文章编号:1008-1402(2008)02-0274-02

一些图的剖分图的邻点可区别全色数①

毛新叶, 刘信生
(西北师范大学数学与信息科学学院,甘肃 兰州 730070)

摘 要: 对扇,轮,完全二部图作了简单的剖分,得到了它们的剖分图,并得到了其剖分图的邻点可区别全色数.

关键词: 剖分图;全染色;邻点可区别全染色;邻点可区别全色数

中图分类号: O157.5 **文献标示码:** A

0 引 言

具有重要的意义图的染色问题,是图论研究的主要内容之一,图的染色的基本问题就是确定其各种染色法的色数.2004年,张忠辅[1]等人提出了图的邻点可区别全染色的概念,得到了圈,完全图,扇,轮,完全二部图,树等特殊图的邻点可区别全色数,并给出了相应的猜想.有关剖分图的相关结果参见文献[2].本文对扇,轮,完全二部图作了简单的剖分,得到了它们的剖分图的邻点可区别全色数.本文不作说明的符号参见文献[3].

定义 设 $G(V,E)$ 是阶数至少为2-简单连通图,k 是正整数,f 是 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 的映射,对任意 $u\in V(G)$,记 $C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uw)\mid uw\in E(G),v\in V(G)\}$,如果

1) $\forall uw,vw\in E(G),u\neq w$,有 $f(uw)\neq f(vw)$,

2) $\forall uw\in E(G)$,有 $f(u)\neq f(v)$,$f(u)\neq f(uw)$,$f(v)\neq f(uw)$,

则称 f 为 G 的 k-正常全染色,进一步,如果还满足

3) $\forall uw\in E(G)$,有 $C(u)\neq C(v)$,

那么称 f 为 G 的 k-邻点可区别全染色(简记为 k-AVDTC),称

$\min\{k\mid G$ 有 k-邻点可区别的全染色$\}$ 为 G 的邻点可区别全色数,记作 $\chi_{at}(G)$.

对于简单图 $G(V,E)$,用 $V(G)$,$E(G)$ 分别表示 G 的点,边集合,若边 $uw\in V(G)$,且点 w 不属于 $V(G)$,则称图 $S(G)=G-uw+uw+vw$ 为一个关于边 uw 的剖分图,w 剖分点.以下均用 $S(G)$ 表示 G 的剖分图.

引理 设 G 是一个图,则 $\chi_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+1$,若 G 有两个相邻的最大度顶点,则 $\chi_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+2$.

猜想 对于阶数不小于2的简单连通图 $G(V,E)$,有 $\chi_{at}(G)\leqslant\Delta(G)+3$,其中 $\Delta(G)$ 为 G 中顶点的最大度.

1 主要结果

设 F_n 是含有 $n+1$ 个顶点的扇,我们在 F_n 的每根辐条 v_0v_i 上加一个顶点 u_i,$i=1,2,\cdots,n$.得到 F_n 的一个剖分图 $S(F_n)$,当 $n=2$ 时,$S(F_n)$ 是 C_5,由[1]知 $\chi_{at}(C_5)=4$.

定理1: 对于 $S(F_n)$,有 $\chi_{at}(S(F_n))=n+1(n\geqslant3)$.

证明: 当 $n\geqslant3$ 时,记 $V(S(F_n))=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n,u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,$E(S(F_n))=\{v_0v_i\mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{u_iv_i\mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{v_iv_{i+1}\mid i=1,2,\cdots,n-1\}$.

当 $n=3$ 时,$S(F_3)$ 的最大度顶点不相邻,当 $n>3$ 时,$S(F_n)$ 只有一个最大度顶点(v_0),由引理知 $\chi_{at}(S(F_n))\geqslant n+1$.构造从 $V(S(F_n))\cup E(S(F_n))$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的映射 f 如下:

$f(v_0)=n+1$,$f(v_n)=1$,$f(v_i)=i+1$,$i=1,2,\cdots,n-1$.$f(u_i)=i$,$i=1,2,\cdots,n$.$f(v_1v_2)=n$.

$f(v_iv_{i+1})=i-1$,$i=2,3,\cdots,n-1$.$f(v_0u_i)$

① **收稿日期:** 2008-02-08
基金项目: 甘肃省教育厅科研项目(0501-03).
作者简介: 毛新叶(1981-),女,河南周口人,西北师范大学数学与信息科学学院在读研究生,主要研究方向为图论及其应用.

$=i+1, i=1,2,\cdots,n-1, f(v_0u_n)=1$.

$f(u_iv_i)=i+2, i=1,2,\cdots,n-2, f(u_{n-1}v_{n-1})=1, f(u_nv_n)=2$.

