第 41 卷 第 2 期　　数 学 研 究　　Vol. 41 No. 2
2008 年 6 月　　Journal of Mathematical Study　　Jun. 2008

一类脉冲微分系统的有界变差解

李宝麟　梁雪峰

(西北师范大学数学与信息科学学院，甘肃 兰州 730070)

摘 要 在比文 [6] 更弱的条件下讨论了固定时刻脉冲微分系统与 Kurzweil 广义常微分方程的关系，并建立了这类脉冲微分系统有界变差解的局部存在性和唯一性定理.

关键词 脉冲微分系统；Kurzweil 方程；有界变差解

中图分类号 O175.12　　**文献标识码** A

1 引 言

脉冲微分系统作为非线性微分系统的一个新分支已得到广泛应用，最新研究成果见 [1－2]. Kurzweil J. 于 1957 年提出的 Kurzweil 广义常微分方程理论 [3] 在处理常微分方程，积分方程及拓扑动力系统等问题时，有重要作用 [4－5]. 考察固定时刻一阶脉冲微分系统初值问题 (IVP):

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x,t), & t\neq t_k, k=1,2,\cdots \\ \Delta x\mid_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots \\ x(t_0+)=x_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $I_k: R^n\rightarrow R^n$ 连续，$k=1,2,\cdots,m,\cdots,x_0\in R^n,t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots<+\infty,t_k\rightarrow+\infty,\Delta x\mid_{t=t_k}=x(t_k+)-x(t_k),x(t_k+)$ 表示 $x(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右极限，右端函数 $f: R^n\times R\rightarrow R^n$. 文 [1－2] 研究了 $f(x,t)$ 为连续函数时，IVP(1) 解的存在唯一性问题，文 [6] 讨论了 $f(x,t)$ 为 Caratheodory 函数时，IVP(1) 解的存在唯一性问题. 本文将文 [6] 中 $f(x,t)$ 满足的条件减弱，使 $f(x,t)$ 非 Lebesgue 可积但 Kurzweil 可积，并在此基础上讨论了 Kurzweil 广义常微分方程与 IVP(1) 的关系，建立了 IVP(1) 有界变差解的局部存在性和唯一性定理.

2 主要结果

为了证明定理，先引入相关的定义和引理.

定义 1[4,5,6,7,8] 称函数 $U:[a,b]\times[a,b]\rightarrow R^n$ 在 $[a,b]$ 上 Kurzweil 可积，如果存在 $A\in R^n$, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在正值函数 $\delta:[a,b]\rightarrow(0,+\infty)$, 使对 $[a,b]$ 的任何 $\delta(\tau)-$ 精细分划 $D=$

收稿日期：2006-11-05

基金项目：国家自然科学基金资助项目 (10771171), 甘肃省 ‘555 创新人才工程’ 资助项目，西北师大科技创新工程

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\{(\tau_j,[\alpha_{j-1},\alpha_j]),j=1,2,\dots,k\}$. 其中 $\tau_j\in[\alpha_{j-1},\alpha_j]\subset[\tau_j-\delta(\tau_j),\tau_j+\delta(\tau_j)]$. 有

$$\|S(U,D)-A\|=\|\sum_{j=1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})]-A\|<\varepsilon,$$

称 A 为 U 在 $[a,b]$ 上的 Kurzweil 积分，记作 $A=\int_a^b DU(\tau,t)$. 如果 $\int_a^b DU(\tau,t)$ 存在，那么定义 $\int_b^a DU(\tau,t)=-\int_a^b DU(\tau,t)$, 且规定：$a=b$ 时，$\int_b^a DU(\tau,t)=0$. 如果 $U(\tau,t)=f(\tau)\cdot t$. 则记 $\int_a^b D(f(\tau)\cdot t)=\int_a^b f(s)ds$. 对应的积分和为：$S(U,D)=\sum_{j=1}^{k}f(\tau_j)(\alpha_j-\alpha_{j-1})$.

定义 2[4,5,6] 设 $G\subset R^n\times R$ 为开集，函数 $F:G\to R^n$. 称函数 $x:[\alpha,\beta]\to R^n$ 为 Kurzweil 方程

$$\frac{dx}{d\tau}=DF(x,t) \tag{2}$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的一个解是指对所有 $t\in[\alpha,\beta],(x(t),t)\in G$, 有

$$x(s_2)-x(s_1)=\int_{s_1}^{s_2}DF(x(\tau),t),\quad s_1,s_2\in[\alpha,\beta]$$

成立. 其中，右端积分是指函数 $U(\tau,t)=F(x(\tau),t)$ 在 $[s_1,s_2]$ 上的 Kurzweil 积分.

