文章编号: 1000-5641(2021)01-0016-12

带有衰退记忆的非自治经典反应扩散方程在非线性边界下解的渐近性

梁玉婷, 汪 璇

(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 本文研究了带有衰退记忆的非自治经典反应扩散方程解的长时间动力学行为, 当内部非线性项和边界非线性项均以任意阶多项式增长并满足一定的平衡条件, 且外力项仅为平移有界而非平移紧时, 运用收缩函数方法和过程理论, 证明了一致吸引子在 $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ 中的存在性及其吸引子的拓扑结构. 该结果改进和推广了一些已有的结果.

关键词: 非自治经典反应扩散方程; 一致吸引子; 非线性边界; 衰退记忆; 任意阶多项式增长

中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.201911046

Asymptotic behavior of solutions for the non-autonomous classical reaction-diffusion equation with nonlinear boundary conditions and fading memory

LIANG Yuting, WANG Xuan

(*College of Mathematics and Statistics*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: In this paper, we study the long-time dynamic behavior of solutions for the non-autonomous classical reaction-diffusion equation with nonlinear boundary conditions and fading memory, where the internal nonlinearity and boundary nonlinearity adheres to polynomial growth of arbitrary order as well as the balance condition. In addition, the forcing term is translation bounded, rather than translation compact, by use of contractive function method and process theory. The existence and the topological structure of uniform attractors in $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ are proven. This result extends and improves existing research in the literature.

Keywords: non-autonomous classical reaction-diffusion equation; uniform attractors; nonlinear boundary; fading memory; polynomial growth of arbitrary order

0 引 言

本文中, 在非线性边界条件下, 我们来讨论带有衰退记忆的非自治经典反应扩散方程解的渐近性态:

$$\begin{cases} u_t-\Delta u-\displaystyle\int_0^\infty k(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s+f(u)=h(x,t), & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\gamma}+g_1(u)=0, & (x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}^+,\\ u(x,t)=u_\tau(x,t), & x\in\Omega,\ \tau\leqslant t, \end{cases}\tag{1}$$

收稿日期: 2019-11-25

基金项目: 国家自然科学基金 (11761062, 11561064, 11661071)

通信作者: 汪 璇, 女, 博士, 教授, 研究方向为非线性微分方程和无穷维动力系统. E-mail: wangxuan@nwnu.edu.cn

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 上带有光滑边界 Γ 的有界域. 设外力项 $h(x,t)\in L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ (平移有界), 且

$$\mathcal{H}(h_0)=[h_0(x,s+h)\mid h\in\mathbb{R}]_{L_{\rm loc}^{2,w}(\mathbb{R};L^2(\Omega))},$$

其中 $[\cdot]$ 表示 $h_0(x,s+h)$ 关于空间 $L_{\rm loc}^{2,w}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 弱收敛拓扑的闭包. 如果 $h\in\mathcal{H}(h_0)$, 则

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\|h(x,t)\|^2{\rm d}s<+\infty,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 范数.

方程中衰退记忆在能量耗散中的作用, 通过 $\Delta u(\cdot)$ 和记忆核函数 $k(\cdot)$ 的线性卷积项来实现, 而且系统的能量耗散不仅受到现时外力的影响, 同时还受到历史外力的影响, 并且随着时间的推移, 历史外力的影响会越来越小. 因此, 设记忆核函数 $k(\cdot)\in C^2(\mathbb{R}^+)$, $k(s)\geqslant 0$, $k'(s)\leqslant 0$, $k(\infty)=0$, $\forall s\in\mathbb{R}^+$.

如同文献 [1], 我们定义变量 $\eta^t(x,s)=\int_0^s u(x,t-r){\rm d}r$, $s\geqslant 0$,则

$$\partial_t\eta^t(x,s)=u(x,t)-\partial_s\eta^t(x,s),\quad s\geqslant 0. \tag{2}$$

为了方便, 我们记 $\partial_t\eta^t=\eta_t^t$, $\partial_s\eta^t=\eta_s^t$. 令 $\mu(s)=-k'(s)$, $\mu\in C^1(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R}^+)$. 显然, $\int_0^\infty\mu(s){\rm d}s=k_0$, 且 $\mu(\cdot)$ 满足

$$\mu(s)\geqslant 0,\quad \mu'(s)\leqslant 0,\quad \forall\, s\in\mathbb{R}^+, \tag{3}$$

$$\mu'(s)+\delta\mu(s)\leqslant 0,\quad \forall\, s\geqslant 0, \tag{4}$$

其中 δ 为正常数. 则方程 (1) 可转化为

$$u_t-\Delta u-\int_0^\infty\mu(s)\Delta\eta^t(s){\rm d}s+f(u)=h(x,t), \tag{5}$$

相应的初值条件为

$$\begin{cases} u(x,t)=u_\tau(x), & x\in\Omega,\\ \eta^\tau(x,s)=\int_0^s u_\tau(x,-r){\rm d}r, & (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{6}$$

相应的边值条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial\gamma}+g_1(u)=0, & (x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}^+,\\ \dfrac{\partial\eta^t}{\partial\gamma}+g_2(u)=0, & (x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $u(\cdot)$ 满足下列条件: 存在正常数 R_1 和 $\varrho=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{\lambda_1}{2}\}$, 使得

$$\int_0^\infty{\rm e}^{-\varrho s}\|\nabla u(-s)\|^2{\rm d}s\leqslant R_1,$$

上式中 λ_1 为 $-\Delta$ 的第一特征根.

问题 (5)—(7) 所包含的非线性项分为两类: 内部非线性项和边界非线性项. 设内部非线性项 f 为 C^1 函数, 且满足: 存在正常数 l, 使得

$$f'(s)\geqslant -l,\qquad \forall\, s\in\mathbb{R}, \tag{8}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

且

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{f(s)s}{|s|^{p+1}}=C_f>0, \tag{9}$$

其中 $p\in\mathbb{R}^+$, 且 $p>1$.

同时, 设边界非线性项 g_1, g_2 为 C^1 函数, 且满足: 存在正常数 m_1 和 m_2, 使得

$$g_1'(s)\geqslant -m_1,\ \ g_2'(s)\geqslant -m_2,\ \text{及}\ \int_\Gamma |g_2(s(x))|^2\mathrm{d}x<\infty, \tag{10}$$

且

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{g_1(s)s}{|s|^{q+1}}=C_{g_1}<0, \tag{11}$$

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{g_2(s)s}{|s|^{r+1}}=C_{g_2}>0, \tag{12}$$

其中 $q,\ r\in\mathbb{R}$, 且 $q>1,\ r>1$.