易见f是$S(F_n)$的$(n+1)-$AVDTC，故$\chi_{at}(S(F_n))=n+1(n\geqslant 3)$.

设W_n是含有$n+1$个顶点的轮，我们在W_n的每根辐条v_0v_i上加一个顶点u_i得到W_n的一个剖分图$S(W_n)$.

定理 2：

$$\chi_{at}(S(W_n))=\begin{cases}5 & 当\ n=3\ 时,\\ n+1, & 当\ n\geqslant 4\ 时.\end{cases}$$

证明： 当$n=3$时，$S(W_n)$有相邻的最大度顶点，由引理1知$\chi_{at}(S(W_n))\geqslant 5$，又$S(W_3)$存在有$5-$AVDTC. 所以$n=3$时，$\chi_{at}(S(W_n))=5$.

当$n\geqslant 4$时，$S(W_n)$的中心(v_0)是唯一的最大度为(n)顶点，所以$\chi_{at}(S(W_n))\geqslant n+1$. 而在定理2的证明中，再令$f(v_nv_1)=n-1$，即知$f$是$S(W_n)$的$(n+1)-$AVDTC. 故$n\geqslant 4$时，$\chi_{at}(S(W_n))=n+1$.

对于完全二部图$K_{m,n}$我们在它的每条边上增加一个顶点，得到完全二部图$K_{m,n}$的一个剖分图$S(K_{m,n})$.

定理 3：

$$\chi_{at}(S(K_{m,n}))=\begin{cases}3, & 当\ m=n=1\ 时,\\ 4, & 当\ m=n=2\ 时,\\ n+1, & 当\ n\geqslant m+1, m=n\geqslant 3\ 时.\end{cases}$$

证明： 当$m=n=1$时，$S(K_{m,n})$即为P_3，而$\chi_{at}(P_3)=3$. 所以当$m=n=1$时，$\chi_{at}(S(K_{1,1}))=3$. 当$m=n=2$时，$S(K_{m,n})$即为C_8，由定理1知$\chi_{at}(C_8)=4$. 所以当$m=n=2$时，$\chi_{at}(S(K_{2,2}))=4$.

当$m=n\geqslant 3$时，设$K_{n,n}$的顶点集为$\{v_1,v_2,\cdots,v_n,u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，增加的顶点为$w_1,w_2,\cdots,w_{n^2}$，其中$u_1v_1,u_1v_2,\cdots,u_1v_n$边上加的顶点分别为$w_1,w_2,\cdots,w_n,\cdots,u_nv_1,u_nv_2,\cdots,u_nv_n$边上加的顶点分别为$w_{n^2-n+1},w_{n^2-n+2},\cdots,w_{n^2}$. 那么$V(S(K_{n,n}))=\{v_1,v_2,\cdots,v_n,u_1,u_2,\cdots,u_n,w_1,w_2,\cdots,w_{n^2}$, $E(S(K_{n,n}))=\{u_1w_i\mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{u_2w_i\}\mid i=n+1,n+2\cdots,2n\}\cup\cdots\cup\{u_nw_i\mid i=n^2-n+1,n^2-n+2,\cdots,n^2\}\cup\{v_iw_{i+n(m-1)}\mid i=1,2,\cdots,n,m=1,2,\cdots,n\}$.

由于完全二部图的剖分图$S(K_{n,n})$的最大度顶点为(n)不相邻，由引理知，$\chi_{at}(S(K_{n,n}))\geqslant n+1$. 构造从$V(S(K_{n,n}))\cup E(S(K_{n,n}))$到$\{1,2,\cdots,n+1\}$的映射$f$如下：

$f(u_i)=1, i=1,2,3,\cdots,n$. $f(v_i)=1, i=1,2,3,\cdots,n$.

$f(w_{i+nj})=i+j+1, j=0,1,2,3,\cdots,n-1$.

$i=1,2,\cdots,n-j$.

$f(w_{in-j})=i-j, j=0,1,2,\cdots,n-2$.

$i=j+2,j+3,\cdots,n$.

$f(u_iw_{(i-1)n+j})=i+1+j, i=1,2,\cdots,n-1$.

$j=1,2,3,\cdots,n-i$.

$f(u_iw_{i(n-1)+j})=j+1, j=1,2,\cdots,n$.

$i=j+1,j+2,\cdots,n$.

与$v_i(i=1,2,\cdots,n)$相邻的n条边被$\{2,3,4,\cdots,n,n+1\}$染色：

其中：与v_1相连的各边从w_1开始按从左到右方向分别染：$4,5,6,\cdots,n,n+1,2,3$.

与v_2相连的各边从w_2开始按从左到右方向分别染：$5,6,7,\cdots,n+1,2,3,4$.

与v_3相连的各边从w_3开始按从左到右方向分别染：$6,7,8,\cdots,2,3,4,5$.