令 $G\subset R^{n+1}$ 为开集，$(x_0,t_0)\in G$, $\widetilde{G}=\{x\in R^n;\|x-x_0\|<\triangle\}\times\{t\in R;|t-t_0|<\triangle\}$, 记 $B=\{x\in R^n;\|x-x_0\|<\triangle\}$, $I=\{t\in R;|t-t_0|<\triangle\}$.

定义 3[4,6] 函数 $F:G\to R^n$ 属于 $\widetilde{\mathcal{F}}(G,h,\omega)$; 如果对 $\forall(x_0,t_0)\in G$. 存在 $\triangle>0$, 使 F 在 $\widetilde{G}\subset G$ 上满足下列条件：

(1) 对所有 $(x,t_1),(x,t_2)\in\widetilde{G}$, 有

$$\|F(x,t_2)-F(x,t_1)\|\le|h(t_2)-h(t_1)|. \tag{3}$$

(2) 对所有 $(x,t_1),(x,t_2),(y,t_1),(y,t_2)\in\widetilde{G}$. 有

$$\|F(x,t_2)-F(x,t_1)-F(y,t_2)+F(y,t_1)\|\le\omega(\|x-y\|)|h(t_2)-h(t_1)|.$$

其中 $h:\bar{I}\to R$ 是定义于 $\bar{I}$ 上的不减左连续函数，而 $\omega:[0,+\infty)\to R$ 是连续增函数，满足 $\omega(0)=0$.

定理 1[4,6] 设 $F:G\to R^n$ 属于 $\widetilde{\mathcal{F}}(G,h,\omega)$, $x:[\alpha,\beta]\to R^n$, $[\alpha,\beta]\subset I$ 是函数列 $(x_k)_{k\in N}$, $x_k:[\alpha,\beta]\to R^n$ 的逐点收敛极限，使得对每个 $k\in N,s\in[\alpha,\beta],(x(s),s)\in\widetilde{G},(x_k(s),s)\in\widetilde{G}$, 且 Kurzweil 积分 $\int_\alpha^\beta DF(x_k(\tau),t)$ 存在，则积分 $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)$ 存在，且 $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)-\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta DF(x_k(\tau),t)$.

引理 1[4,6] 设 $F:G\to R^n$ 满足 (3) 式，如果 $x:[\alpha,\beta]\to R^n,[\alpha,\beta]\subset I$ 是方程 (2) 的一个解，则 x 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界变差，且

$$Var_\alpha^\beta x\le h(\beta)-h(\alpha)<+\infty,$$

并且在 $[\alpha,\beta]$ 中，x 与函数 h 具有相同的连续性. 其中 $Var_\alpha^\beta x$ 表示 x 在 $[\alpha,\beta]$ 上的全变差.

引理 2[4,6] 如果 $x:[\alpha,\beta]\to R^n,[\alpha,\beta]\subset I$ 是方程 (2) 的解，且 $F:G\to R^n$ 满足 (3) 式，则

对 $s\in[\alpha,\beta)$, $x(s+)-x(s)=\lim_{\sigma\to s+}x(\sigma)-x(s)=F(x(s),s+)-F(x(s),s)$,

对 $s\in(\alpha,\beta]$, $x(s)-x(s-)=x(s)-\lim_{\sigma\to s-}x(\sigma)=F(x(s),s)-F(x(s),s-)$.

其中，$F(x,s+)=\lim_{\sigma\to s+}F(x,\sigma)$, $s\in[\alpha,\beta)$; $F(x,s-)=\lim_{\sigma\to s-}F(x,\sigma)$, $s\in(\alpha,\beta]$.

定义 4 设 $f:G\to R^n$ 为 Caratheodory 函数，称 $f\in\widetilde{\mathcal{V}}(G,h,\omega)$. 如果 $f(x,t)$ 满足下列条件：

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(1) 存在正值函数 $\delta: \bar{I} \to (0, +\infty)$, 对每个区间 $[u, v]$, 满足 $\tau \in [u, v] \subset [\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)] \subset I$ 及 $x \in \bar{B}$, 有

$$\| f(x, \tau)(v - u) \| \leq |h(v) - h(u)|.$$

(2) 对每个区间 $[u, v]$, 满足 $\tau \in [u, v] \subset [\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)] \subset I$ 及 $x, y \in \bar{B}$ 有

$$\| f(x, \tau) - f(y, \tau) \| (v - u) \leq \omega(\| x - y \|)|h(v) - h(u)|.$$

其中 $h: \bar{I} \to R$ 是定义于 $\bar{I}$ 上的不减左连续函数, 而 $\omega: [0, +\infty) \to R$ 是连续增函数, 满足 $\omega(0) = 0$.

