

一类非线性弹性杆波动方程的求解^{*}

郭 鹏¹, 张 磊¹, 吕克璞², 段文山²

(1. 兰州交通大学 数理与软件工程学院, 兰州 730070;

2. 西北师范大学 物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(戴世强推荐)

摘要: 对计入横向惯性效应后的非线性弹性杆纵向波动方程进行了分析, 得到了一类非线性波动方程, 并用完全近似方法求出了该方程的近似解析解.

关键词: 非线性弹性杆; 完全近似法; KdV 方程; 组合 KdV 方程和 mKdV 方程

中图分类号: O357.1 **文献标识码:** A

引 言

在固体结构中, 非线性因素来源于诸多方面, 如物理非线性、几何非线性、运动非线性和边界约束条件非线性等. 这些非线性与耗散和弥散效应相互作用时就可能导致冲击波、孤立波的出现. 在非线形波动问题中, 对非线性演化方程的定性分析和求解占有很重要的地位. 近年来, 对于非线性演化方程, 也发展了许多求解方法. 本文针对计入横向惯性效应后的非线性弹性杆纵向波动方程进行了分析, 得到了一类非线性波动方程, 并用完全近似方法求出了该方程的近似解析解.

1 运动方程

考虑一无限长、均匀的等截面圆杆, 半径为 R . 采用 Lagrange 物质描述, 并采用柱坐标系 (r, θ, x) , 其中 x 沿杆的轴向, r 和 θ 分别为径向和环向坐标. 假定杆承受轴向拉伸突加荷载, 平截面假设仍然成立, 并在推导运动方程的过程中作出如下基本假设:

1) 受载过程中无限长杆处于单轴应力状态, 即 $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$;

2) 变形计入横向惯性影响, 即考虑 $\epsilon_r = -\nu\epsilon_x = -\nu\partial u/\partial x$, 利用几何方程容易得到 $u_r = r\epsilon_r = -\nu r\partial u/\partial x$, 其中 ν 为 Poisson 比, ϵ_r, ϵ_x 分别为径向和轴向应变, u_r, u 为径向和纵向位移;

3) 材料服从非线性弹性的本构方程

$$\sigma_x = E\epsilon_x + E\sum_{i=2}^n \alpha_i \epsilon_x^i,$$

式中第 1 项表示线性弹性力, 其余项表示非线性弹性力, E 为材料的弹性模量, α_i 与 n 均为材

* 收稿日期: 2007-03-14; 修订日期: 2007-12-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10575082)

作者简介: 郭鹏(1978—), 男, 陕西富平人(联系人. Tel: +86-931-3678321; E-mail: guopeng_gp@126.com).

料常数. 其中, $\sum_{i=2}^3 \alpha_i \epsilon_x^i < 0$ 为软非线性材料, 多数金属都属于于此; $\sum_{i=2}^3 \alpha_i \epsilon_x^i > 0$ 为硬非线性材料, 橡胶、聚合物和少数金属材料符合这种本构关系.

可以得到计入横向惯性效应后非线性弹性杆的纵波运动方程^[1-5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left[1 + \sum_{i=2}^n i \alpha_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{i-1} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} v^2 R^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \quad (1)$$

其中 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$, ρ 为材料密度, c_0 是线性纵波波速.

令

$$u = 0.1 u', \quad \epsilon = 0.01, \quad \beta' = v^2 R^2 / 2, \quad \gamma = i \alpha_i (0.1)^{i-3}, \quad i = 3, 4, 5, \dots, n. \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式, 可得

$$u'_t - c_0^2 \left[1 + 2 \alpha_2 \epsilon u'_x u'_{xx} + \sum_{i=3}^n \gamma \epsilon (u'_x)^{i-1} \right] u'_{xx} - \beta' u'_{txx} = 0. \quad (3)$$

