DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2008.01.001
第20卷 第1期 2008年3月
甘肃科学学报 Journal of Gansu Sciences
Vol.20 No.1 Mar.2008

一类常微分方程有界变差解对参数的连续依赖性

梁雪峰,李宝麟
(西北师范大学 数学与信息科学学院,甘肃 兰州 730070)

摘 要: 在很弱的假设条件下,利用 Kurzweil 积分讨论一类常微分方程与 Kurzweil 广义常微分方程的关系,在此基础上,建立了此类常微方程有界变差解对参数的连续依赖性定理.

关键词: Kurzwil 广义常微分方程;有界变差解;连续依赖性
中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A **文章编号:**1004-0366(2008)01-0001-05

Continuous Dependence on a Parameter of Bounded Variation Solutions for a Class of Ordinary Differential Equations

LIANG Xue-feng,LI Bao-lin
(*College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: The relation between a class of ordinary differential equations and Kurzweil generalized ordinary differential equations is discussed on weak conditions by using Kurzweil integral, and the theorem of continuous dependence on a parameter of bounded variation solutions for the class of ordinary differential equations is established.

Key words: Kurzwel generalized ordinary differential equation; bounded variation solution; continuous dependence

Kurzweil 广义常微分方程理论处理常微方程解对参数的连续依赖性有着重要作用[1~3].考虑常微分方程

$$x'=f(x,t), \tag{1}$$

文献[4]在 f 满足 Caratheodory 条件下讨论了方程(1)的解对参数的连续依赖性.文献[5]利用 Henstock 积分,在 f 满足某种不连续性时,建立了方程(1)连续有界变差解的存在唯一性定理.下面首先讨论这类常微分方程与 Kurzweil 广义常微分方程的关系,在此基础上建立此类常微方程有界变差解对参数的连续依赖性定理.

1 预备知识

定义 1[4,6,7] 称函数 $U:[a,b]\times[a,b]\to R^n$ 在$[a,b]$上 Kurzweil 可积,如果存在 $A\in R^n$,使得对任意 $\varepsilon>0$,存在正值函数 $\delta:[a,b]\to(0,+\infty)$,使对$[a,b]$的任何 $\delta(\tau)$-精细分划

$$D=\{(\tau_j,[\alpha_{j-1},\alpha_j]),j=1,2,\cdots,k\},$$

其中 $\tau_j\in[\alpha_{j-1},\alpha_j]\subset[\tau_j-\delta(\tau_j),\tau_j+\delta(\tau_j)]$,有

$$\|S(U,D)-A\|=\|\sum_{j=1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})]-A\|<\varepsilon,$$

称 A 为 U 在$[a,b]$上的 Kurzweil 积分,记作 $A=\int_a^b DU(\tau,t)$.如果$\int_a^b DU(\tau,t)$ 存在,那么定义

收稿日期:2007-06-29
基金项目:国家自然科学基金(10771171);甘肃"555创新人才工程";西北师范大学科技创新工程(NWNU-KJCXGC-212).

$$\int_b^a DU(\tau,t) = -\int_a^b DU(\tau,t),$$

且规定：$a = b$ 时，$\int_a^b DU(\tau,t) = 0$. 如果 $U(\tau,t) = f(\tau)\cdot t$，则记

$$\int_a^b D(f(\tau)\cdot t) = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s,$$

对应的积分和为

$$S(U,D) = \sum_{j=1}^{k} f(\tau_i)(\alpha_j - \alpha_{j-1}).$$

定义 2[4,6,7] 设 $G \subset \mathrm{R}^n \times R$ 为开集，函数 $F: G \to \mathrm{R}^n$，称函数 $x: [\alpha,\beta] \to \mathrm{R}^n$ 为 Kurzweil 方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x,t), \tag{2}$$

在区间$[\alpha,\beta]$上的一个解：如果对所有 $\mathrm{t} \in [\alpha,\beta]$，$(\mathrm{x}(\mathrm{t}),\mathrm{t}) \in \mathrm{G}$，有

$$x(x_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t), s_1, s_2 \in [\alpha,\beta]$$

成立. 其中，右端积分是指函数 $U(\tau,t) = F(x(\tau),t)$ 在$[\mathrm{s}_1, s_2]$上的 Kurzweil 积分.

