第 41 卷 第 1 期
2008 年 3 月

数 学 研 究
Journal of Mathematical Study

Vol. 41 No. 1
Mar. 2008

一类脉冲微分方程正周期解存在的充要条件

李宝麟 吕卫东

(西北师范大学数学与信息科学学院，甘肃 兰州 730070)

摘 要 考虑非线性脉冲微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x^p(t)], t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = c_k x(t_k), k \in N. \end{cases}$$

得到了该方程存在正周期解的充要条件为

$$\prod_{k=1}^{m}(1+c_k)^p \exp(p\int_0^{\omega} a(\sigma)d\sigma) > 1.$$

关键词 脉冲微分方程；正周期解；充要条件

中图分类号 O 175 **文献标识码** A

1 引 言

logistic 方程是生物生态学中的一个非常重要的数学模型，它所派生的各种模型受到了广泛的关注．文献 [1, 2] 研究了一般 logistic 方程正周期解的存在性和全局渐进稳定性，文献 [3-5] 研究了具有时滞的 logistic 方程解的稳定性，周期解存在性和吸引性．本文将文献 [6] 中具有脉冲的 logistic 方程进行了推广，得到了推广后方程正周期解存在的充要条件，当方程的参数 $p=1$ 时，本文的结论即为文献 [6] 中相应的结果．

考虑变系数非线性脉冲微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x^p(t)], t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = c_k x(t_k), k \in N. \end{cases} \tag{1}$$

其中 N 是正整数，$p \geq 1, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots, \lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ 且对 $k \in N, c_k > -1, a(t), b(t)$ 在区间 $[0, t_1]$ 和 $(t_k, t_{k+1}]$ 上连续，在 t_k 点的左右极限存在，$a(t) > 0, b(t) > 0$．

称函数 $x: [0, +\infty) \to R$ 为以 ω 为周期的周期函数，如果 $x(t+\omega) = x(t)$ 对所有 $t \in [0, +\infty)$ 成立．

收稿日期：2006-12-12

基金项目：国家自然科学基金资助项目 (10671158)，西北师大科技创新工程，甘肃省 ‘555 创新人才工程’ 资助项目

本文中始终假设 $a(t),b(t)$ 为以 ω 为周期的周期函数，脉冲效应满足如下的周期性条件：存在 $m\in N$，使得 $t_m\le\omega$，且对 $i=1,2,\cdots,m$ 及 $j=0,1,2,\cdots$，有 $t_{jm+i}=t_i+j\omega$ 及 $c_{jm+i}=c_i$.

2 主要结果

引理 1 对任意 $x_0>0$，方程 (1) 满足初始条件：

$$x(0)=x_0 \tag{2}$$

的解 $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上唯一存在且由 (1) 式给出

$$x(t)=[x_0^{-p}\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)+p\int_0^t b(s)\prod_{s\le t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds]^{-p}. \tag{3}$$

证明 令 $t\in[0,t_1]$，则有 (1)，(2) 知有

$$\begin{cases} x'(t)=a(t)x(t)-b(t)x^{p+1}(t),\\ x(0)=x_0. \end{cases}$$

可解得 $[x(t)]^{-p}=x_0^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)+p\int_0^t b(s)\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds$.

假设 (3) 式对 $t\in[0,t_n]$ 成立， $n>1$. 则当 $t\in(t_n,t_{n+1}]$ 时，

$$\begin{aligned}
[x(t)]^{-p}&=[x(t_n^+)]^{-p}\exp(-p\int_{t_n}^t a(\sigma)d\sigma)+p\int_{t_n}^t b(s)\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds\\
&=(1+c_n)^{-p}[x(t_n)]^{-p}\exp(-p\int_{t_n}^t a(\sigma)d\sigma)+p\int_{t_n}^t b(s)\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds\\
&=(1+c_n)^{-p}\exp(-p\int_{t_n}^t a(\sigma)d\sigma)[x_0^{-p}\textstyle\prod_{0<t_k<t_n}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^{t_n} a(\sigma)d\sigma)+\\
&\quad p\int_0^{t_n} b(s)\textstyle\prod_{s\le t_k<t_n}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^{t_n} a(\sigma)d\sigma)ds]+p\int_{t_n}^t b(s)\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds\\
&=x_0^{-p}\textstyle\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)+p\int_0^t b(s)\prod_{s\le t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds,
\end{aligned}$$

即 (3) 式对 $t\in[0,t_{n+1}]$ 成立. 由归纳法原理知此引理成立.

定理 1 方程 (1) 存在以 ω 为周期的正周期解的充要条件为

$$\prod_{k=1}^m(1+c_k)^p\exp(p\int_0^\omega a(\sigma)d\sigma)>1. \tag{4}$$

证明 由 $a(t)$ 的周期性及脉冲效应的周期性知

$$C:=\prod_{t\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_t^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)=\prod_{k=1}^m(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^\omega a(\sigma)d\sigma)$$

是一个常数，则 (4) 式等价于 $C<1$.

