第 26 卷第 2 期　　佳木斯大学学报(自然科学版)　　Vol.26 No.2
2008 年 03 月　　Journal of Jiamusi University (Natural Science Edition)　　Mar.　2008

文章编号：1008－1402(2008)02－0267－03

障碍带条件下一类三阶边值问题解的存在性①

杜睿娟

(西北师范大学数学与信息科学学院，甘肃 兰州 730070)

摘　要： 在障碍带条件下研究非线性常微分方程三阶两点边值问题
$$\begin{cases} x'''=f(t,x,x',x''), & t\in[0,1] \\ x(0)=x'(0)=x''(1)=0, \end{cases}$$
解的存在性，其中 $f:[0,1]\times R^3\rightarrow R$ 为连续函数．

关键词： 两点边值问题；存在性；障碍带

中图分类号： O175.8　　**文献标识码：** A

0　引　言

三阶微分方程因其在天文学、流体力学等方面有着广泛的用途而引起诸多学者的关注，并获得了不少结果．但就我们所知，其中大部分结果是在非线性项 f 满足至多线性增长条件下得到的[1-3]．1994 年，P.Kelevedjiev[4] 运用 Leary－Schauder 原理讨论了障碍带条件下的非线性二阶两点边值问题

$$\begin{cases} x''=f(t,x,x'), & t\in[0,1], \\ x(0)=A,\ x'(1)=B \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，并证得

定理 0　设 $f:[0,1]\times R^2\rightarrow R$ 连续．假定存在常数 L_i，$i=1,2,3,4$．满足 $L_2>L_1\geqslant 0$，$L_3<L_4\leqslant 0$，使得

$f(t,x,p)\geqslant 0,\quad (t,x,p)\in[0,1]\times R\times[L_1,L_2]$

及

$f(t,x,p)\leqslant 0,\quad (t,x,p)\in[0,1]\times R\times[L_3,L_4]$，

则边值问题(1) 在 $C^2[0,1]$ 中至少有一个解．

从文献[4] 定理 0 可以看出，非线性项 f 的符号是在区间上给出的．自然地，我们会问：

(1)　对如下三阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} x'''=f(t,x,x',x''), & t\in[0,1], \\ x(0)=x'(0)=x''(1)=0, \end{cases} \tag{2}$$

非线性项 f 满足障碍带条件，是否也能够建立类似的解的存在性定理?

(2)　当区间 $[L_1,L_2]$，$[L_3,L_4]$ 分别退化为一个点的时候，即条件变化为

$f(t,x,p,q)\geqslant 0,\quad (t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\{\overline{L}\}$；

$f(t,x,p,q)\leqslant 0,\ (t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\{\underline{L}\}$

时，问题(2) 的解是否仍然存在?

本文将运用 Leary－Schauder 原理试图对上述问题(1)，(2) 给予肯定的回答．

记 $C[0,1]$，$C^3[0,1]$ 分别是赋范为

$$\|x\|_0=\max\{x(t):t\in[0,1]\},$$
$$\|x\|_3=\max\{\|x\|_0,\|x'\|_0,\|x''\|_0,\|x'''\|_0\}$$

的 Banach 空间．定义线性算子

$L:D(L)\subset C^3[0,1]\rightarrow C[0,1]$，

$Lx=x''',\quad x\in D(L)$．

其中 $D(L):=\{x\mid x\in C^3[0,1],x(0)=x'(0)=x''(1)=0\}$．

本文的主要工具是 Leary－Schauder 原理的如下特款．

定理 1　设 $f:[0,1]\times R^3\rightarrow R$ 连续，$L:C^3[0,1]\rightarrow C[0,1]$ 是一一映射，若存在常数 $M<\infty$，使对边值问题

$Lx=\lambda f(t,x,x',x''),\quad t\in[0,1],\quad \lambda\in[0,1],\quad x\in D(L)$

的任意解 $x(t)$，有 $\|x\|_3<M$，则边值问题

$Lx=f(t,x,x',x''),\quad t\in[0,1],\quad x\in D(L)$

在 $C^3[0,1]$ 中至少有一个解．

注 1　该定理的证明可参考文献[4] 中定理 2.1.