(3) 对 $\forall t_1, t_2 \in I, (x(s), s) \in \tilde{G}$, Kurzweil 积分 $\int_{t_1}^{t_2} f(x(s), s) ds$ 存在.

定义 5[6] $x(t; t_0, x_0)$ 是 IVP(1) 的有界变差解, $t \in (t_0, T)$, 是指:

(1) $x(t_0+, t_0, x_0) = x_0$;

(2) x 在 (t_0, T) 的任何紧子区间上有界变差;

(3) 当 $t \in (t_0, T)$ 时, $(x, t) \in \tilde{G}$;

(4) 当 $t \neq t_k$ 时, $\dot{x}(t) = f(x, t)$;

(5) $\Delta x(t)|_{t=t_k} = x(t_k+) - x(t_k) = I_k(x(t_k))$, $t_k \in (t_0, T)$.

引理 3 设 $f: G \to R^n$ 属于 $\tilde{V}(G, h, \omega), x(t_0) = x_0$. 则对任意 $x, y \in \bar{B}, t_1, t_2 \in \bar{I}$, 有

$$\| F(x, t_2) - F(x, t_1) \| \leq |h(t_2) - h(t_1)|,$$

$$\| F(x, t_2) - F(x, t_1) - F(y, t_2) + F(y, t_1) \| \leq \omega(\| x - y \|)|h(t_2) - h(t_1)|.$$

即 $F \in \tilde{\mathcal{F}}(G, h, \omega)$, 其中 $F(x, t) = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds$.

证明 因为 $f \in \tilde{V}(G, h, \omega)$, 任取 $t_1, t_2 \in \bar{I}$, 不妨设 $t_1 < t_2$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$ 及区间 $[t_1, t_2]$ 的任何 $\delta-$精细分划 $\{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \ldots, m\}$, 其中 $\tau_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)]$, $\tau \in [t_1, t_2]$, 有

$$\| F(x, t_2) - F(x, t_1) \| = \| \int_{t_1}^{t_2} f(x(\tau), \tau) d\tau \|$$

$$\leq \| \int_{t_1}^{t_2} f(x(\tau), \tau) d\tau - \sum_{j=1}^{m} f(x(\tau_j), \tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \| + \| \sum_{j=1}^{m} f(x(\tau_j), \tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \|$$

$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \| f(x(\tau_j), \tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \| < \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} |h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})| < \varepsilon + | h(t_2) - h(t_1) |,$$

由 ε 的任意性, 有

$$\| F(x, t_2) - F(x, t_1) \| \leq | h(t_2) - h(t_1) |.$$

用类似的方法, 可得

$$\| F(x, t_2) - F(x, t_1) - F(y, t_2) + F(y, t_1) \| \leq \omega(\| x - y \|)|h(t_2) - h(t_1)|.$$

即 $F \in \tilde{\mathcal{F}}(G, h, \omega)$, 结论得证.

引理 4 设 $f: G \to R^n$ 属于 $\tilde{V}(G, h, \omega)$, $x: [\alpha, \beta] \to R^n, [\alpha, \beta] \subset I$ 是函数列 $(x_k)_{k \in N}, x_k: [\alpha, \beta] \to R^n$ 的逐点收敛极限, 使得对每个 $k \in N, s \in [\alpha, \beta], (x(s), s) \in \tilde{G}, (x_k(s), s) \in \tilde{G}$, 对每个 $k \in N$, Kurzweil 积分 $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x_k(\tau), t)$ 存在, 则积分 $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau), t)$ 与 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x(s), s) ds$ 存在且相等. 其中 $F(x(\tau), t) = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds$, $t_0, t \in [\alpha, \beta]$.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明 因为 $f\in \widetilde{\mathcal{V}}(G,h,\omega)$，由引理 3 得 $F\in \widetilde{\mathcal{F}}(G,h,\omega)$，再由定理 1，积分 $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)$ 存在且 $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)=\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta DF(x_k(\tau),t)$. 又 $(x(s),s)\in\widetilde{G}$, $[\alpha,\beta]\subset I$，由定义 4 的条件 (3)，Kurzweil 积分 $\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds$ 存在. 则对 $\forall\varepsilon>0$ 及区间 $[\alpha,\beta]$ 的任何 $\delta-$ 精细分划 $\{(\tau_j,[\sigma_{j-1},\sigma_j]),j=1,2,\dots,l\}$，其中 $\tau_j\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]\subset[\tau_j-\delta(\tau_j),\tau_j+\delta(\tau_j)]$，有