做变换

$$z = x - c_0 t, \quad \tau = \gamma t. \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式, 可得

$$c_0^2 u'_{zz} - 2 \gamma c_0 u'_{z\tau} + \gamma^2 u'_{\tau\tau} - 2 \alpha_2 c_0^2 u'_z u'_{zz} - c_0^2 \left[1 + \sum_{i=3}^n \gamma \epsilon (u'_z)^{i-1} \right] u'_{zz} - \beta' (c_0^2 u'_{zzzz} - 2 \gamma c_0 u'_{zzz\tau} + \gamma^2 u'_{zz\tau\tau}) = 0. \quad (5)$$

考虑 $\gamma^2 \ll 1$, (5)式可写为

$$2 \gamma c_0 u'_{z\tau} + 2 \alpha_2 c_0^2 u'_z u'_{zz} + c_0^2 \sum_{i=3}^n \gamma \epsilon (u'_z)^{i-1} u'_{zz} + \beta' c_0^2 u'_{zzzz} = 0. \quad (6)$$

若仍令

$$u = u_z, \quad x = \frac{2}{c_0} z, \quad t = \tau.$$

(6)式可化为

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} + \epsilon \sum_{i=2}^n u^i u_x = 0 \quad (\alpha, \beta \neq 0, 0 \leq \epsilon \ll 1), \quad (7)$$

其中 $\alpha = \frac{2 \alpha_2}{\gamma}, \quad \beta = \frac{4 \beta'}{\gamma c_0^2}.$

这是一个非线性方程, 本文采用完全近似法^[6-8]求解该方程的近似解析解.

2 方程的求解

令

$$u = \omega(\varphi), \quad \varphi = \sqrt{\lambda/\beta}(x - \lambda t), \quad v(0) = 1. \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式可得

$$-\lambda v_\varphi + \alpha \omega v_\varphi + \lambda v_{\varphi\varphi\varphi} + \epsilon \sum_{i=2}^n (\omega)^i v_\varphi = 0. \quad (9)$$

设 $\lambda = \frac{\alpha \alpha}{3} + \epsilon \lambda_1 + O(\epsilon^2).$ (10)

则(9)式化为

$$v_{\varphi\varphi\varphi} - v_\varphi + 3 v v_\varphi + \epsilon \left[\frac{3 \lambda_1}{\alpha \alpha} v_{\varphi\varphi\varphi} - \frac{3 \lambda_1}{\alpha \alpha} v_\varphi + \frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n (\alpha)^{i-1} v^i v_\varphi \right] + O(\epsilon^2) = 0. \quad (11)$$

做变换

$$\begin{cases} v = v(\xi) + O(\epsilon^2), \\ \xi = \varphi + \epsilon F(\xi) + O(\epsilon^2), \quad F(0) = 0, \\ \frac{dF(\infty)}{d\varphi} < \infty, \quad \frac{d^2F(\infty)}{d\varphi^2} < \infty. \end{cases} \quad (12)$$

将此变换代入(11)式有

$$v^{\xi\xi\xi} - v_\xi + 3v v_\xi + \left[v_\xi F^{\xi\xi\xi} + 3v v_\xi F^{\xi\xi} + (3v^{\xi\xi\xi} - v_\xi + 3v v_\xi) F_\xi + \frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n (a)^{i-1} v v_\xi + \frac{3\lambda_1}{\alpha a} (v^{\xi\xi\xi} - v_\xi) \right] + O(\epsilon^2) = 0. \quad (13)$$

从(13)式中,我们可以得到 ϵ^0 、 ϵ^1 级近似方程为

$$v^{\xi\xi\xi} - v_\xi + 3v v_\xi = 0, \quad (14)$$

$$v_\xi F^{\xi\xi\xi} + 3v v_\xi F^{\xi\xi} + (3v^{\xi\xi\xi} - v_\xi + 3v v_\xi) F_\xi = -\frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n (a)^{i-1} v v_\xi - \frac{3\lambda_1}{\alpha a} (v^{\xi\xi\xi} - v_\xi). \quad (15)$$

为便于观察,令 $v_\xi = v'$, 以上两式简写为

$$v''' + 3v v' - v' = 0, \quad (16)$$

$$v' F^{\xi\xi\xi} + 3v'' F^{\xi\xi} + (3v''' - v' + 3v v') F_\xi = -\frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n (a)^{i-1} v v' - \frac{3\lambda_1}{\alpha a} (v''' - v'). \quad (17)$$

