平衡点时, 问题(1)仍以该正平衡点为不稳定平衡点. 故本文的主要问题是: 什么条件下问题(1)的正平衡点全局渐近稳定. 为此先做如下变换

$$a=A, b=\frac{B}{\sqrt{E}}, c=\frac{C}{E}, u_1=\sqrt{E}X,$$
$$u_2=\frac{D}{\sqrt{E}}Y, k=F, \alpha=\frac{DG}{E},$$

则系统(1)可简化为

$$\begin{cases} u_{1t}-d\triangle u_1=u_1(a-bu_1-cu_1^2)-\dfrac{u_1^2u_2}{1+u_1^2}, & x\in\Omega, t>0,\\ u_{2t}-d\triangle u_2=-ku_2+\dfrac{\alpha u_1^2u_2}{1+u_1^2}, & x\in\Omega, t>0,\\ \partial_\eta u_1=\partial_\eta u_2=0, & x\in\partial\Omega, t>0,\\ u_i(x,0)=u_{i0}(x)\geqslant 0, & i=1,2, x\in\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

1 一致有界性

本节讨论问题(2)古典解的整体存在性及其一致有界性. 记

$$f_1=u_1(a-bu_1-cu_1^2)-\frac{u_1^2u_2}{1+u_1^2},$$
$$f_2=-ku_2+\frac{\alpha u_1^2u_2}{1+u_1^2}.$$

定理 1 设 $(u_1(x,t),u_2(x,t))\in[C(\overline{\Omega}\times[0,T))\cap C^{2,1}(\Omega\times(0,T))]^2$ 是问题(2)的解, 且 $u_i(x,0)=u_{i0}\geqslant(\not\equiv)0, i=1,2$, 其中$T$是(2)式的解$u$的最大存在时间, 则对任意$t\in(0,T)$有 $0<u_i\leqslant M_i(i=1,2)$, 其中

$$M_1=\max\{\sup_{\Omega}u_{10}, \frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2c}\},$$
$$M_2=\max\{\sup_{\Omega}(\alpha u_{10}+u_{20}), \frac{\alpha M_1(k+a)}{k}\}.$$

进一步有$T=\infty$.

证明 由于f_1, f_2在$\mathbb{R}^2$上光滑, 由熟知的偏微分方程基本理论知, 问题(2)古典的局部解存在唯一. 故为说明(2)式的解整体存在, 只要证明(2)式的解一致有界.

先证明(2)式的解$u(x,t)\in[C(\overline{\Omega}\times[0,T))\cap C^{2,1}(\Omega\times(0,T))]^2$的非负性, 其中$T$是最大存在时间. 设$T_0$是小于$T$的任意正时刻, 则先对(2)式的第2个方程, 再对(2)式的第1个方程应用比较原理[9]知, $u_1(x,t)\geqslant 0$, $u_2(x,t)\geqslant 0(\forall t\in[0,T_0])$. 特别地, 由强极大值原理知, 当$u_{10}\geqslant(\not\equiv)0$, $u_{20}\geqslant(\not\equiv)0$时, 对任意$t>0$有$u_1(x,t)>0$, $u_2(x,t)>0$. 这就证明了u的非负性.

下面证明u的一致有界性, 为此先令

$$M_1=\max\{\sup_{\Omega}u_{10}, \frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2c}\},$$

则M_1是问题(2)的第1个方程的上解. 从而

$$u_1\leqslant M_1=\max\{\sup_{\Omega}u_{10}, \frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2c}\}.$$

再令

$$z=\alpha u_1+u_2,$$
$$M_2=\max\{\sup_{\Omega}(\alpha u_{10}+u_{20}), \frac{\alpha M_1(k+a)}{k}\},$$

则

$$\begin{aligned}&(z-M_2)_t-d\triangle(z-M_2)\\ &=\alpha u_1(k+a-bu_1-cu_1^2)-kz\\ &\leqslant\alpha u_1(k+a)-kz\\ &=k(\frac{\alpha u_1(k+a)}{k}-z)\\ &\leqslant k(M_2-z).\end{aligned}$$

由比较原理知$u_2(x,t)\leqslant z\leqslant M_2$. 证毕.