1　主要结果及证明

定理 1.1　设 $f:[0,1]\times R^3\rightarrow R$ 连续．假定存

① **收稿日期：** 2008－01－30
作者简介： 杜睿娟(1981－)，女，甘肃会宁人，西北师范大学数信学院在读硕士研究生，主要研究方向：常微分方程．

在常数 L_i, $i=1,2,3,4$. 满足 $L_2 > L_1 \geqslant 0$, $L_3 < L_4 \leqslant 0$, 使得

$$f(t,x,p,q)\geqslant 0,\quad (t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times[L_1,L_2]$$

及

$$f(t,x,p,q)\leqslant 0,(t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times[L_3,L_4],$$

则边值问题(2) 在 $C^3[0,1]$ 中至少有一个解.

证明 考虑同伦族问题

$$\begin{cases} x'''=\lambda f(t,x,x',x''), & t\in[0,1], \quad \lambda\in[0,1], \\ x(0)=x'(0)=x''(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

显然 $Lx=x''': D(L)\subset C^3[0,1]\to C[0,1]$ 是一一映射. 由定理1可知, 若(3) 所有可能的解在 $C^3[0,1]$ 中有一个不依赖于 λ 的先验界, 则边值问题(2) 在 $C^3[0,1]$ 中至少有一个解.

我们首先估计 x''. 假设集合

$$S_0=\{t\in[0,1]: L_1 < x''(t)\leqslant L_2\},$$
$$S_1=\{t\in[0,1]: L_3\leqslant x''(t) < L_4\}$$

非空. 取定 $t_0\in S_0$, 如果存在 $t'_0\in(t_0,1]$, 使得

$$x''(t'_0) < x''(t_0), \tag{4}$$

由 $x''(t)$ 的连续性, 甚至可以取到 $t'_0\in(t_0,1]\cap S_0$. 另一方面当 $t\in S_0$ 时, 由于

$$x'''(t)=\lambda f(t,x,x',x'')\geqslant 0$$

因此, $x''(t)$ 在$[0,1]$ 上不减, 则 $x''(t'_0)\geqslant x''(t_0)$, 这与(4) 矛盾. 从而得

$$x''(t)\geqslant x''(t_0),\quad t\in(t_0,1].$$

特别地 $x''(1)\geqslant x''(t_0) > L_1\geqslant 0$, 这与边值条件矛盾. 故 S_0 是空集. 同理可证 S_1 也是空集.

又因 $x''(t)\in C[0,1]$, 所以对 $t\in[0,1]$, 有 $L_4\leqslant x''(t)\leqslant L_1$. 故

$$|x''(t)|\leqslant C_1\triangleq\max\{|L_1|,|L_4|\},\quad t\in[0,1]. \tag{5}$$

另一方面, 对每一个 $t\in(0,1]$, 存在 $d_1, d_2\in(0,t]$ 使得

$$x'(t)-x'(0)=x''(d_1)t,$$
$$x(t)-x(0)=x'(d_2)t,$$

故

$$|x'(t)|\leqslant|x''(d_1)|\leqslant C_1,\quad t\in[0,1], \tag{6}$$
$$|x(t)|\leqslant|x'(d_2)|\leqslant C_1,\quad t\in[0,1]. \tag{7}$$

则由(5),(6),(7) 结合方程(2) 可得

$$|x'''(t)|\leqslant C_2,\quad t\in[0,1].$$

其中 $C_2<\infty$ 是不依赖 λ 的常数. 故边值问题(2) 的解 $x(t)$ 满足

$$\|x\|_3\leqslant C\triangleq\max\{C_1,C_2\}.$$

同理可证下面对偶命题成立.