$$
\begin{aligned}
\|\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds\| &\le \|\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)-\sum_{j=1}^{l}[F(x(\tau_j),\sigma_j)-F(x(\tau_j),\sigma_{j-1})]\| \\
&\quad+\|\sum_{j=1}^{l}[F(x(\tau_j),\sigma_j)-F(x(\tau_j),\sigma_{j-1})]-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds\| \\
&<\varepsilon+\|\sum_{j=1}^{l}[F(x(\tau_j),\sigma_j)-F(x(\tau_j),\sigma_{j-1})]-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds\|.
\end{aligned}
$$

由于 $F(x(\tau),t)=\int_{t_0}^t f(x(s),s)ds, t_0,t\in[\alpha,\beta]$. 所以

$$
\|\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds\|<\varepsilon+\|\sum_{j=1}^{l}\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f(x(s),s)ds-\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds\|,
$$

由文 [4, 定理 1.11] 及 ε 的任意性，有 $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)=\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds$.

推论 1 设 $f:G\to R^n$ 属于 $\widetilde{\mathcal{V}}(G,h,\omega)$, $x:[\alpha,\beta]\to R^n$, $[\alpha,\beta]\subset I$ 是一有限阶梯函数列 $x_k:[\alpha,\beta]\to R^n$ 的逐点收敛极限，使得对每个 $k\in N$, $s\in[\alpha,\beta]$, $(x(s),s)\in\widetilde{G}$, $(x_k(s),s)\in\widetilde{G}$, 则积分 $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)$ 与 $\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds$ 存在且相等. 其中 $F(x(\tau),t)=\int_{t_0}^t f(x(s),s)ds$, $t_0,t\in[\alpha,\beta]$.

证明 由引理 4，只需对每个阶梯函数 $\psi:[\alpha,\beta]\to R^n$, Kurzweil 积分 $\int_\alpha^\beta DF(\psi(t),t)$ 存在. 由定义 1 及文 [4, 定理 1.14 和注 1.15] 易证对每个阶梯函数 $\psi:[\alpha,\beta]\to R^n$, 积分 $\int_\alpha^\beta DF(\psi(t),t)$ 存在. 又 $(x(s),s)\in\widetilde{G}$，由定义 4 的条件 (3)，Kurzweil 积分 $\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds$ 存在. 类似于引理 4 的证明，可得积分 $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau),t)$ 与积分 $\int_\alpha^\beta f(x(s),s)ds$ 存在且相等.

定理 2 设 $f:G\to R^n$ 属于 $\widetilde{\mathcal{V}}(G,h,\omega)$, 对 $(x_0,t_0)\in G, t_i\in[\alpha,\beta], i=1,2,\cdots,p$, 则 $x:[\alpha,\beta]\to R^n$, $[\alpha,\beta]\subset(t_0,t_0+\triangle)$, $\triangle>0$ 是 IVP:

$$
\begin{cases}
\dot{x}=f(x,t), & t\ne t_i, i=1,2,\cdots,p\\
\Delta x\mid_{t=t_i}=I_i(x(t_i)), & i=1,2,\cdots,p\\
x(t_0+)=x_0,
\end{cases}
\tag{4}
$$

有界变差解的充要条件是：x 是 Kurzweil 方程初值问题

$$
\begin{cases}
\frac{dx}{d\tau}=DF(x,t),\\
x(t_0)=x_0,
\end{cases}
\tag{5}
$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上的有界变差解，其中 $F(x,t)=\int_{t_0}^t f(x(s),s)ds+\sum_{i=1}^p I_i(x)G_{t_i}(t)$.