2 局部稳定性

经简单计算知, (2)式至少有平凡平衡点(0, 0)和半平凡平衡点$(u_1^{**},0)$; (2)式至多有一个正平衡点$u^*(u_1^*,u_2^*)$, 它存在的充要条件是

$$\alpha>k, b\sqrt{k(\alpha-k)}+ck-a(\alpha-k)<0, \tag{3}$$

其中

$$u_1^{**}=\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2c}, u_1^*=\sqrt{\frac{k}{\alpha-k}},$$
$$u_2^*=\frac{\alpha}{k}u_1^*(a-bu_1^*-cu_1^{*2}).$$

对相应于问题(2)的常微分方程组, 通过分析平衡点(0, 0)和$(u_1^{**},0)$的变分矩阵可得到结论[10]: (0, 0)是有y方向上稳定流形, x方向上局部不稳定流形的鞍点; 当$u_1^{**2}>\frac{k}{\alpha-k}$时, $(u_1^{**},0)$是有x方向上稳定流形, y方向上局部不稳定流形的鞍点. 从而(0, 0)是问题(2)不稳定的平衡点. 当$(\alpha-k)u_1^{**2}>k$时, $(u_1^{**},0)$也是问题(2)不稳定的平衡点.

下面讨论正平衡点 (u_1^*, u_2^*) 的局部稳定性. 设 $0=\mu_1<\mu_2<\mu_3<\cdots$ 是齐次 Neumann 边界条件下算子 $-\triangle$ 在 Ω 上的特征值, $E(\mu_i)$ 是与特征值 μ_i 相应的 $C^1(\overline{\Omega})$ 中的特征子空间. 记

$$X=\{u\in[C^1(\overline{\Omega})]^2, \partial_\eta u=0, x\in\partial\Omega\},$$
$$X_{ij}=\{c\cdot\phi_{ij}: c\in\mathbb{R}^2\},$$

其中 $\{\phi_{ij}; j=1,\cdots,\dim E(\mu_i)\}$ 是 $E(\mu_i)$ 的一组正交基, 则

$$X=\oplus_{i=1}^{\infty}X_i, \quad X_i=\oplus_{j=1}^{\dim[E(\mu_i)]}X_{ij}.$$

记 $D=\mathrm{diag}(d, d)$, $L=D\Delta+F_u(u^*)=D\Delta+\{a_{ij}\}$, 其中

$$a_{11}=(a-2bu_1^*-3cu_1^{*2})-\frac{2u_1^*u_2^*}{(1+u_1^{*2})^2},$$
$$a_{12}=-\frac{u_1^{*2}}{1+u_1^{*2}}, a_{21}=\frac{2\alpha u_1^*u_2^*}{(1+u_1^{*2})^2}, a_{22}=0.$$

系统 (2) 在 u^* 处的线性化方程为 $u_t=Lu$. 对于任意 $i\geqslant1$, X_i 是算子 L 的不变子空间. λ 是算子 L 在 X_i 上的特征值当且仅当 λ 是矩阵 $-\mu_iD+F_u(u^*)$ 的特征值. 而 $-\mu_iD+F_u(u^*)$ 的特征多项式为 $\varphi_i(\lambda)=\lambda^2+A_i\lambda+B_i=0$, 其中 $A_i=2\mu_id-a_{11}$, $B_i=d^2\mu_i^2-\mu_ida_{11}-a_{12}a_{21}$. 它的每个特征值 (记作 $\lambda_{i,1}$, $\lambda_{i,2}$) 的实部为负的充要条件是 $A_i>0$, $B_i>0$. 注意到 $a_{12}a_{21}<0$, 所以必须有 $a_{11}<0$. 从而 $\lambda_{i,1}$, $\lambda_{i,2}$ 的实部为负的充要条件是

$$a(\alpha-k)^2+(\alpha-k)(c-a)k+3ck^2+2bk\sqrt{k(\alpha-k)}>0. \qquad (4)$$

下证存在正常数 δ, 使得对任意的 $i\geqslant1$ 都有

$$\mathrm{Re}\{\lambda_{i,1}\}, \mathrm{Re}\{\lambda_{i,2}\}\leqslant-\delta. \qquad (5)$$