定理1.2 设 $f:[0,1]\times R^3\to R$ 连续. 假定存在常数 L_i, $i=1,2,3,4$, 满足 $L_2 > L_1\geqslant 0$, $L_3 < L_4\leqslant 0$, 使得

$$f(t,x,p,q)\leqslant 0,$$
$$(t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times[L_1,L_2]$$

及 $f(t,x,p,q)\geqslant 0$,

$$(t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times[L_3,L_4],$$

则边值问题

$$\begin{cases} x'''=f(t,x,x',x''), & t\in[0,1], \\ x''(0)=x'(0)=x(1)=0, \end{cases} \tag{8}$$

在 $C^3[0,1]$ 中至少有一个解.

注2 从上面的定理可以看出, 非线性项 f 的符号是在区间上给出的. 在下面的定理中我们将看到: 当上面定理中的区间退化为一点时, 仍可以获得边值问题(2) 解的存在性定理.

定理1.3 设 $f:[0,1]\times R^3\to R$ 连续. 假定存在常数 $\bar{L}$, $\underline{L}$ 满足 $\underline{L}<0<\bar{L}$, 使得

$$f(t,x,p,q)\geqslant 0,\quad (t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\{\bar{L}\},$$

及

$$f(t,x,p,q)\leqslant 0,\quad (t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\{\underline{L}\},$$

则边值问题(2) 在 $C^3[0,1]$ 中至少有一个解.

证明 由Tietze—Urysohn 引理, 存在连续函数 $\Delta: R\to[-1,1]$, 使得

$$\Delta(\bar{L})=1,\qquad \Delta(\underline{L})=-1.$$

对任一整数 $n\geqslant 1$, 令

$$f_n(t,x,p,q)=f(t,x,p,q)+\frac{1}{n}\Delta(q),$$

易见 f_n 连续. 考虑边值问题

$$\begin{cases} x'''=f_n(t,x,x',x''), & t\in[0,1], \\ x(0)=x'(0)=x''(1)=0, \end{cases} \tag{9}$$

则

$$f_n(t,x,x',\bar{L})=f(t,x,x',\bar{L})+\frac{1}{n}\Delta(\bar{L})\geqslant\frac{1}{n}>0.$$

由连续函数的保号性可知, 存在 $L_{n,1}$, $L_{n,2}$ 满足

$$0\leqslant L_{n,1}<\bar{L}<L_{n,2},$$

使得 $f_n(t,x,p,q)>0$,

$$(t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times[L_{n,1},L_{n,2}],$$

同理存在 $L_{n,3}$, $L_{n,4}$ 满足

$$L_{n,3}<\underline{L}<L_{n,4}\leqslant 0,$$

使得 $f_n(t,x,p,q)<0$,

$$(t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times[L_{n,3},L_{n,4}],$$

显然可以要求

$$[L_{n+1,1},L_{n+1,2}]\subseteq[L_{n,1},L_{n,2}], \tag{10}$$
$$[L_{n+1,3},L_{n+1,4}]\subseteq[L_{n,3},L_{n,4}]. \tag{11}$$

由定理 1.1，边值问题(9) 在 $C^3[0,1]$ 中有解 x_n，且满足

$$L_{n,4} \leqslant x''_n(t) \leqslant L_{n,1}, \quad t \in [0,1],$$

上式结合(10)，(11)，我们有

$$L_{1,4} \leqslant x''_n(t) \leqslant L_{1,1}, \quad t \in [0,1].$$

故存在常数 C_3，使得

$$|x''_n(t)| \leqslant C_3, \quad t \in [0,1], \tag{12}$$

另一方面，对每一个 $t \in (0,1]$，存在 $d_3, d_4 \in (0,t]$ 使得

$$x'_n(t) - x'_n(0) = x''_n(d_3)t,$$
$$x_n(t) - x_n(0) = x'_n(d_4)t,$$

故

$$|x'_n(t)| \leqslant |x''_n(d_3)| \leqslant C_3, \quad t \in [0,1], \tag{13}$$
$$|x_n(t)| \leqslant |x'_n(d_4)| \leqslant C_3, \quad t \in [0,1]. \tag{14}$$