进一步, 为了保证问题 (5)—(7) 对应的动力系统为能量耗散系统, 假设内部非线性项和边界非线性项满足下列任意一个平衡条件 $(\mathcal{B}_1)$:

i) $p+1>\max\{2q,2r\}$;

ii) 当 $p+1=2q>2r$ 时, $C_f>\mathcal{R}^2C_{g_1}^2(q+1)^2$;

iii) 当 $p+1=2r>2q$ 时, $C_f>\mathcal{R}^2k_0^2C_{g_1}^2(r+1)^2$;

iv) 当 $p+1=2q=2r>2$ 时, $C_f>\mathcal{R}^2(q+1)^2(C_{g_1}^2+k_0^2C_{g_2}^2)$;

v) 当 $p+1=2q=2r=2$ 时, $C_f+k_0\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}C_{g_2}>\mathcal{R}^2(q+1)^2(C_{g_1}^2+k_0^2C_{g_2}^2)-\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}C_{g_1}$.

其中 $\mathcal{R}=\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}C_0(\Omega,1)$ ($C_0(\Omega,1)$为引理 1.2 中的正常数), $k_0=k(0)$.

当 $k=0$ 时, 方程 (1) 转化为通常意义下的经典反应扩散方程, 近年来, 关于该方程解的渐近性态已经引起了许多学者的研究, 如文献 [2-8]. 在非线性边界条件下, 文献 [3-4] 讨论了解的适定性和渐近性行为, 当内部非线性项和边界非线性项超临界增长且满足一定的平衡条件时, 杨璐等分别得到了自治系统和非自治系统解的渐近正则性和吸引子的存在性. 当 k 为关于时间满足衰退条件的函数时, 在 Dirichlet 边界条件下, 文献 [9-11] 研究了记忆型经典反应扩散方程解的渐近性. 当非线性项超临界增长时, 文献 [8] 通过构造相空间的斜积流, 证明了一致吸引子的存在性, 并刻画出了吸引子的结构. Chepyzhov 等在文献 [9] 中借助轨道吸引子在空间 $L^2(\Omega)$ 上获得了全局吸引子的存在性. 当非线性项次临界增长时, Giorgi 等在文献 [10] 中得到了有界吸收集在空间 $L^2(\Omega)\times L_\mu^2(\mathbb{R};H_0^1(\Omega))$ 及 $H_0^1(\Omega)\times L_\mu^2(\mathbb{R}^+;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ 的存在性. 汪璇等在文献 [11] 中运用收缩函数方法和半群理论直接证明了全局吸引子在 $L^2(\Omega)\times L_\mu^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(\Omega))$ 中的存在性.

由于衰退记忆项在非线性边界下的能量估计存在一定困难, 带有衰退记忆的非自治经典反应扩散方程在非线性边界下解的动力学行为还很少有人研究, 因而引发了我们的研究兴趣. 借助上述结果, 本文在此基础上继续讨论和研究了衰退记忆型模型对应动力系统的非线性动力学行为. 同时, 研究发现工作的重心和难点依然是解过程的连续性、紧性或渐近紧性的验证. 由于内部非线性项和边界非线性项均以超临界指数增长, 在边界上紧嵌入定理失效以及衰退记忆项所在的记忆空间缺乏紧性, 且外力项仅平移有界 (非紧), 使得在非自治系统中解过程连续性和紧性验证面临许多实质性困难. 最终, 笔者运用收缩函数方法和过程理论成功地克服了上述本质性研究困难, 进而证明了一致吸引子在空

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

间 $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ 中的存在性及其吸引子的拓扑结构 (见定理 2.4).

本文的结构如下: 第 1 章, 介绍研究问题所涉及的预备知识, 包括记号、空间的定义及抽象结果; 第 2 章, 证明一致吸引子在空间 $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;H^1_0(\Omega))$ 中的存在性.

1　预备知识

如同文献 [12], 设 $A=-\Delta$ 且定义域 $D(A)=H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 考虑 Hilbert 空间族 $D(A^{\frac{s}{2}})$, $s\in\mathbb{R}$, 且赋予相应的内积与范数:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{D(A^{\frac{s}{2}})}=\langle A^{\frac{s}{2}}\cdot,A^{\frac{s}{2}}\cdot\rangle,\ \ \|\cdot\|_{D(A^{\frac{s}{2}})}=\|A^{\frac{s}{2}}\cdot\|,$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别为 $L^2(\Omega)$ 的内积与范数.

因此, 对于任意的 $s>r$, 有紧嵌入 $D(A^{\frac{s}{2}})\hookrightarrow D(A^{\frac{r}{2}})$, 以及对于所有的 $s\in[0,\frac{n}{2})$, 有连续嵌入 $D(A^{\frac{s}{2}})\hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}(\Omega)$ 成立.

对于 $0\leqslant s\leqslant 3$, 记 $\mathcal{H}_s=D(A^{\frac{s}{2}})$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_s}=\|\cdot\|_{D(A^{\frac{s}{2}})}$, 则 $\mathcal{H}_0=L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_1=H^1_0(\Omega)$, $\mathcal{H}_2=H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 根据记忆核函数 $\mu(\cdot)$ 满足的条件, 当 $0\leqslant r\leqslant 3$ 时, 设 $L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r)$ 为定义于 $\mathbb{R}^+$ 上且取值于 $\mathcal{H}_r$ 的 Hilbert 空间族, $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathcal{H}_r$, 并赋予相应的内积与范数:

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_{\mu,\mathcal{H}_r}=\int_0^\infty\mu(s)\langle\varphi_1(s),\varphi_2(s)\rangle_{\mathcal{H}_r}\mathrm{d}s,$$
$$\|\varphi\|^2_{\mu,\mathcal{H}_r}=\int_0^\infty\mu(s)\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_r}\mathrm{d}s.$$

定义一族 Hilbert 空间: $\mathcal{E}_r=\mathcal{H}_{r-1}\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r)$, $z=(u,\eta^t)$ 为方程 (5)—(7) 的解, z 是一个二元组. 并且赋予范数: $\|z\|_{\mathcal{E}_r}=\|(u,\eta^t)\|_{\mathcal{E}_r}=(\frac{1}{2}(\|u\|^2_{\mathcal{H}_{r-1}}+\|\eta^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_r}))^{\frac{1}{2}}$.

为了便于估计, 还需要以下预备性结果.