充分性：记

$\alpha(t)=p\int_0^t b(s)\prod_{0<t_k<s}(1+c_k)^p\exp(p\int_0^s a(\sigma)d\sigma)ds-Cp\int_0^{t+\omega}b(s)\prod_{0<t_k<s}(1+c_k)^p\exp(p\int_0^s a(\sigma)d\sigma)ds$，则由 a,b 的周期性及连续性知 $\alpha(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且当 $t\neq t_k$ 时有

$\alpha'(t)=pb(t)\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^p\exp(p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)-Cpb(t+\omega)\prod_{0<t_k<t+\omega}(1+c_k)^p\exp(p\int_0^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)=0$，从而 $\alpha(t)=\alpha_0$ 是一个负常数 $(\alpha(0)<0)$.

令 $x_0^p=\frac{C-1}{\alpha_0}$，则相应的初值问题 (1) 和 (2) 的解 $x_*(t)$ 满足

$$[x_*(t+\omega)]^{-p}=\frac{\alpha_0}{C-1}\prod_{0<t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)+$$

$$p\int_0^{t+\omega}b(s)\prod_{s\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)ds$$

$$=\frac{\alpha_0}{C-1}\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)\prod_{t\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_t^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)$$

$$+p\int_0^{t+\omega}b(s)\prod_{s\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)ds$$

$$=\frac{\alpha_0}{C-1}\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)C+p\int_0^{t+\omega}b(s)\prod_{s\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)ds$$

$$=\frac{\alpha_0}{C-1}\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)+\alpha_0\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)$$

$$+p\int_0^{t+\omega}b(s)\prod_{s\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)ds$$

$$=\frac{\alpha_0}{C-1}\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)+p\int_0^t b(s)\prod_{s\le t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds$$

$$+\alpha_0\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)+p\int_0^{t+\omega}b(s)\prod_{s\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)ds$$

$$-p\int_0^t b(s)\prod_{s\le t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds$$

$$=[x_*(t)]^{-p}.$$

必要性：若 $[x_*(t)]$ 是初值问题 (1) 和 (2) 的 ω 正周期解，则

$$[x_*(t+\omega)]^{-p}=[x_*(t)]^{-p}.$$

由 (3) 式得，

$$x_0^{-p}\prod_{0<t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)+p\int_0^{t+\omega}b(s)\prod_{s\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)ds$$

$$=x_0^{-p}\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)+p\int_0^t b(s)\prod_{s\le t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds$$

即

$$x_0^{-p}\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)[\prod_{t\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_t^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)-1]$$

$$+p\int_0^t b(s)\prod_{s\le t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds[\prod_{t\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_t^{t+\omega}a(\sigma)d\sigma)-1]$$

$+p\int_t^{t+\omega} b(s)\prod_{s\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^{t+\omega} a(\sigma)d\sigma)ds=0$, 即

$x_0^{-p}\prod_{0<t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_0^t a(\sigma)d\sigma)(C-1)+p\int_0^t b(s)\prod_{s\le t_k<t}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^t a(\sigma)d\sigma)ds(C-1)$

$+p\int_t^{t+\omega} b(s)\prod_{s\le t_k<t+\omega}(1+c_k)^{-p}\exp(-p\int_s^{t+\omega} a(\sigma)d\sigma)ds=0.$

由于 $1+c_k>0, k\in N, a(t)>0, b(t)>0$, 所以只需 $C<1$ 时上式方能成立.

注 1 定理 1 推广了文献 [6] 中定理 1 的结论, 得到了方程 (1) 的正周期解存在的充要条件.

参 考 文 献

[1] Tineo A. An iterative scheme for the N-competing species problem. J. Differential Equations, 1995, 116(1): 1-15.

[2] Eilbeck J C, Lopez-Gomez J. On the periodic Lotka-Volterra competition model. J. Math. Anal. Appl., 1997, 210(1): 58-57.

[3] Gopalsamy K, Kulenovic M R S, Lades G. Environment periodicity and time delays in a "food-limited" population model. J. Math. Anal. Appl., 1990. 147: 545-555.

[4] Lalli B S, zhang B G, On a periodic delay population model. J. Quart. Appl. Math., 1994, L II: 35-42.

[5] Freedmen H I, Wu J. Periodic solutions of single-species models with periodic delay. SIAM J. Math. Anal., 1992, 23(3): 689-701.

[6] 陈福来, 文贤章. 脉冲 Logistic 方程的正周期解. 数学研究, 2004, 37(2): 167-171.

A Sufficient and Necessary Condition for the Existence of the Positive Periodic Solutions of a Class of Impulsive Differential Equations

Li Baolin Lu Weidong

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu 730070)

Abstract Consider the nonlinear impulsive differntial equation

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)[a(t)-b(t)x^p(t)], t\neq t_k,\\ \Delta x|_{t=t_k}=c_k x(t_k), k\in N. \end{cases}$$

A sufficient and necessary condition obtained for the existence of the positive periodic solution is

$$\prod_{k=1}^m (1+c_k)^p \exp(p\int_0^\omega a(\sigma)d\sigma)>1.$$

Key words impulsive differential equation : positive periodic solution ;sufficient and necessary condition