令 $\lambda=\mu_i\xi$, 则

$$\varphi_i(\lambda)=\mu_i^2\xi^2+A_i\mu_i\xi+B_i\equiv\widetilde{\varphi}_i(\xi).$$

因为当 $i\to\infty$ 时, $\mu_i\to\infty$, 所以

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\widetilde{\varphi}_i(\xi)}{\mu_i^2}=\xi^2+2d\xi+d^2\equiv\widetilde{\varphi}(\xi).$$

易见 $\widetilde{\varphi}(\xi)=0$ 有 2 重根 $-d$. 由函数的连续性知, 存在 i_0, 使得当 $i\geqslant i_0$ 时, $\widetilde{\varphi}_i(\xi)=0$ 的两个根 $\xi_{i,1}$, $\xi_{i,2}$ 满足 $\mathrm{Re}\{\xi_{i,1}\}$, $\mathrm{Re}\{\xi_{i,2}\}\leqslant-d/2$. 于是, 当 $i\geqslant i_0$ 时,

$$\mathrm{Re}\{\lambda_{i,1}\}, \mathrm{Re}\{\lambda_{i,2}\}\leqslant-\frac{\mu_id}{2}\leqslant-\frac{d}{2}.$$

令 $-\widetilde{\delta}=\max\{\mathrm{Re}\{\lambda_{i,1}\}, \mathrm{Re}\{\lambda_{i,2}\}\}$, 则 $\widetilde{\delta}>0$. 取 $\delta=\min\{\widetilde{\delta}, d/2\}$, 则 (5) 式成立. 从而由文献 [11] 中的定理 5.1.1 可得如下结论:

定理 2 若 (3), (4) 式成立, 则问题 (2) 的正平衡点 (u_1^*, u_2^*) 局部渐近稳定.

3 全局稳定性

本节讨论问题 (2) 的正平衡点 (u_1^*, u_2^*) 的全局稳定性.

引理 1[12] 设 a, b 为正常数, $\phi, \psi\in C^1([a,\infty))$, $\psi(t)\geqslant0$, ϕ 有下界. 如果 $\phi'(t)\leqslant-b\psi(t)$, 且 $\psi'(t)\leqslant K(\forall t\geqslant a)$, K 为正常数, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=0$.

设 u 是问题 (2) 的唯一正解, 由定理 1 知, 存在与 $x\in\overline{\Omega}$, $t\geqslant0$ 无关的正常数 C, 使得对任意 $t\geqslant0$ 有

$$\|u_i(\cdot,t)\|_\infty\leqslant C, \quad i=1,2.$$

由定理 A_2[13] 知, 对任意 $t_0>0$ 有

$$\|u_i(\cdot,t)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})}\leqslant C, \quad \forall t\geqslant t_0, i=1,2, \qquad (6)$$

C 是与 t 无关的正常数. 令

$$V(u_1,u_2)=\int_{u_1^*}^{u_1}\frac{f_2(\xi,u_2)}{u_2}\frac{(1+\xi^2)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi+(u_2-u_2^*-u_2^*\ln\frac{u_2}{u_2^*}).$$

定义 Lyapunov 函数如下:

$$E(t)=\int_\Omega V(u_1,u_2)\,\mathrm{d}x.$$

由定理 1 知, 在初值取不恒为 0 的非负函数且 $t>0$ 时, 问题 (2) 的解是严格正函数, 故 $E(t)$ 对 (1) 式的任意正解有意义. 对任意 $t>0$ 有 $E(t)\geqslant0$, 且 $E(t)=0$ 当且仅当 $u=u^*$. 由分部积分及简单计算知