引理 1.1[13]　记 $I=[0,T]$, $\forall\,T>0$. 设记忆核函数 $\mu(s)$ 满足式 (3)—(4), 则对于任意的 $\eta^t\in C(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r))$, $0\leqslant r<3$, 存在常数 $\delta>0$, 使得

$$\langle\eta^t,\ \eta^t_s\rangle_{\mu,\mathcal{H}_r}\geqslant\frac{\delta}{2}\|\eta^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_r}.$$

引理 1.2[14]　存在常数 $C_0(\Omega,1)>0$, 使得对于每一个 $\varphi\in W^{1,1}(\Omega)$, 有

$$\left\|\varphi-\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma\varphi\,\mathrm{d}x\right\|_{L^1(\Omega)}\leqslant C_0(\Omega,1)\|\nabla\varphi\|_{L^1(\Omega)}.$$

以下预备性结果将用于证明解过程的渐近紧性、连续性及一致吸引子的存在性.

定义 1.1[15]　设 X 为 Banach 空间, B 为 X 中的有界集, Σ 为符号空间. 定义于 $(X\times X)\times(\Sigma\times\Sigma)$ 上的函数 $\phi(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)$ 称为 $B\times B$ 上的渐近收缩函数, 如果对于任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset B$ 及 $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty\subset\Sigma$, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 及子列 $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\phi(x_{n_k},x_{n_l};\sigma_{n_k},\sigma_{n_l})=0.$$

记 $\mathfrak{C}(B\times\Sigma)$ 为定义于 $B\times B$ 上的全体收缩函数构成的集合.

引理 1.3　设 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ $(t\geqslant\tau,\ \sigma\in\Sigma)$ 为作用于 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 上的过程族, 对于平移半群 $\{T(h)\}_{h\geqslant 0}$, 以下平移恒等式成立:

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$U_{T(h)\sigma}(t,\tau)=U_\sigma(t+h,\tau+h),\quad \forall\, h\geqslant 0,\ \forall\, t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbb{R}.$$

如果过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ $(\sigma\in\Sigma)$ 拥有一致 (关于 $\sigma\in\Sigma$) 有界吸收集 B_0. 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $T=T(B_0,\varepsilon)$ 及 $\phi_T(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)\in\mathfrak{C}(B_0\times\Sigma)$, 使得

$$\|U_{\sigma_1}(T,\tau)x-U_{\sigma_2}(T,\tau)y\|\leqslant\varepsilon+\phi_T(x,y;\sigma_1,\sigma_2),\quad \forall\, x,y\in B_0,\ \forall\,\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma,$$

其中 ϕ_T 依赖于 T. 则过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ $(\sigma\in\Sigma)$ 在空间 X 中一致 (关于 $\sigma\in\Sigma$) 渐近紧, 即对于任意有界序列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty\subset X$, $\{\sigma_n\}\subset\Sigma$ 和 $\{t_n\}\subset\mathbb{R}^+$, 当 $n\to\infty$, $t_n\to\infty$ 时, 有 $\{U_{\sigma_n}(t_n,\tau)y_n\}_{n=1}^\infty$ 在 X 中相对紧.

引理 1.4[16] 设 $X\Subset H\subset Y$ 是自反的 Banach 空间. 假设序列 $\{u_n\}$ 在 $L^2([0,T];X)$ 中一致有界, 对于某些 $p>1$, $\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}$ 在 $L^p([0,T];Y)$ 中一致有界, 则 $\{u_n\}$ 的子序列在 $L^2([0,T];H)$ 中强收敛.

定义 1.2[17] 称作用于 X 的过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ $(\sigma\in\Sigma)$ 为 $(X\times\Sigma,X)$-弱连续的, 若满足: 对于固定的 τ, $t\geqslant\tau$, $\tau\in\mathbb{R}$, 如果 $z_{\tau n}\to z_\tau$ 于 X, $h_n\rightharpoonup h$ 于 Σ, 那么 $U_{h_n}(t,\tau)z_{\tau n}\rightharpoonup U_h(t,\tau)z_\tau$ 于 X.

定理 1.1[17](一致吸引子的存在性和结构) 设作用于 X 的过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ $(t\geqslant\tau,\ \sigma\in\Sigma)$ 为一致 (关于 $\sigma\in\Sigma$) 渐近紧且 $(X\times\Sigma,X)$-弱连续. 设 Σ 为紧的度量空间, 并且 $\{T(h)\}_{h\geqslant0}$ 为 Σ 上的连续不变 $(T(h)\Sigma=\Sigma)$ 半群, 满足引理 1.3 的平移恒等式, 则过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ $(\sigma\in\Sigma)$ 拥有一致吸引子 $\mathcal{A}_\sigma$. 进一步, 有

$$\mathcal{A}_\sigma=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\mathcal{K}_\sigma(\tau),$$

其中 $\mathcal{K}_\sigma(\tau)$ 为过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ 带着符号 $\sigma\in\Sigma$ 在 $t=\tau$ 时的核截片.

2 主要结果

2.1 解的存在唯一性

首先, 关于问题 (5)—(7), 我们给出弱解的如下定义.

定义 2.1 记 $I=[\tau,T]$, $\forall\, T>\tau$. 设 $h\in\mathcal{H}(h_0)$, $g\in L^2(\Omega)$ 且 $z_\tau\in\mathcal{E}_1$. 二元组 $z=(u,\eta^t)$ 满足

$$\begin{aligned}&u\in C(I;\mathcal{H}_0)\cap\big(L^2(I;\mathcal{H}_1)\cap L^{p+1}(I;L^{p+1}(\Omega))\big)\times L^{q+1}(I;L^{q+1}(\Gamma))\times L^{r+1}(I;L^{r+1}(\Gamma));\\&\eta^t\in C(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1));\\&\eta^t_t+\eta^t_s\in L^\infty(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_0))\cap L^2(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)).\end{aligned}$$

记 $z(t)$ 为问题 (5)—(7) 当初值 $z(\tau)=z_\tau$ 时于时间区间 I 上的弱解, 如果

$$\begin{gathered}\langle u_t,\omega\rangle+\langle u,\omega\rangle_{\mathcal{H}_1}+\langle\eta^t,\omega\rangle_{\mu,\mathcal{H}_1}+\langle f(u),\omega\rangle=\langle h,\omega\rangle,\\\langle\eta^t_t+\eta^t_s,\varphi\rangle_{\mu,\mathcal{H}_1}=\langle u,\varphi\rangle_{\mu,\mathcal{H}_1},\end{gathered}$$

对于所有的 $\omega\in\mathcal{H}_1$, $\varphi\in L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)$ 且几乎处处 $t\in I$ 成立.

运用文献 [13] 的 Galerkin 逼近方法, 可以得到问题 (5)—(7) 的解 $z(t)$ 在 $\mathcal{E}_1$ 中的存在唯一性.