利用(16)式,(17)式化为

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{v'} \frac{d}{d\xi} \left(v'^2 \frac{dF}{d\xi} \right) \right] = -\frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n (a)^{i-1} v v' + \frac{9\lambda_1}{\alpha a} v v'. \quad (18)$$

对(18)式积分1次,取积分常数为0,得

$$\frac{d}{d\xi} \left(v'^2 \frac{dF}{d\xi} \right) = -\frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n \frac{(a)^{i-1}}{(i+1)} (v)^{i+1} v' + \frac{9\lambda_1}{2\alpha a} v^2 v'. \quad (19)$$

对(19)式两端再积分1次,取积分常数为0,得

$$v'^2 \frac{dF}{d\xi} = -\frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n \frac{(a)^{i-1}}{(i+1)(i+2)} (v)^{i+2} + \frac{3\lambda_1}{2\alpha a} v^3. \quad (20)$$

因为(16)式有 KdV 孤立波解

$$v = \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{2}, \quad (21)$$

即有 $v'^2 = v^2 - v^3$. (22)

当 $v = 1$ 时,(20)式可变为

$$\frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n \frac{(a)^{i-1}}{(i+1)(i+2)} = \frac{3\lambda_1}{2\alpha a}, \quad (23)$$

从而解出

$$\lambda_1 = 2 \sum_{i=2}^n \frac{(a)^i}{(i+1)(i+2)}. \quad (24)$$

将(22)~(24)式代入(20)式可得

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n \frac{(a)^{i-1}}{(i+1)(i+2)} \frac{(v^3 - v^{i+2})}{(v^2 - v^3)} =$$

$$\frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n \frac{(a)^{i-1} v}{(i+1)(i+2)} (1+v+v^2+\dots+v^{i-2}). \tag{25}$$

上式对 ξ 积分有

$$F = \frac{3}{\alpha} \sum_{i=2}^n \frac{(a)^{i-1}}{(i+1)(i+2)} \int_0^\xi v(1+v+v^2+\dots+v^{i-2}) d\xi. \tag{26}$$

3 讨 论

当 $\epsilon = 0$ 时, 方程(7)退化为一般形式的 KdV 方程

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0. \tag{27}$$

该方程有解

$$u = a \operatorname{sech}^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \sqrt{\lambda/\beta}(x - \lambda t), \quad \lambda = \frac{\alpha a}{3}. \tag{28}$$

当 $n = 2$ 时, 方程(7)即为组合 KdV 与 mKdV 方程

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \epsilon u^2 u_x = 0. \tag{29}$$

可以解得

$$F = \frac{a}{4\alpha} \int_0^\xi v d\xi = \frac{a}{2\alpha} \tanh \frac{\xi}{2}. \tag{30}$$

利用

$$u = \omega(\xi) + O(\epsilon^2) = \omega \left\{ \varphi + \epsilon F[\varphi + \epsilon F(\xi) + O(\epsilon^2)] + O(\epsilon^2) \right\} + O(\epsilon^2) = \omega(\varphi) + a\epsilon \omega'(\varphi) F(\varphi) + O(\epsilon^2), \tag{31}$$

最后可得到

$$\begin{cases} u = a \operatorname{sech}^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{a^2 \epsilon}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \frac{\varphi}{2} \tanh^2 \frac{\varphi}{2} + O(\epsilon^2), \\ \varphi = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}(x - \lambda t), \quad \lambda = \frac{\alpha a}{3} + \frac{a^2 \epsilon}{6}. \end{cases} \tag{32}$$

已知(29)式有解析解

$$\begin{cases} u = \frac{a \operatorname{sech}^2(\varphi/2)}{1 + [a\epsilon/(2\alpha + a\epsilon)] \tanh^2(\varphi/2)}, \\ \varphi = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}(x - \lambda t), \quad \lambda = \frac{\alpha a}{3} + \frac{a^2 \epsilon}{6}. \end{cases} \tag{33}$$