$$\begin{aligned}E'(t)&=\int_\Omega\{\frac{f_2(u_1,u_2)}{u_2}\frac{(1+u_1^2)}{u_1^2}u_{1t}+\frac{(u_2-u_2^*)}{u_2}u_{2t}\}\mathrm{d}x\\&=-d\int_\Omega(\frac{2k}{u_1^3}|\nabla u_1|^2+\frac{u_2^*}{u_2^2}|\nabla u_2|^2)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_\Omega\{\frac{f_2(u_1,u_2)}{u_2}\frac{(1+u_1^2)}{u_1}\frac{f_1(u_1,u_2)}{u_1}\\&\quad+(u_2-u_2^*)\frac{f_2(u_1,u_2)}{u_2}\}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_\Omega\{\frac{(1+u_1^2)}{u_1}[\frac{f_2(u_1,u_2)}{u_2}-\frac{f_2(u_1^*,u_2^*)}{u_2^*}]\\&\quad\cdot[\frac{f_1(u_1,u_2)}{u_1}-\frac{f_1(u_1^*,u_2^*)}{u_1^*}]\\&\quad+(u_2-u_2^*)[\frac{f_2(u_1,u_2)}{u_2}-\frac{f_2(u_1^*,u_2^*)}{u_2^*}]\}\mathrm{d}x\\&=-\alpha\int_\Omega(u_1-u_1^*)^2\frac{(u_1+u_1^*)}{u_1(1+u_1^{*2})}[b+c(u_1+u_1^*)\\&\quad+\frac{(a-bu_1^*-cu_1^{*2})(1-u_1u_1^*)}{u_1^*(1+u_1^2)}]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到 $a-bu_1^*-cu_1^{*2}>0$ 和 $\frac{1-mx}{1+x^2}(m>0)$ 在 $[0,\infty)$ 上的最小值是 $\frac{-m^2}{2+2\sqrt{1+m^2}}$. 故

$$(\alpha-k)(b\sqrt{k}+a\sqrt{\alpha-k}-a\sqrt{\alpha})+\sqrt{k(\alpha-k)}+\sqrt{k(\alpha-k)}(c\sqrt{k}+b\sqrt{\alpha})+ck\sqrt{\alpha}>0 \qquad (7)$$

与

$$l_1=b+cu_1^*-\frac{u_1^*(a-bu_1^*-cu_1^{*2})}{2+2\sqrt{1+u_1^{*2}}}>0$$

等价. 从而$E'(t) \leqslant \frac{-\alpha l}{1+u_1^{*2}} \int_\Omega (u_1-u_1^*)^2\,\mathrm{d}x$.

由定理1和(6)式知, $\int_\Omega (u_1-u_1^*)^2\mathrm{d}x$的导数上有界. 由引理1得

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega (u_1-u_1^*)^2\,\mathrm{d}x=0. \tag{8}$$

由前面关于$E'(t)$的计算知

$$\begin{aligned}E'(t) &\leqslant -d\int_\Omega \Big(\frac{2k}{u_1^3}|\nabla u_1|^2+\frac{u_2^*}{u_2^2}|\nabla u_2|^2\Big)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant -C\int_\Omega (|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2)\,\mathrm{d}x\equiv -g(t).\end{aligned}$$

由引理1和(6)式知, 当$t\to\infty$, $g(t)\to 0$, 即

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2)\,\mathrm{d}x=0.$$

由Poincaré不等式得

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega (u_1-\bar u_1)^2\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\int_\Omega (u_2-\bar u_2)^2\,\mathrm{d}x=0, \tag{9}$$

其中$\bar u_i(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_i\,\mathrm{d}x$, $i=1,2$. 进一步有

$$\begin{aligned}|\Omega||\bar u_i(t)-u_i^*|^2 &= \int_\Omega (\bar u_i-u_i^*)^2\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2\int_\Omega (\bar u_i-u_i)^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad +2\int_\Omega (u_i-u_i^*)^2\,\mathrm{d}x,\quad i=1,2.\end{aligned}$$

由(8)式和(9)式得

$$\bar u_1(t)\to u_1^*(t\to\infty). \tag{10}$$

从而存在$\{t_m\}$, 当$t_m\to\infty$时$\bar u_1'(t_m)\to 0$. 由$\{\bar u_2(t_m)\}$有界知, 存在$\{t_m\}$的收敛子列(仍记为$\{t_m\}$)和非负常数$\hat u_2$, 使得$\bar u_2(t_m)\to\hat u_2$. 下证$\hat u_2=u_2^*$.