令 $G \subset \mathrm{R}^{n+1}$ 为开集，

$$(x_0,t_0) \in \mathrm{G}, \tilde{\mathrm{G}} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n; \| x - x_0 \| < \Delta\} \times \{t \in \mathrm{R}; | \mathrm{t} - \mathrm{t}_0 | < \Delta\},$$

记

$$B = \{x \in \mathrm{R}^n; \| x - x_0 \| < \Delta\}, I = \{t \in \mathrm{R}; | \mathrm{t} - \mathrm{t}_0 | < \Delta\}.$$

$\bar{\mathrm{B}}$ 表示 B 的闭包.

设 $h: \bar{\mathrm{I}} \to \mathrm{R}$ 是定义于 $\bar{\mathrm{I}}$ 上的不减左连续函数，$\omega: [0, +\infty] \to \mathrm{R}$ 是连续增函数，满足 $\omega(0) = 0$.

定义 3[4,7] 称函数 $F: G \to \mathrm{R}^n$ 属于 $\hat{\mathrm{F}}(\mathrm{G},\mathrm{h},\omega)$，如果对 $\forall(\mathrm{x}_0,t_0) \in \mathrm{G}$，存在 $\Delta > 0$，使 F 在 $\tilde{\mathrm{G}} \subset \mathrm{G}$ 上满足下列条件：

(1) 对所有(x,t_1)，$(x,t_2) \in \tilde{\mathrm{G}}$，有

$$\| F(x,t_2) - F(x,t_1) \| \leqslant | \mathrm{h}(\mathrm{t}_2) - h(t_1) |.$$

(2) 对所有(x,t_1)，(x,t_2)，(y,t_1)，$(y,t_2) \in \tilde{\mathrm{G}}$，有

$$\| F(x,t_2) - F(x,t_1) - F(y,t_2) + F(y,t_1) \| \leqslant \omega(\| x - y \|) | h(t_2) - h(t_1) |.$$

引理 4[5,8,9] 如果 $f \in \mathrm{V}(\mathrm{G},\mathrm{h},\omega)$，且$(\mathrm{x}_0,t_0) \in \mathrm{G}$，则存在 $\Delta^-, \Delta^+ > 0$，使方程(1)在区间$[\mathrm{t}_0 - \Delta^-, t_0 + \Delta^+]$上存在满足 $\mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = x_0$ 的连续有界变差解 $x(t)$.

注 1 引理 4 中的函数空间 $V(G,h,\omega)$ 见文献[5].

定义 5 设 $f: G \to 1$ 为 Garatheodory 函数，称 $f \in \hat{\mathrm{V}}(\mathrm{G},\mathrm{h},\omega)$，如果 $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ 满足下列条件：

(1) 存在正值函数 $\delta: \bar{\mathrm{I}} \to (0, +\infty)$，对每个区间$[\mathrm{u},\mathrm{v}]$，满足

$$\tau \in [\mathrm{u},\mathrm{v}] \subset [\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)] \subset \mathrm{I}$$

及 $x \in \bar{\mathrm{B}}$，有

$$\| f(x,\tau)(v - u) \| \leqslant | \mathrm{h}(\mathrm{v}) - \mathrm{h}(\mathrm{u}) |.$$

(2) 对每个区间$[\mathrm{u},\mathrm{v}]$，满足 $\tau \in [\mathrm{u},\mathrm{v}] \subset [\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)] \subset \mathrm{I}$ 及 $\mathrm{x} \in \bar{\mathrm{B}}$，有

$$\| f(x,\tau) - f(y,\tau) \| (v - u) \leqslant \omega(\| x - y \|) | h(v) - h(u) |.$$

(3) 对 $\forall \mathrm{t}_1, t_2 \in \mathrm{I}$，$(\mathrm{x}(\mathrm{s}),\mathrm{s}) \in \tilde{\mathrm{G}}$，Kurzweil 积分$\int_{t_1}^{t_2} f(x(s),s)\mathrm{d}s$ 存在.