则由(12)，(13)，(14) 结合方程(9)，对任意 $n \geqslant 1$，

$$|f_n(t,x,p,q)| \leqslant \max_{t\in[0,1],|x|\leqslant C_3,|p|\leqslant C_3,|q|\leqslant C_3} |f(t,x,p,q)| + 1.$$

可知存在不依赖 λ 的常数 $C_4 < \infty$，使得

$$|x'''_n(t)| \leqslant C_4, \quad t \in [0,1].$$

故边值问题(2) 的解 $x_n(t)$ 满足

$$\|x_n\|_3 \leqslant N_1 \triangleq \max\{C_3, C_4\}.$$

下证 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $x_{n_{j_{k_l}}}$ 满足

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{j_{k_l}}} = w;$$

及 w 满足问题(2)。

事实上，因为 $C^3[0,1] \to\to C[0,1]$，若 $\{x_n\}$ 在 $C^3[0,1]$ 中有界，则 $\{x_n\}$ 是 $C[0,1]$ 中的相对紧集，进而存在 $\{x_{n_j}\} \subseteq \{x_n\}$，使得

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = w \in C[0,1].$$

又因为 $\{x_{n_j}\}$ 有界，且 $C^3[0,1] \to\to C^1[0,1]$，故存在 $\{x_{n_{j_k}}\} \subseteq \{x_n\}$，使得

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_{j_k}} = w, \lim_{k\to\infty} x'_{n_{j_k}} = w'.$$

同理存在 $x_{n_{j_k}} \subseteq x_n$，使得

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_{j_{kl}}} = w, \lim_{k\to\infty} x'_{n_{j_{kl}}} = w', \lim_{l\to\infty} x''_{n_{j_{kl}}} = w''.$$

不妨记 $u_n = x_{n_{j_{kl}}}$，则显然有

$$\begin{cases} u'''_n(t) = f_n(t, u_n, u'_n, u''_n), & t \in [0,1], \\ u_n(0) = u'_n(0) = u''_n(1) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

易见问题(15) 等价于

$$u_n(t) = \int_0^1 G(t,s) f_n(s, u_n(s), u'_n(s), u''_n(s))\mathrm{d}s \tag{16}$$

其中

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{2}(t-s)^2, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{t^2}{2} & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

是边值问题

$$\begin{cases} x'''(t) = 0, & t \in [0,1] \\ x(0) = x'(0) = x''(1) = 0. \end{cases}$$

的 Green 函数。

因为 f_n 一致收敛于 f，且 $G(t,s)f_n(s,u_n(s),u'_n(s),u''_n(s))$ 连续，故对(16) 两端取极限，得

$$w(t) = \int_0^1 G(t,s) f_n(s, w(s), w'(s), w''(s))\mathrm{d}s$$

由上式不难推知 $w \in C^3[0,1]$，且 w 满足(2)。

同理可证下面对偶命题成立。

定理 1.4　设 $f:[0,1]\times R^3 \to R$ 连续。假定存在常数 $\bar{L}, \underline{L}$ 满足 $\underline{L} < 0 < \bar{L}$，使得

$$f(t,x,p,q) \leqslant 0, \quad (t,x,p,q) \in [0,1] \times R^2 \times \{\bar{L}\},$$

及

$$f(t,x,p,q) \geqslant 0, \quad (t,x,p,q) \in [0,1] \times R^2 \times \{\underline{L}\},$$

则边值问题

$$\begin{cases} x''' = f(t,x,x',x''), & t \in [0,1], \\ x''(0) = x'(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

在 $C^3[0,1]$ 中至少有一个解。

例 1　考虑如下三阶微分方程

$$x'''(t) = (x''(t))^5 - \frac{25}{4}(x''(t))^4 + \frac{101}{8}(x''(t))^3 - \frac{143}{16}(x''(t))^2 + \frac{75}{32}x''(t) - \frac{25}{32}, \quad t \in [0,1]$$