定理 2.1 设非线性项 f, g_1, g_2 满足式 (9)、式 (11)、式 (12) 及平衡条件 $(\mathcal{B}_1)$, 记忆核函数 $\mu(\cdot)$ 满足式 (3)—(4), 且 $h\in\mathcal{H}(h_0)$, $h_0\in L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))$, 那么对任意给定的初值 $z_\tau\in\mathcal{E}_1$, 问题 (5)—(7) 在 $\mathcal{E}_1$ 中存在唯一解 $z=(u,\eta^t)$, 满足

$$\begin{aligned}&u\in\big(L^2(I;\ \mathcal{H}_1)\cap L^{p+1}(I;\ L^{p+1}(\Omega))\big)\times L^{q+1}(I;\ L^{q+1}(\Gamma))\times L^{r+1}(I;\ L^{r+1}(\Gamma)),\\&z\in L^2(I;\ \mathcal{E}_1)\cap L^\infty([0,\infty];\ \mathcal{E}_1).\end{aligned}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

进一步, 设 $\{z_\tau^i, h^i\}$, $i=1,2$, 为初始条件, 定义 z_τ^i 为问题 (5)—(7) 对应初始条件的解, 则以下估计成立: 对于所有的 $t \geqslant \tau$,

$$\|z_1(t)-z_2(t)\|_{\mathcal{E}_1}^2 \leqslant Q(\|z_\tau^1-z_\tau^2\|_{\mathcal{E}_1}^2+\|h_1-h_2\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))}^2),$$

其中当 $s\to 0^+$ 时, $Q(s)\to 0$.

根据定理 2.1, 对于每一个 $h\in\mathcal{H}(h_0)$, 可以定义问题 (5)—(7) 在空间 $\mathcal{E}_1$ 中的解过程, 即

$$U_h(t,\tau):\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_1,\ z_\tau=(u_t,\ \eta^\tau)\mapsto(u(t),\ \eta^t)=U_h(t,\tau)z_\tau,$$

且 $U_h(t,\tau)$ $(h\in\mathcal{H}(h_0))$ 作用于 $\mathcal{E}_1$ 上的过程族.

2.2　有界吸收集的存在性

类似于自治系统有界吸收集存在性的证明, 我们可以得到以下对应于过程族 $U_h(t,\tau)$ $(h\in\mathcal{H}(h_0))$ 的有界一致 (关于 $h\in\mathcal{H}(h_0)$) 吸收集的存在性结果.

首先, 关于问题 (5)—(7) 的解在空间 $\mathcal{E}_1$ 中做先验估计.

引理 2.1　设 $U_h(t,\tau)$ 为问题 (5)—(7) 在空间 $\mathcal{E}_1$ 中的解, 且 $h\in\mathcal{H}(h_0)$, $h_0\in L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$, B 为 $\mathcal{E}_1$ 中的有界子集. 非线性项 f, g_1, g_2 满足式 (9)、式 (11)、式 (12) 及平衡条件 $(\mathcal{B}_1)$, 且式 (3)—(4) 成立, 则对任意有界集 $B\subset\mathcal{E}_1$, 存在仅依赖于 $\|h\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))}$ 的正常数 M_0 和时刻 $T_B=T(\|B\|_{\mathcal{E}_1})$, 使得

$$\|U_h(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{E}_1}^2=\frac{1}{2}(\|u\|_{\mathcal{H}_0}^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\leqslant M_0,\ \forall\, t\geqslant T_B+\tau,\ \forall\, z_\tau\in B,\ \forall\, h\in\mathcal{H}(h_0),$$

成立.

证　明　用 u 与方程 (5) 在 $L^2(\Omega)$ 中做内积, 可得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\int_\Gamma g_1(u)u\mathrm{d}x-\int_0^\infty\mu(s)\langle\Delta\eta^t(s),u(t)\rangle\mathrm{d}s+\int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x=\langle h(x,t),u\rangle. \tag{13}$$

首先, 利用等式 $u(x,t)=\eta_t^t(x,s)+\eta_s^t(x,s)$, 并根据引理 1.1, 易知

$$\begin{aligned}-\int_0^\infty\mu(s)\left\langle\Delta\eta^t(s),u(t)\right\rangle\mathrm{d}s=&-\int_0^\infty\mu(s)\left\langle\Delta\eta^t(s),\eta_t^t(x,s)+\eta_s^t(x,s)\right\rangle\mathrm{d}s-\int_0^\infty\mu(s)\left\langle\frac{\partial\eta^t(s)}{\partial\gamma},u\right\rangle_\Gamma\mathrm{d}s\\=&\int_0^\infty\mu(s)\left\langle\nabla\eta^t(s),\nabla\eta_t^t(x,s)+\nabla\eta_s^t(x,s)\right\rangle\mathrm{d}s-\int_0^\infty\mu(s)\left\langle\frac{\partial\eta^t(s)}{\partial\gamma},u\right\rangle_\Gamma\mathrm{d}s\\=&\int_0^\infty\mu(s)\left\langle\nabla\eta^t(s),\nabla\eta_t^t(x,s)\right\rangle\mathrm{d}s+\int_0^\infty\mu(s)\left\langle\nabla\eta^t(s),\nabla\eta_s^t(x,s)\right\rangle\mathrm{d}s\\&-\int_0^\infty\mu(s)\left\langle\frac{\partial\eta^t(s)}{\partial\gamma},u\right\rangle_\Gamma\mathrm{d}s\\\geqslant&\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\eta^t\right\|_{\mu,H_1}^2+\frac{\delta}{2}\left\|\eta^t\right\|_{\mu,H_1}^2+\int_0^\infty\mu(s)\langle g_2(u),u\rangle_\Gamma\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据引理 1.2 可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\mu(s)\langle g_2(u),u\rangle_\Gamma\mathrm{d}s=&k_0\left(-\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\int_\Omega\left(g_2(u)u-\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma g_2(u)u\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\int_\Omega g_2(u)u\mathrm{d}x\right)\\\geqslant&-\frac{1}{4}\|\nabla u\|^2-\mathcal{R}^2k_0^2\|g_2'(u)u+g_2(u)\|^2+k_0\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\int_\Omega g_2(u)u\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中$\mathcal{R}=\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}C_0(\Omega,1)$. 其次, 易知

$$\begin{aligned}\int_\Gamma g_1(u)u\mathrm{d}x&=\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\int_\Omega g_1(u)u\mathrm{d}x-\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\int_\Omega\left(g_1(u)u-\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma g_1(u)u\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\\&\geqslant-\frac{1}{4}\|\nabla u\|^2+\int_\Omega\left(\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}g_1(u)u-\mathcal{R}^2(g_1'(u)u+g_1(u))^2\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{14}$$