注 2 定义 5 中函数空间 $\hat{\mathrm{V}}(\mathrm{G},\mathrm{h},\omega)$ 满足的条件(3)比文献[5,8,9]中函数空间 $\mathrm{V}(\mathrm{G},\mathrm{h},\omega)$ 满足的相应条件强，因此引理 4 在函数空间 $\hat{\mathrm{V}}(\mathrm{G},\mathrm{h},\omega)$ 中仍然成立.

2 主要结果

引理 6 设函数 $f: G \to \mathrm{R}^n$ 属于 $\hat{\mathrm{V}}(\mathrm{G},\mathrm{h},\omega)$，$\mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = x_0$，则对任意 $x, y \in \bar{\mathrm{B}}$，$\mathrm{t}_1, t_2 \in \bar{\mathrm{I}}$，有

$$\| F(x,t_2) - F(x,t_1) \| \leqslant | \mathrm{h}(\mathrm{t}_2) - h(t_1) |,$$

$$\| F(x,t_2)-F(x,t_1)-F(y,t_2)+F(y,t_1)\| \leqslant \omega(\| x-y\|)\,|h(t_2)-h(t_1)|.$$

即 $F\in \widehat{\mathrm{F}}(G,h,\omega)$，其中

$$F(x,t)=\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\mathrm{d}s,\ t_0,t\in \mathrm{I}.$$

证明　因为 $f\in \widehat{\mathrm{V}}(G,h,\omega)$，任取 $t_1,t_2\in \mathrm{I}$，不妨设 $t_1<t_2$，则对 $\forall\varepsilon>0$ 及区间 $[t_1,t_2]$ 的任何 $\delta-$精细分划 $\{(\tau_j,[\alpha_{j-1},\alpha_j]),\ j=1,2,\cdots,m\}$，其中

$$\tau_j\in[\alpha_{j-1},\alpha_j]\subset[\tau_j-\delta(\tau_j),\tau_j+\delta(\tau_j)],\ \tau\in[t_1,t_2],$$

由 h 的单调性，有

$$\begin{aligned}\| F(x,t_2)-F(x,t_1)\| &= \|\int_{t_1}^{t_2} f(x(\tau),\tau)\mathrm{d}\tau\| \leqslant \|\int_{t_1}^{t_2} f(x(\tau),\tau)\mathrm{d}\tau-\sum_{j=1}^{m} f(x(\tau_j),\tau_j)(\alpha_j-\alpha_{j-1})\| + \\ &\quad \|\sum_{j=1}^{m} f(x(\tau_j),\tau_j)(\alpha_j-\alpha_{j-1})\| < \varepsilon+\sum_{j=1}^{m}\| f(x(\tau_j),\tau_j)(\alpha_j-\alpha_{j-1})\| < \\ &\quad \varepsilon+\sum_{j=1}^{m}|h(\alpha_j)-h(\alpha_{j-1})| < \varepsilon+|h(t_2)-h(t_1)|,\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，有

$$\| F(x,t_2)-F(x,t_1)\| \leqslant |h(t_2)-h(t_1)|.$$

用类似的方法，可得

$$\| F(x,t_2)-F(x,t_1)-F(y,t_2)+F(y,t_1)\| \leqslant \omega(\| x-y\|)\,|h(t_2)-h(t_1)|.$$

即 $F\in \widehat{\mathrm{F}}(G,h,\omega)$，结论得证.