…

与v_n相连的各边从w_n开始按从左到右方向分别染：$3,4,5,\cdots,n-1,n,n+1,2$.

易见f是$S(K_{n,n})$的$(n+1)-$AVDTC，故当$m=n\geqslant 3$时，$\chi_{at}(S(K_{n,n}))=n+1$.

当$n\geqslant m+1$时，由于完全二部图的剖分图$S(K_{m,n})$的最大度顶点为(n)不相邻，由引理知，$\chi_{at}(S(K_{m,n}))\geqslant n+1$. 其染法与$m=n$时类似. 只是与$u_i$相邻的$m$个剖分点和边取$n+1$中的$m$中色染色即可，其余的边和点与$m=n$时相同.

综上，定理3得证.

例如$S(K_{3,4})$的邻点可区别全染色.

$V(S(K_{3,4}))\cup E(S(K_{3,4}))$到$\{1,2,\cdots,n+1\}$的映射$f$如下：

$f(u_i)=1, i=1,2,3$. $f(v_j)=1, j=1,2,3,4$.

$f(w_i)=i+1, i=1,2,3$. $f(w_i)=i-1, i=4,5,6$. $f(w_i)=i-3, i=7,8$. $f(w_9)=2$, $f(w_{10})=5$, $f(w_i)=i-9, i=11,12$.

$f(u_1w_1)=4, f(u_1w_4)=5, f(u_1w_7)=2, f(u_1w_{10})=3$.

$f(u_2w_2)=5, f(u_2w_5)=2, f(u_2w_8)=3, f(u_2w_{11})=4$.

$f(u_3w_3)=2, f(u_3w_6)=3, f(u_3w_9)=4, f(u_3w_{12})=5$.

$f(v_1w_i)=i+2, i=1,2,3$. $f(v_2w_i)=i, i=4,5$.

$f(v_2w_6)=2, f(v_3w_7)=4, f(v_3w_i)=i-6, i=8,9$. $f(v_4w_i)=i-8, i=10,11,12$.

(下转278页)

其中常数 $\eta>0,\sigma>0$, $B(t)$ 是一维标准布朗运动且 $\int|\lambda(u)|^2\prod(du)<\infty$

需要指出,这里将文献[1]模型中的漂移项推广到非线性的情形而得到了与之相同的结论.其中不变测度存在性的证明使用了不同于文献[1]的 Foster—Lyapunov 漂移条件.但文中的结论同文献[1]一样,是在过程的跳跃方式具有某种"平移不变性"的条件下得到的,对于一般跳跃方式的情形,文中没有论及,这是今后尚待进一步研究的.

参考文献:

[1] 席福宝,毛炳蔚.带跳扩散过程的依全变差稳定性[J].北京理工大学学报,2005,25(7):655—658.

[2] Meyn S P, Tweedie R L. Stability of Markovian Processes III: Foster—Lyapunov Criteria for Continuous—time Processes[J]. Adv Appl Prob, 1993(25): 518—548.

[3] Mufa Chen, Shaofu Li. Coupling Methods for Multidimensional Diffusion Processes[J]. Ann Probab, 1989(17): 151—177.

Stability in Total Variation of Jump—Diffusion Processes with Local Lipscitz and Local Linear Growth Conditions

MAO Bing—wei[1], *WANG Xin*[1], *WANG Fu—wei*[2]

(1. College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China; 2. College of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: In this paper by the method of coupling and Foster—Lyapunov drift condition, the stability in total variation norm of the jump—diffusion process with its diffusion coefficient and drift coefficient satisfying local Lipscitz and local linear growth is studied. A coupling of the processes is constructed and its success is proved. With Feller continuity and Foster—Lyapunov drift condition the invariant probability measure is then proved to exist. Stability in total variation for this kind of process is established under some conditions.

Keywords: coupling; Feller continuity; invariant measure; total variation; stability

(上接 275 页)

参考文献:

[1] 张忠辅,陈祥恩,李敬文,等.关于图的邻点可区别全染色[J].中国科学,A 辑,2004,34(5):574—583.

[2] 刘景发.3—正则 Halin 图的剖分图的全色数[J].南华大学学报,2002,16(4):43—49.

[3] Bondy J. A. and Murty U. S. R. [M]Graph Theory with Applications, Macmillan. Longdon and Elsevier, New York(1976).

On Adjacent Vertex—distinguishing Total Coloring of Subdivision of Some Graphs

MAO Xin—ye, *LIU Xin—sheng*

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The adjacent vertex—distinguishing total chromatic number of Subdivision of F_n, W_n, $K_{m,n}$ was got in this paper.

Key words: subdivision; total coloring; adjacent vertex—distinguishing; total chromatic number