令

$$\widetilde{H}_1(u)=f(u)u+\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}g_1(u)u+k_0\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}g_2(u)u-\mathcal{R}^2(g_1'(u)u+g_1(u))^2-\mathcal{R}^2k_0^2(g_2'(u)u+g_2(u))^2,$$

根据非线性项平衡条件$(\mathcal{B}_1)$可知$\widetilde{H}_1(u)\geqslant C_1|u|^{p+1}-C_2$, 并且

$$\langle h(t),u\rangle\leqslant\|h(t)\|\cdot\|u\|\leqslant\frac{\lambda_1}{4}\|u\|^2+\frac{\|h(t)\|^2}{\lambda_1}.$$

将以上估计代入式(13), 可得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2+\left\|\eta^t\right\|_{\mu,H_1}^2)+\frac{1}{4}\|\nabla u\|^2+\frac{\delta}{2}\left\|\eta^t\right\|_{\mu,H_1}^2+C_1\int_\Omega|u|^{p+1}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|h(t)\|^2+C_2\,|\Omega|\,.\tag{15}$$

应用 Poincaré 不等式, 可得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)+\frac{\lambda_1}{4}\|u\|^2+\frac{\delta}{2}\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2\leqslant\frac{\|h(t)\|^2}{\lambda_1}+C_3,$$

其中$C_3=C_2|\Omega|$. 取$\alpha=\min\{\frac{\lambda_1}{2},\delta\}$, 有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)+\frac{\alpha}{2}(\|u\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\leqslant\frac{\|h\|^2}{\lambda_1}+C_3\leqslant C(1+\|h(t)\|^2).$$

应用 Gronwall 引理, 可得

$$\frac{1}{2}(\|u(t)\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\leqslant\frac{1}{2}(\|u(\tau)\|^2+\|\eta^\tau\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}+\frac{C}{\alpha}+C\int_\tau^t\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\|h(t)\|^2\mathrm{d}s,$$

并且

$$\begin{aligned}\int_\tau^t\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\|h(t)\|^2\mathrm{d}s&\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\int_{t-1}^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|h(t)\|^2\mathrm{d}s+\int_{t-2}^{t-1}\mathrm{e}^{\alpha s}\|h(t)\|^2\mathrm{d}s+\cdots\right)\\&\leqslant(1+\mathrm{e}^{-\alpha}+\mathrm{e}^{-2\alpha}+\cdots)\sup_{t\in\mathbb{R}}{}^2\int_t^{t+1}\|h(t)\|\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}\|h(t)\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))},\end{aligned}$$

故

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_1}^2\leqslant\frac{1}{2}(\|u(\tau)\|^2+\|\eta^\tau(s)\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}+C.$$

设$\|z(\tau)\|_{\mathcal{E}_1}^2\leqslant R_2$, 则

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_1}^2\leqslant M_0,\ \forall\,t\geqslant T_B+\tau,\tag{16}$$

证毕.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

根据引理 2.1 可得有界吸收集的存在性, 即有如下定理.

定理 2.2 (有界一致吸收集存在定理) 若引理 2.1 的假设成立, 则对于任意有界子集$B\subset\mathcal{E}_1$, 存在$T_B=T(\|B\|_{\mathcal{E}_1})$, 对于所有的$t\geqslant T_B+\tau$且$z_\tau\in B$, 有

$$\|U_h(t,\tau)z_\tau\|\leqslant M_0.$$

2.3 一致吸引子的存在性

为了证明一致吸引子在空间$\mathcal{E}_1$中的存在性, 需要证明以下预备性结果.

引理 2.2 设$z(t)$为问题(5)—(7)在空间$\mathcal{E}_1$中的解. 如果$h\in\mathcal{H}(h_0)$, $h_0\in L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$, 式(3)—(4)成立且非线性项满足式(9)、式(11)、式(12)及平衡条件$(\mathcal{B}_1)$, 那么对于任意的有界子集$B\subset\mathcal{E}_1$, 存在常数$M_1>0$和时刻$T_B^*\geqslant T_B=T(\|B\|_{\mathcal{E}_1})$, 使得

$$\int_t^{t+1}\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s+\int_t^{t+1}\|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\mathrm{d}s\leqslant M_1,\qquad\forall\, t\geqslant T_B^*+\tau. \tag{17}$$

证　明　对式(15)在$[t,\ t+1]$上积分, 并且利用式(16), 可得

$$\begin{aligned}\frac12\int_t^{t+1}\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s+\delta\int_t^{t+1}\|\eta^s\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2\mathrm{d}s+2C_1\int_t^{t+1}\int_\Omega|u|^{p+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s&\\ \leqslant\frac{2\|h(t)\|_{L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))}^2}{\lambda_1}+2C_2|\Omega|+2M_0&\\ =M_1,\ \forall\, t\geqslant T_B^*+\tau,&\end{aligned}$$

故式(17)成立, 证毕.

根据无穷维动力系统一致吸引子的存在性定理 (定理 1.1), 我们还需验证过程族$U_h(t,\tau)$ $(h\in\mathcal{H}(h_0))$在$\mathcal{E}_1$中的渐近紧性.

定理 2.3 设$U_h(t,\tau)$ $(h\in\mathcal{H}(h_0))$为问题(5)—(7)在能量空间$\mathcal{E}_1$中的解生成的过程族. 如果非线性项满足条件(9)—(12)及平衡条件$(\mathcal{B}_1)$, 外力项$h\in\mathcal{H}(h_0)$, $h_0\in L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$, 且式(3)—(4)成立, 那么$U_h(t,\tau)$ $(h\in\mathcal{H}(h_0))$在$\mathcal{E}_1$中渐近紧.

证　明　设$z_1=(u_1,\eta_1^t)$和$z_2=(u_2,\eta_2^t)$为问题(5)—(7)在能量空间$\mathcal{E}_1$中的两个解, 分别满足初值条件$z_{1\tau}=(u_{1\tau},\eta_1^\tau)$和$z_{2\tau}=(u_{2\tau},\eta_2^\tau)$, 初值属于空间$\mathcal{E}_1$对应过程族$U_h(t,\tau)$ $(h\in\mathcal{H}(h_0))$中的一致有界吸收集B_0且$h_i\in\mathcal{H}(h_0)$, $i=1,\,2$.