引理 7　设函数 $f:G\to \mathrm{R}^n$ 属于 $\widehat{\mathrm{V}}(G,h,\omega)$，如果 $x:[\alpha,\beta]\to \mathrm{B},[\alpha,\beta]\subset \mathrm{I}$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的有界变差函数，那么 Kurzweil 积分 $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)$ 和 $\int_\alpha^\beta f(x(s),s)\mathrm{d}s$ 存在且相等，其中

$$F(x,t)=\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\mathrm{d}s,\ t_0,t\in[\alpha,\beta].$$

证明　因为 $f\in \widehat{\mathrm{V}}(G,h,\omega)$，由引理 6 得 $F\in \widehat{\mathrm{F}}(G,h,\omega)$，再由文献[4] 中推论 3.16，Kurzweil 积分 $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)$ 存在. 又 $(x(s),s)\in \widetilde{G}$，$[\alpha,\beta]\subset \mathrm{I}$，由定义 5 的条件(3) 知，Kurzweil 积分 $\int_\alpha^\beta f(x(s),s)\mathrm{d}s$ 存在. 则对 $\forall\varepsilon>0$ 及区间 $[\alpha,\beta]$ 的任何 $\delta-$精细分划 $\{(\tau_j,[\sigma_{j-1},\sigma_j]),\ j=1,2,\cdots,l\}$ 其中

$$\tau_j\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]\subset[\tau_j-\delta(\tau_j),\tau_j+\delta(\tau_j)],$$

有

$$\begin{aligned}\|\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)\mathrm{d}s\| &\leqslant \|\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)-\sum_{j=1}^{l}[F(x(\tau_j),\sigma_j)-F(x(\tau_j),\sigma_{j-1})]\| + \\ &\quad \|\sum_{j=1}^{l}[F(x(\tau_j),\sigma_j)-F(x(\tau_j),\sigma_{j-1})]-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)\mathrm{d}s\| < \varepsilon+ \\ &\quad \|\sum_{j=1}^{l}[F(x(\tau_j),\sigma_j)-F(x(\tau_j),\sigma_{j-1})]-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)\mathrm{d}s\|,\end{aligned}$$

由于 $F(x(\tau),t)=\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\mathrm{d}s,\ t_0,t\in[\alpha,\beta]$，所有

$$\|\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)\mathrm{d}s\| \leqslant \varepsilon+\|\sum_{j=1}^{l}\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f(x(s),s)\mathrm{d}s-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)\mathrm{d}s\|,$$

由文献[4] 定理 1.11 及 ε 的任意性，有

$$\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)=\int_\alpha^\beta f(x(s),s)\mathrm{d}s.$$

引理 8　设函数 $f:G\to \mathrm{R}^n$ 属于 $\widehat{\mathrm{V}}(G,h,\omega)$，函数 $x:[\alpha,\beta]\to \mathrm{R}^n\subset \mathrm{I}$ 是方程(1) 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个解当且仅当 x 是广义常微分方程(2) 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个解，其中

$$F(x,t)=\int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\mathrm{d}s,\ t_0,t\in[\alpha,\beta].$$

证明 设 $x:[\alpha,\beta]\to R^n$ 是方程(1)的一个解，由引理4得 x 是$[\alpha,\beta]$上的有界变差函数，则对 $\forall s_1,s_2\in[\alpha,\beta]$，由引理7有

$$x(s_2)-x(s_1)=\int_{s_1}^{s_2}f(x(s),s)\mathrm{d}s=\int_{s_1}^{s_2}DF(x(\tau),t),\tag{3}$$

由此由定义2，x 是广义常数微分方程(2)在$[\alpha,\beta]$上的一个解.

另一方面，设 $x:[\alpha,\beta]\to R^n$ 是方程(2)的一个解，则由引理7，x 满足式(3)，由文献[4]推论3.11知 x 是$[\alpha,\beta]$上的有界变差函数，因此 x 是方程(1)在$[\alpha,\beta]$上的一个解，结论得证.