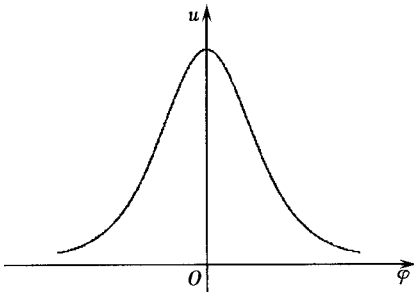


图 1 钟型孤波

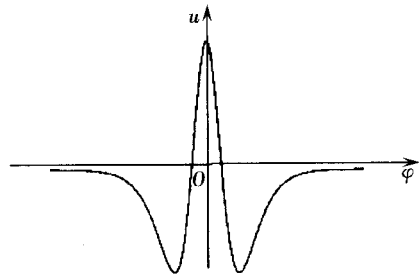


图 2 振荡型孤波

可以验证, (32)式给出的解正是(33)式中 u 的二阶渐近展开式. 对于(29)式, 韩强进行了数值分析^[1], 发现了钟状和振荡型两种孤波 (如图 1、图 2 所示).

当 $n = 3$ 时, 方程(7)即为如下形式:

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \epsilon(u^2 u_x + u^3 u_x) = 0. \quad (34)$$

可以解得

$$F = \left[\frac{\alpha}{2\alpha} + \frac{3\alpha^2}{10\alpha} \right] \tanh \frac{\varphi}{2} - \frac{\alpha^2}{10\alpha} \tanh^3 \frac{\varphi}{2}. \quad (35)$$

同样利用(31)式可得

$$\begin{cases} u = a \operatorname{sech}^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{\alpha^2 \epsilon}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \frac{\varphi}{2} \left[\left[\frac{\alpha}{2\alpha} + \frac{3\alpha^2}{10\alpha} \right] \tanh \frac{\varphi}{2} - \frac{\alpha^2}{10\alpha} \tanh^3 \frac{\varphi}{2} \right] + O(\epsilon^2), \\ \varphi = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} (x - \lambda t), \quad \lambda = \frac{\alpha a}{3} + \epsilon \left[\frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^3}{10} \right]. \end{cases} \quad (36)$$

同理, 对于 n 取其它值时都可用同样的方法进行求解.

[参 考 文 献]

- [1] HAN Qiang, DAI Li-ming, DONG Ming-zhe. Solitary wave in a nonlinear elastic structural element of large deflection[J]. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2005, **10**(6): 607-616.
- [2] 庄蔚, 张善元. 非线性弹性杆中的应变孤波[J]. *力学学报*, 1988, **20**(1): 58-67.
- [3] 庄蔚, 杨桂通. 孤波在非线性杆中的传播[J]. *应用数学和力学*, 1986, **7**(7): 571-581.
- [4] DUAN Wen-shan, ZHAO Jing-bao. Solitary waves in a quadratic nonlinear elastic rod[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2000, **11**(8): 1265-1267.
- [5] 吕克璞, 郭鹏, 张磊, 等. 非线性弹性杆波动方程的摄动分析[J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(9): 1079-1083.
- [6] 戴世强, Sigalov G F, Diogenov A V. 若干强非线性问题的近似解析解[J]. *中国科学, A 辑*, 1990, **33**(2): 153-162.
- [7] 戴世强. 完全近似法的推广及其应用[J]. *应用数学和力学*, 1991, **12**(3): 237-244.
- [8] 周明儒, 张宝善. 修正的完全近似法的改进形式及其应用[J]. *应用数学*, 1995, **8**(3): 317-321.

Solution of a Nonlinear Wave Equation of Elastic Rod

GUO Peng¹, ZHANG Lei¹, LÜ Ke-pu², DUAN Wen-shan²

(1. School of Mathematics, Physics and Software Engineering,

Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, P. R. China;

2. College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University,

Lanzhou 730070, P. R. China)

Abstract: The longitudinal oscillation of a nonlinear elastic rod with lateral inertia were studied. A nonlinear wave equation is derived. The equation is solved by the method of full approximation.

Key words: nonlinear elastic rod; method of full approximation; KdV equation; the combined KdV and mKdV equation