记$w=u_1-u_2$, $\xi^t=\eta_1^t-\eta_2^t$, $w(t)=\xi_t^t+\xi_s^t$. 则由问题(5)—(7)可得

$$w_t+Aw+\int_0^\infty\mu(s)A\xi^t(s)\mathrm{d}s+f(u_1)-f(u_2)=h_1(t)-h_2(t). \tag{18}$$

相应的边值条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial\gamma}+g_1(u_1)-g_1(u_2)=0,\quad(x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}^+,\\ \dfrac{\partial\xi^t}{\partial\gamma}+g_2(u_1)-g_2(u_2)=0,\quad(x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}^+.\end{cases}$$

相应的初值条件为

$$\begin{cases}w(\tau)=u_{1\tau}-u_{2\tau},\\ \xi^\tau=\eta_1^\tau-\eta_2^\tau.\end{cases}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

在式 (18) 两边同时乘以 $w(t)$, 并在 Ω 中做内积, 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|^2+\|\nabla w\|^2+\int_\Gamma(g_1(u_1)-g_1(u_2))\,w\mathrm{d}x+\int_0^\infty\mu(s)\langle\nabla\xi^t(s),\ \nabla w\rangle\mathrm{d}s\\+\int_0^\infty\mu(s)\int_\Gamma(g_2(u_1)-g_2(u_2))\,w\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\langle f(u_1)-f(u_2),\ w\rangle=\langle h_1(t)-h_2(t),\ w\rangle.\end{aligned}$$

定义泛函: $\widetilde{E}(t)=\frac{1}{2}(\|w\|^2+\|\xi^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_1})$, 故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{E}(t)=&\int_\Omega w(t)w_t(t)\mathrm{d}x+\int_0^\infty\mu(s)\langle\nabla\xi^t_t(s),\nabla\xi^t(s)\rangle\mathrm{d}s\\=&-\|\nabla w\|^2-\int_\Gamma(g_1(u_1)-g_1(u_2))\,w\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\nabla\xi^t(s)|^2\mathrm{d}s\\&-\int_0^\infty\mu(s)\int_\Gamma(g_2(u_1)-g_2(u_2))\,w\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\langle f(u_1)-f(u_2),\ w\rangle+\langle h_1(t)-h_2(t),\ w\rangle.\end{aligned}$$

根据式 (8) 可得

$$-\langle f(u_1)-f(u_2),w\rangle\leqslant l\|w\|^2.$$

类似于式 (14) 的估计并根据式 (11), 可得

$$\begin{aligned}-\int_\Gamma(g_1(u_1)-g_1(u_2))\,w\mathrm{d}x\leqslant&m_1\int_\Gamma|w|^2\mathrm{d}x\\=&-m_1\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\int_\Omega|w|^2\mathrm{d}x+m_1\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\int_\Omega\left||w|^2-\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma|w|^2\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}x\\\leqslant&\frac{1}{4}\|\nabla w\|^2-m_1\int_\Omega\left(\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}|w|^2-4m_1\mathcal{R}^2|w|^2\right)\mathrm{d}x\\\leqslant&\frac{1}{4}\|\nabla w\|^2+\left(4m_1^2\mathcal{R}^2+m_1\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\right)\|w\|^2,\end{aligned}$$

并且

$$-\int_0^\infty\mu(s)\int_\Gamma(g_2(u_1)-g_2(u_2))\,w\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant m_2k_0\int_\Gamma|w|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\|\nabla w\|^2+\left(4m_2^2k_0^2\mathcal{R}^2+m_2k_0\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\right)\|w\|^2.$$

由引理 1.1 可知

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\nabla\xi^t(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant-\frac{\delta}{2}\|\xi^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_1},$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{E}(t)+C_\delta\widetilde{E}(t)\leqslant C^*\|w(t)\|^2+2\int_\Omega(h_1(t)-h_2(t))w(t)\mathrm{d}s,\tag{19}$$

其中常数 $C_\delta=\min\{\delta,\lambda_1\}$, $C^*=2l+8m_1^2\mathcal{R}^2+8m_2^2k_0^2\mathcal{R}^2+2m_1\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}+2m_2k_0\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}$.

对于任意给定的 $T>\tau$, 在式 (19) 两边同时乘以 $\mathrm{e}^{C_\delta t}$ 并在 $[\tau,\ T]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(T)\leqslant&\mathrm{e}^{-C_\delta(T-\tau)}\widetilde{E}(\tau)+C^*\mathrm{e}^{-C_\delta T}\int_\tau^T\mathrm{e}^{C_\delta s}\|w(s)\|^2\mathrm{d}s\\&+2\int_\tau^T\mathrm{e}^{-C_\delta(T-s)}\int_\Omega(h_1(s)-h_2(s))w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{20}$$

对应于引理 1.3, 设

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$
\begin{aligned}
\phi_T(z_1,z_2;h_1,h_2) &= C^*\mathrm{e}^{-C_\delta T}\int_\tau^T \mathrm{e}^{C_\delta s}\|w(s)\|^2\mathrm{d}s + 2\int_\tau^T \mathrm{e}^{-C_\delta(T-s)}\int_\Omega (h_1(s)-h_2(s))w(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&= C^*\mathrm{e}^{-C_\delta T}\int_\tau^T \mathrm{e}^{C_\delta s}\|u_1(s)-u_2(s)\|^2\mathrm{d}s \\
&\quad + 2\int_\tau^T \mathrm{e}^{-C_\delta(T-s)}\int_\Omega (h_1(s)-h_2(s))(u_1(s)-u_2(s))\mathrm{d}x\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

下面将证明定义于 $(\mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_1)\times(\mathcal{H}(h_0)\times\mathcal{H}(h_0))$ 上的函数 $\phi_T(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)$ 为 $B_0\times B_0$ 中的渐近收缩函数, 其中 B_0 为解半群在 $\mathcal{E}_1$ 中的一致有界吸收集.

根据定义 1.1, 对于任意序列 $\{z_n^\tau\}\subset B_0$, 仅需证明存在子列 $\{z_{n_k}^\tau\}_{k=1}^\infty\subset\{z_n^\tau\}_{n=1}^\infty$, 使得 $\lim\limits_{l\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\int_\tau^T\|u_{n_l}(s)-u_{n_m}(s)\|^2\mathrm{d}s=0$, 其中 $u_{n_l}(t)=\Pi_1 U_{h_{n_l}}(t,\tau)z_{n_l}^\tau$, Π_1: $L^2(\Omega)\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathcal{H}_1)\to L^2(\Omega)$ 为投影算子.

因此需证明 $A:=\{u(t)|t\in[\tau,\,T],\ u(t)=\Pi_1 U_h(t,\,\tau)z_\tau,\ z_\tau\in B_0,\ h\in H(h_0)\}$ 在 $L^2([\tau,T];\ L^2(\Omega))$ 中相对紧.