在边值条件

$$x(0) = x'(0) = x''(1) = 0$$

下的可解性。

显然，如果我们取 $L_1 = 1, L_2 = \dfrac{5}{2}, L_3 = -\dfrac{5}{2}, L_4 = -\dfrac{1}{2}$，则 $f(t,x,y,z) = z^5 - \dfrac{25}{4}z^4 + \dfrac{101}{8}z^3 - \dfrac{143}{16}z^2 + \dfrac{75}{32}z - \dfrac{25}{32}$ 满足定理 1 的所有条件，因此所考察的问题在 $C^3[0,1]$ 中至少存在一个解。

如果我们取 $\bar{L} = -32, \underline{L} = 2$，由定理 3 我们同样可以断定此边值问题在 $C^3[0,1]$ 中至少存在一个解。

(下转 271 页)

结论2　设任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,令函数$f(x)$,对所有的正整数 n,使得$f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$.若对某个 $t \in (0, +\infty)$ 有$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{x^t}$存在且$f(0) = 0$,则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛.

证明　对于函数$f(x)$,有$f(0) = 0$且对某个 $t \in (0, +\infty)$ 有$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{x^t}$存在,所以有$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^{1+t}} = \frac{1}{1+t} \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{x^t}$存在,从而$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{\left(\frac{1}{n}\right)^{1+t}} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{1+t}} \right|$存在.所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛.

例3　判定级数

$$1 - \sin 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

的敛散性.

解　对于$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,考虑函数$f(x) = \sqrt{x} - \sin\sqrt{x}$,显然有$f(0) = 0$,且

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \cos\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}.$$

故由结论2可知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,绝对收敛.又由于$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$($a_n$为原级数的一般项),所以由结论1可知原级数收敛.

注记:对于例1及例3中的级数,运用狄利克雷判别法和阿贝尔判别法都很难解决,而运用柯西准则也比较复杂.可见,上述结论可作为任意项级数收敛性判别法的必要而有益的补充.

参考文献:

[1]　华东师范大学数学系.数学分析(下册)(第三版)[M].北京:高等教育出版社,2002.

Two Conclusions on Testing Convergence and Diffusion Properties of Arbitrary Term Series

LIU Zhi-gao

(College of Vocational Technology, Anhui University of Technology, Ma'anshan Anhui 243011, China)

Abstract:　Based on the comparison test and the definition of convergence of series, two important conclusions are presented. They can be conveniently used to judge the convergence of some arbitrary term series.

Keywords:　arbitrary term series; absolutely convergence

(上接269页)

参考文献:

[1]　Aftabizadeh, A. R, C. P. Gupta, Jian-Ming Xu. Existence and Uniqueness Theorems for Three-point Boundary Value Problems [J]. SIAM JMath. Anal., 20(1989) 716-726.

[2]　Granas A, Guenther R B, Lee J. W. Nonlinear Boundary Value Problems for Some Classes of Ordinary Differential Equations [J]. Rocky-MountainJ. Math., 10(1980) 35-58.

[3]　姚庆六.三阶常微分方程的某些非线性特征值问题的正解[J].数学物理学报,23A(2003) 513-519.

[4]　P. Kelevedjiev. Existence of Solutions for Two-point Boundary Valueproblems[J]. Nonlinear Analysis, 22(1994) 217-224.

[5]　马如云.非线性常微分方程非局部问题[M].北京:科学出版社,2004, 11-14.

Existence of Solutions for a Class of Third Order Boundary Value Problems under Barrier Strips Conditions

DU Rui-juan

(College of Mathematics & Information Science, Northwestern University, Lanzhou 730070, China)

Abstract:　The existence of solutions for the nonlinear third-order two-point boundary value problem $\begin{cases} x''' = f(t, x, x', x''), & t \in [0,1] \\ x(0) = x'(0) = x''(1) = 0, \end{cases}$ is discussed in this paper, if function $f: [0,1] \times R^3 \to R$ is continuous and satisfies barrier strips conditions.

Keywords:　two-point boundary value problem; existence; barrier strips