令 P 是一向量空间，$p_0\in P$ 是 P 的一个聚点.

定理9 设 $f:G\to R^n$ 为Caratheodory 函数且满足下列条件：

(1) 存在正值函数 $\delta:I\to(0,+\infty)$，对每个区间$[u,v]$，满足

$$\tau\in[u,v]\subset[\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau)]\subset I$$

及$(x,p)\in\bar{B}\times P$，有

$$\|f(x,\tau,p)(v-u)\|\leqslant|h(v)-h(u)|.$$

(2) 对每个区间$[u,v]$，满足

$$\tau\in[u,v]\subset[\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau)]\subset I$$

及$(x,p),(y,p)\in\bar{B}\times P$，有

$$\|f(x,\tau,p)-f(y,\tau,p)\|(v-u)\leqslant\omega(\|x-y\|)|h(v)-h(u)|.$$

(3) 对 $\forall t_1,t_2\in I,(x,s,p)\in\tilde{G}\times P$，Kurzweil 积分$\int_{t_1}^{t_2}f(x,s,p)\mathrm{d}s$ 存在.

假设 $\forall t_0\in I,(x,t)\in\tilde{G}$，有

$$\lim_{p\to p_0}\int_{t_0}^{t}f(x,\tau,p)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}f(x,\tau,p_0)\mathrm{d}\tau,\tag{4}$$

且设 $x(t,p):[\alpha,\beta]\times P\to R^n$ 是方程

$$x'=f(x,t,p),\tag{5}$$

在$[\alpha,\beta]\subset I$上的解，使得对 $\forall t\in[\alpha,\beta],y(t)\in\bar{B}$，有

$$\lim_{p\to p_0}x(t,p)=y(t).\tag{6}$$

那么 $y:[\alpha,\beta]\to R^n$ 在$[\alpha,\beta]$上有界变差且是方程

$$x'=f(x,t,p_0)\tag{7}$$

在$[\alpha,\beta]$上的一个解.

证明 对 $\forall(x,t,p)\in\bar{B}\times[\alpha,\beta]\times P$ 定义

$$F(x,t,p)=\int_{\alpha}^{t}f(x,\tau,p)\mathrm{d}\tau,\tag{8}$$

由条件(1)，对 $\forall(x,t_i,p)\in\bar{B}\times[\alpha,\beta]\times P,i=1,2$，运用和引理6相类似的证明，可得

$$\|F(x,t_2,p)-F(x,t_1,p)\|\leqslant|h(t_2)-h(t_1)|,\tag{9}$$

同理，由条件(2)，对

$$\forall(x,t_i,p),(y,t_i,p)\in\bar{B}\times[\alpha,\beta]\times P,i=1,2,$$

有

$$\|F(x,t_2,p)-F(x,t_1,p)-F(y,t_2,p)+F(y,t_1,p)\|\leqslant\omega(\|x-y\|)|h(t_2)-h(t_1)|.\tag{10}$$

由式(9)、式(10)可知，对 $\forall p\in P$，有 $F(\cdot,\cdot,p)\in\hat{F}(G,h,\omega)$.由式(4)可得对 $\forall(x,t)\in\bar{B}\times[\alpha,\beta]$，有

$$\lim_{p\to p_0}F(x,t,p)=F(x,t,p_0).$$

由引理8，函数 $x(t,p):[\alpha,\beta]\times P\to R^n$ 是广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=DF(x,t,p)\tag{11}$$

在$[\alpha,\beta]$上的解.由式(6)及文献[4]中定理8.2，可得 $y:[\alpha,\beta]\times P\to R^n$ 是广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=DF(x,t,p_0) \tag{12}$$

在$[\alpha,\beta]$上的一个解.又由引理 8,$y:[\alpha,\beta]\times P\rightarrow R^n$ 是方程(7)在$[\alpha,\beta]$上的一个解,定理得证.