首先, 对式 (15) 在 $[\tau,T]$ 上积分, 并且利用式 (16), 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\tau^T\|\nabla u(s)\|^2\mathrm{d}s+\delta\int_\tau^T\|\eta^s\|^2_{\mu,\mathcal{H}_1}\mathrm{d}s+2C_1\int_\tau^T\int_\Omega|u|^{p+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\qquad\leqslant\frac{2T\|h(t)\|^2_{L^2_b(\mathbb{R};L^2(\Omega))}}{\lambda_1}+2TC_2|\Omega|+C,\qquad t\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

则 A 在 $L^2([\tau,T];\mathcal{H}_1)\cap L^p([\tau,T];L^p(\Omega))$ 中有界.

其次, 利用式 (5), 有 $u_t=\Delta u+\int_0^\infty\mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s-f(u)+h(x,t)$, 显然, $\Delta u\in L^2([\tau,T];H^{-1})$ 且 $h\in L^2([\tau,T];L^2(\Omega))$.

利用条件 (10), $f(u)\in L^{\frac{p+1}{p}}([\tau,T];L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega))$, 由于 $L^q(\Omega)\hookrightarrow H^{-\gamma}(\Omega)$, 故 $f(u)\in L^q([\tau,T];H^{-\gamma}(\Omega))$, 其中 q 为 $p+1$ 的对偶数, 且 $p+1\geqslant 2$, $q>1$, $\gamma>1$.

最后, 对于任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$, 有

$$
\int_0^\infty\mu(s)\langle\Delta\eta^t(s),v(t)\rangle\mathrm{d}s\leqslant\int_0^\infty\mu(s)\|\nabla\eta^t(s)\|\cdot\|\nabla v(t)\|\mathrm{d}s+k_0\int_\Gamma g_2(u)v\mathrm{d}x,
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty\mu(s)\|\nabla\eta^t(s)\|\cdot\|\nabla v(t)\|\mathrm{d}s&\leqslant\left(\int_0^\infty\mu(s)\|\nabla\eta^t(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty\mu(s)\|\nabla v(t)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant k_0^{1/2}\|\nabla v\|\left(\int_0^\infty\mu(s)\|\nabla\eta^t(t)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

并且, 利用式 (11) 及引理 1.2 可得

$$
\begin{aligned}
k_0\int_\Gamma g_2(u)v\mathrm{d}x&\leqslant k_0\left(\int_\Gamma|g_2(u)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Gamma|v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant k_0C\left(\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\int_\Omega\left||v|^2-\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma|v|^2\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}x+\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\int_\Omega|v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant k_0C\left(R\|\nabla v\|^2+\frac{|\Gamma|}{|\Omega|}\|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

利用式 (16), 易知 $\int_0^\infty\mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s\in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^+;H^{-1})$.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

因此, $\partial_t A$ 在 $L^q([\tau,T];H^{-\gamma})$ 中有界. 显然, A 在 $L^2([\tau,T];L^2(\Omega))$ 中相对紧, 即式 (20) 成立.

利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega(h_{n_l}(s)-h_{n_m}(s))(u_{n_l}(s)-u_{n_m}(s))\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leqslant\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\int_\tau^T\int_\Omega|h_{n_l}(s)-h_{n_m}(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\left(\int_\tau^T\int_\Omega|u_{n_l}(s)-u_{n_m}(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\\
&\leqslant 2T\|h_0\|^2_{L_b^2(\mathbb{R};L(\Omega))}\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(\int_\tau^T\int_\Omega|u_{n_l}(s)-u_{n_m}(s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)^{\frac12}\\
&=0.
\end{aligned}$$

所以, 根据引理 1.3 和定理 2.1 可知, $\{U_h(t,\tau)\}$ $(h\in\mathcal{H}(h_0))$ 在 $\mathcal{E}_1$ 中一致渐近紧.

引理 2.3[18] 设 X 是自反的 Banach 空间, $x_n\rightharpoonup 0$, 且 $0\in X$, 则对于每一个紧 (在 X^* 中) 子集 $B\subset X^*$, 一致收敛成立: 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在仅依赖 ε 的常数 N_ε, 使得对于任意的 $n\geqslant N_\varepsilon$, $f\in B$, 有 $|\langle f,x_n\rangle_{X^*}|\leqslant\varepsilon$.

引理 1.3 表明与方程 (1) 相对应的过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ $(\sigma\in\Sigma)$ 具有紧的 (在 X 中) 一致 $(\sigma\in\Sigma)$ 吸收集, 且在 X 中有界, 因此, 我们得到紧的一致 $(\sigma\in\Sigma)$ 吸引子 $\mathcal{A}$ 的存在性, $\mathcal{A}\subset X$.

为了得到一致吸引子的结构, 我们还需验证以下解过程的弱连续性.

设 $z_n=(u_n,\eta_n^t)$ $(n=1,\ 2)$ 为方程 (5) 满足初值条件 $z_{n\tau}=(u_{n\tau},\eta_n^\tau)$ 的两个解. 设时间依赖外力项 $h_n\in\Sigma$, $z(t)$ 为方程 (5) 具有初值 $z_\tau\in\mathcal{A}$ 的解, 时间依赖外力项 $h\in\Sigma$, 我们假设:

$$z_{n\tau}\to z_\tau,\ z\in X,\ h_n\to h,\ h\in L^{2,w}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega)).\tag{21}$$

由于方程 (5) 在 $L^q([\tau,T];H^{-\gamma}(\Omega))$ (q 是式 (9) 中 p 的共轭) 中成立, 则对任意固定的 $T(>\tau)$, 有 $u_n\rightharpoonup u$, $u\in L^2([\tau,T];H_0^1(\Omega))$, 其中 $u=\Pi_1U_h(t,\tau)z_\tau\in L^2([\tau,t];L^2(\Omega))$, Π_1 是 $X\times\Sigma$ 到 X 的映射. 因为 $\mathcal{A}$ 在 X 中是有界的, 由定理 2.2 可知, 存在 M 使得

$$\sup_{h\in\Sigma}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\sup_{t\geqslant\tau}\|U_h(t,\tau)\mathcal{A}\|_X^2\leqslant M<\infty,$$

因此

$$\bigcup_{h\in\Sigma}\{\Pi_1U_h(t,\tau)z_\tau|t\in[\tau,T],z_\tau\in\mathcal{A}\}$$

在 $L^2([\tau,T];H_0^1(\Omega))$ 中有界,

$$\bigcup_{h\in\Sigma}\{\partial_t\Pi_1U_h(t,\tau)z_\tau|t\in[\tau,T],z_\tau\in\mathcal{A}\}$$

在 $L^2([\tau,T];H^{-\gamma}(\Omega))$ 中有界.