一方面

$$\int_\Omega u_{1t}\,\mathrm{d}x|_{t_m}=|\Omega|\bar u_1'(t_m)\to 0,\quad t_m\to\infty;$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{1t}\mathrm{d}x|_{t_m}\\ &=\int_\Omega\{(u_1-u_1^*)[a-b(u_1+u_1^*)-c(u_1^2+u_1u_1^*+u_1^{*2})\\ &\quad -\frac{u_2(u_1+u_1^*)}{(1+u_1^2)(1+u_1^{*2})}]d-(u_2-u_2^*)\frac{u_1^{*2}}{(1+u_1^{*2})}\}\,\mathrm{d}x|_{t_m}.\end{aligned}$$

上式两边取$t_m\to\infty$时的极限, 并结合(7)式及极限的唯一性得

$$\hat u_2=u_2^*,\quad \lim_{t_m\to\infty}\bar u_2(t_m)=u_2^*. \tag{11}$$

由(6)式知, 存在$\{t_m\}$的子列(仍记为$\{t_m\}$)和非负函数$w_i\in C^2(\overline{\Omega})$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}\|u_i(\cdot,t_m)-w_i(\cdot)\|_{C^2(\overline{\Omega})}=0,\quad i=1,2.$$

由(8)~(10)式得, $w_i\equiv u_i^*$, $i=1,2$. 因此

$$\lim_{m\to\infty}\|u_i(\cdot,t_m)-u_i(\cdot)\|_{C^2(\overline{\Omega})}=0,\quad i=1,2.$$

联系定理2即得

定理3 若(3), (4)式和(7)式成立, 则问题(2)的正平衡点(u_1^*, u_2^*)全局渐近稳定.

例 考虑如下系统:

$$\begin{cases}X_t-d\triangle X=X(5-2X-X^2)-Y\dfrac{2X^2}{1+X^2}, & x\in\Omega,\ t>0,\\ Y_t-d\triangle Y=-Y+Y\dfrac{2X^2}{1+X^2}, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \partial_\eta X=\partial_\eta Y=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ X(x,0)=X_0(x)\geqslant 0,\ Y(x,0)=Y_0(x)\geqslant 0, & x\in\Omega.\end{cases}$$

易于验证, 该系统满足定理3的所有条件, 故由定理3知, 该系统的正平衡点(1, 2)全局渐近稳定.

参考文献

[1] KOOIJ R E, ZEGELING A. Qualitative properties of two-dimensional predator-prey system[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1997, 29(6): 693-715.

[2] MURRY J. Mathmatical biology Ⅰ: an introduction: Interdisciplinary Applied Mathmatics Vol 17[M]. New York: Springer, 2002.

[3] HESS P. Periodic-parabolic boundary value problem and positivity: Pitman Res Notes Math Ser 247[M]. New York: Longman Scientific and Technical, 1991.

[4] TINEO A. Permanence of a large class of periodic predator-prey system[J]. J Math Anal Appl, 2000, 241(1): 83-91.

[5] 伏升茂, 温紫娟, 宋雪梅. 互惠Shigesada-Kawasaki-Teramoto模型整体解的存在性和稳定性[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2006, 42(4): 121-126.

[6] CHEN J, ZHANG H. The qualitative analysis of two species predator-prey model with Holling's type Ⅲ function response[J]. Appl Math Mech, 1986, 7(1): 77-86.

[7] 张发秦, 樊永红. 具功能性反应的食饵—捕食者两种群模型的定性分析[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2000, 36(1): 12-16.

[8] 陈柳娟, 孙建华. 一类Holling功能性反应模型极限环的唯一性[J]. 数学学报, 2002, 45(2): 383-388.

[9] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[10] FREEDMAN H I. Deterministic mathematical models in population ecology[M]. Edmonton: HIFR Consulting Ltd, 1987.

[11] HENRY D. Geometric theory of semilinear parabolic equations[M]. Berlin: Springger-Verlag, 1993.

[12] 王明新. 非线性抛物型方程[M]. 北京: 科学出版社, 1993.

[13] BROWN K J, DUME P C, GARDNER R A. A similinear parabolic system arising in the theory of superconductivity[J]. J Differential Equations, 1981, 40: 232-252.