定理 10 设函数 $f:G\rightarrow R^n$ 满足定理 9 中的条件(1)~(3)及式(4),且设 $x:[\alpha,\beta]\rightarrow R^n$ 是方程(7)在$[\alpha,\beta]$上的一个解且满足下面唯一性条件.

如果 $y:[\alpha,\gamma]\rightarrow R^n$,$[\alpha,\gamma]\subset[\alpha,\beta]$ 是方程(7)的一个解,使 $y(\alpha)=x(\alpha)$,那么对

$$\forall t\in[\alpha,\gamma],y(t)=x(t).$$

假设存在 $p>0$,使得如果 $s\in[\alpha,\beta]$ 且 $\|y-x(s)\|<p$,那么$(y,s)\in\tilde{G}$,且让 $y_p\in R^n$,$p\in P$ 满足

$$\lim_{p\rightarrow p_0}y_p=x(\alpha).$$

那么当 p 充分接近 p_0 时,方程(5)在$[\alpha,\beta]$上存在解 $x(t,p)$,使得 $x(\alpha,p)=y_p$ 且

$$\lim_{p\rightarrow p_0}x(s,p)=x(s),s\in[\alpha,\beta].$$

证明 函数 F 如式(8)定义,由定理 9 的证明易知,对 $\forall p\in P$,有 $F(\cdot,\cdot,p)\in\tilde{F}(G,h,\omega)$.由引理 8 可知,$x:[\alpha,\beta]\rightarrow R^n$ 是方程(12)在$[\alpha,\beta]$上的一个解.若将文献[4]定理 8.6 中 $k\in N$ 时的序列集用参数 $p\in P$ 代替,则 $x:[\alpha,\beta]\rightarrow R^n$ 满足文献[4]中定理 8.6 的唯一性条件及假设.由文献[4]中定理 8.6 可得 $x(t,p)$ 是方程(11)在$[\alpha,\beta]$上的解,且满足 $x(\alpha,p)=y_p$ 及

$$\lim_{p\rightarrow p_0}x(s,p)=x(s),s\in[\alpha,\beta].$$

又由引理 8 可得,$x(t,p)$ 是方程(5)在$[\alpha,\beta]$上的解,且满足 $x(\alpha,p)=y_p$ 及

$$\lim_{p\rightarrow p_0}x(s,p)=x(s),s\in[\alpha,\beta].$$

参考文献:

[1] Kurzweil J. Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter[J]. Czechoslovak J Mathe,1957,7:418-449.

[2] Kurzweil J,Vorel Z. Continuous Dependence of Solutions of Differential Equations on a Parameter[J]. Czechoslovak J Mathe,1957,7:568-583.

[3] Kurzweil J. Generalized Ordinary Differential Equations[J]. Czechoslovak J Mathe,1958,8:360-389.

[4] Schabik S. Generalized Ordinary Differential Equations[M]. Singapore:World Scientific,1992.

[5] 吴从炘,李宝麟.不连续系统的有界变差解[J].数学研究,1998,31(4):417-427.

[6] 李宝麟,吴从炘.Kurzweil 方程的 Φ—有界变差解[J].数学学报,2003,46(3):561-570.

[7] 李宝麟,马学敏.一类脉冲微分系统与 Kurzweil 广义常微分方程的关系[J].甘肃科学学报,2007,19(1):1-6.

[8] 李宝麟,尚德全.一类不连续系统的变差稳定性[J].西北师范大学学报(自然科学版),2006,42(2):1-3.

[9] 张迪,李宝麟.一类线性常微分方程的有界变差解[J].甘肃科学学报,2007,19(1):34-38.

作者简介:

梁雪峰 (1978-)女,甘肃省临夏人,现为西北师范大学数学与信息科学学院在读硕士研究生,研究方向为应用微分方程.