由紧性引理 (引理 1.4) 可知 $\bigcup\limits_{h\in\Sigma}\{\Pi_1U_h(t,\tau)z_\tau|t\in[\tau,T],z_\tau\in\mathcal{A}\}$ 在 $L^2([\tau,T];L^2(\Omega))$ 中紧, 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega|u_n(s)-u(s)|^2\mathrm{d}s=0.\tag{22}$$

定义 $\omega(t)=u_n(t)-u(t)$, $\xi^t=\eta_n^t-\eta^t$, $\omega_\tau=u_{n\tau}(t)-u_\tau$, $z_n(t)=(u_n(t),\eta_n^t)=U_{h_n}(t,\tau)z_{n\tau}-U_h(t,\tau)z_\tau$, $z_{n\tau}$, $z_\tau\in\mathcal{A}$, $n=1,2$, 下列不等式的证明类似于式 (20) 的证明:

$$\widetilde{E}(t)\leqslant\mathrm{e}^{-C_\delta(t-\tau)}\|w_\tau\|^2+C^*\int_\tau^t|u_n(s)-u(s)|^2\mathrm{d}s+2\int_\tau^t\int_\Omega(h_n(s)-h(s))(u_n(s)-u(s))\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由式 (21) 和式 (22) 可知, 我们只需证明在 $L^{2,w}_{\text{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 中当 $h_n\to h$ 时,

$$\left|\int_\tau^t\langle h_n(x,s)-h(x,s),\omega(x,s)\rangle\mathrm{d}s\right|\to 0,$$

$\bigcup\limits_{h\in\Sigma}\{\Pi_1U_h(t,\tau)z_\tau\,|\,t\in[\tau,T],z_\tau\in\mathcal{A}\}$ 是 $L^2([\tau,t];L^2(\Omega))$ 上的一致紧子集, 但这直接应用了引理 2.3, 因此我们完成了过程族 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ $(\sigma\in\Sigma)$ 为 $(X\times\Sigma,X)$-弱连续的证明.

根据引理 1.2、定理 2.2 和定理 2.3, 可以得到本文的主要结果.

定理 2.4　设 $\{U_h(t,\tau)|\,h\in\mathcal{H}(h_0)\}$ 为问题 (5)—(7) 在能量空间 $\mathcal{E}_1$ 的解生成的过程族. 如果定理 2.3 的假设成立, 则过程族 $\{U_h(t,\tau)|\,h\in\mathcal{H}(h_0)\}$ 在空间 $\mathcal{E}_1$ 中拥有紧的一致吸引子 $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(h_0)}$. 进一步, 有

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}(h_0)}=\bigcup_{h\in\mathcal{H}(h_0)}\mathcal{K}_h(\tau),$$

其中 $\mathcal{K}_h(\tau)$ 为过程族 $\{U_h(t,\tau)|\,h\in\mathcal{H}(h_0)\}$ 的核 $\mathcal{K}_h$ 在 $t=\tau$ 时刻的核截片.

[参 考 文 献]

[1] DAFERMOS C M. Asymptotic stability in viscoelasticity [J]. Archive Rational Mechanics Analysis, 1970, 37(4): 297-308. DOI: 10.1007/BF00251609.

[2] YANG L. Uniform attractors for the closed process and application to the reaction-diffusion equation with dynamical boundary condition [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71: 4012-4025. DOI: 10.1016/j.na.2009.02.083.

[3] YANG L. Asymptotic regularity and attractors of the reaction-diffusion equation with nonlinear boundary condition [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13(3): 1069-1079. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2011.02.024.

[4] YANG L, YANG M H. Attractors of the non-autonomous reaction-diffusion equation with nonlinear boundary condition [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(5): 3946-3954. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2010.03.002.

[5] ZHONG C K, YANG M H, SUN C Y. The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations [J]. Journal of Differential Equations, 2006, 223: 367-399. DOI: 10.1016/j.jde.2005.06.008.

[6] SUN C Y, WANG S H, ZHONG C K. Global attractors for a nonclassical diffusion equation [J]. Acta Math Sin(Engl Ser), 2007, 23: 1271-1280. DOI: 10.1007/s10114-005-0909-6.

[7] SUN C Y, YANG M H. Dynamics of the nonclassical diffusion equation [J]. Asymptot Anal, 2008, 59: 51-81. DOI: 10.3233/ASY-2008-0886.

[8] SONG H T, MA S, ZHONG C K. Attractors of non-autonomous reaction-diffusion equations [J]. Nonlinearity, 2009, 22: 667-681. DOI: 10.1088/0951-7715/22/3/008.

[9] CHEPYZHOV V V, MIRANVILLE A. On trajectory and global attractors for semilinear heat equations with fading memory [J]. Indiana University Mathematics Journal, 2006, 55(1): 119-168. DOI: 10.1512/iumj.2006.55.2597.

[10] GIORGI C, PATA V. Asymptotic behavior of a nonlinear hyperbolic heat equation with memory [J]. Nonlinear Differential Equations Applications Nodea, 2001, 8(2): 157-171. DOI: 10.1007/PL00001443.

[11] 汪璇, 朱宗伟, 马巧珍. 带衰退记忆的经典反应扩散方程的全局吸引子 [J]. 数学年刊(中文版), 2014, 35(4): 423-434.

[12] PATA V, SQUASSINA M. On the strongly damped wave equation [J]. Communications in Mathematical Physics, 2005, 253(3): 511-533. DOI: 10.1007/s00220-004-1233-1.

[13] PATA V, ZUCCHI A. Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory [J]. Advances in Mathematical Sciences and Applications, 2001, 11(2): 505-529.

[14] RODRÍGUEZ-BERNAL A, TAJDINE A. Nonlinear balance for reaction diffusion equations under nonlinear boundary conditions: Dissipativity and blow-up [J]. Journal of Differential Equations, 2001, 169(2): 332-372. DOI: 10.1006/jdeq.2000.3903.

[15] SUN C Y, CAO D M, DUAN J Q. Non-autonomous dynamics of wave equations with nonlinear damping and critical nonlinearity [J]. Nonlinearity, 2006, 19(11): 2645-2665. DOI: 10.1088/0951-7715/19/11/008.

[16] XIE Y Q, LI Y A, ZENG Y. Uniform attractors for nonclassical diffusion equations with memory[J]. Journal of Function Spaces, 2016 (3/4): 1-11.

[17] CHEPYZHOV V V, VISHIK M I. Attractors for Equations of Mathematical Physics [M]. Providence, RI: Amer Math Soc, 2001.

[18] SUN C, CAO D, DUAN J. Uniform attractors for non-autonomous wave equations with nonlinear damping [J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2007, 6(2): 293-318. DOI: 10.1137/060663805.

(责任编辑: 林　磊)

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net