证明 定义

$$
G_{t_i}(t)=\begin{cases}0, & t\le t_i, \quad i=1,2,\cdots,p\\ 1, & t>t_i, \quad i=1,2,\cdots,p\end{cases}
$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由于 $f \in \tilde{\mathcal{V}}(G, h, \omega)$. 令

$$H(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds, \tag{6}$$

$$F(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds + \sum_{i=1}^{p} I_i(x)G_{t_i}(t). \tag{7}$$

由定义 1 及 $G_{t_i}(t)$ 的定义，积分 $\int_{t_0}^{t} D[I_i(x(\tau))G_{t_i}(t)] \equiv 0$. 设 $x(t)$ 为 IVP (4) 在 $[\alpha, \beta] \subset (t_0, t_0+\Delta)$ 上的有界变差解， 因为有界变差函数可由有限阶梯函数列一致逼近（见文 [4]). 所以由推论 1 及 (6) 式，积分 $\int_{t_0}^{t} DH(x(\tau), t)$ 存在且

$$\int_{t_0}^{t} DH(x(\tau), t) = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds,$$

从而，由文 [4, 定理 1.9] 及 (7) 式，积分 $\int_{t_0}^{t} DF(x(\tau), t)$ 存在且

$$\int_{t_0}^{t} DF(x(\tau), t) = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds. \tag{8}$$

下证由 (7) 式定义的 F 属于 $\tilde{\mathcal{F}}(G, h, \omega)$. 由于 $\bar{B}$ 是闭集且映射 I_i 连续， $i = 1, 2, \cdots, p$, 所以存在常数 $K > 0$, 使得对 $\forall x \in \bar{B}$, $\| I_i(x) \| \leq K$. 因此，取 $x \in \bar{B}$, $t_1, t_2 \in \bar{I}$, 不妨设 $t_1 < t_2$, 对 $\forall \varepsilon > 0$ 及区间 $[t_1, t_2]$ 的任何 $\delta-$ 精细分划 $\{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]), j = 1, 2, \ldots, m\}$. 其中 $\tau_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)]$, 有

$$\begin{aligned}
&\| F(x, t_2) - F(x, t_1) \| = \| \int_{t_1}^{t_2} f(x(\tau), \tau)d\tau + \sum_{i=1}^{p} I_i(x)[G_{t_i}(t_2) - G_{t_i}(t_1)] \| \\
&\leq \| \int_{t_1}^{t_2} f(x(\tau), \tau)d\tau - \sum_{j=1}^{m} f(x(\tau_j), \tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \| \\
&\quad + \| \sum_{j-1}^{m} f(x(\tau_j), \tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \| + \| \sum_{i-1}^{p} I_i(x)[G_{t_i}(t_2) - G_{t_i}(t_1)] \| \\
&< \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \| f(x(\tau_j), \tau_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \| + K \, | \sum_{i=1}^{p} (G_{t_i}(t_2) - G_{t_i}(t_1)) | \\
&< \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} |h_1(\alpha_j) - h_1(\alpha_{j-1})| + K \, | h_2(t_2) - h_2(t_1) | \\
&< \varepsilon + | h_1(t_2) - h_1(t_1) | + K \, | h_2(t_2) - h_2(t_1) |,
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，有

$$\| F(x, t_2) - F(x, t_1) \| \leq | h_1(t_2) - h_1(t_1) | + K \, | h_2(t_2) - h_2(t_1) | .$$

其中 h_1 就是定义 4 中的 h. $h_2(t) = \sum_{i=1}^{p} G_{t_i}(t)$. 由 $G_{t_i}(t)$ 的定义易知， $h_2 : \bar{I} \to R$ 为 $\bar{I}$ 上的不减左连续函数. 另外，假设 ω_2 是有限个映射族 $I_i, i - 1, 2, \cdots, p$ 的寻常连续模，则对 $x, y \in \bar{B}$, $\| I_i(x) - I_i(y) \| \leq \omega_2(\| x - y \|)$. 用与引理 3 相类似的证明，易得

$$\| F(x, t_2) - F(x, t_1) - F(y, t_2) + F(y, t_1) \| \leq \omega_1(\| x - y \|) \, | h_1(t_2) - h_1(t_1) | + \omega_2(\| x - y \|) \, | h_2(t_2) - h_2(t_1) |,$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 ω_1 为定义 4 中的 ω. 至于第二项，有以下估计：

$$\|\sum_{i=1}^{p}(I_i(x)-I_i(y))(G_{t_i}(t_2)-G_{t_i}(t_1))\|\leq\omega_2(\|x-y\|)\,|\sum_{i=1}^{p}(G_{t_i}(t_2)-G_{t_i}(t_1))|$$

$$\leq\omega_2(\|x-y\|)\,|h_2(t_2)-h_2(t_1)|.$$

令 $h(t)=h_1(t)+h_2(t)+Kh_2(t)$, $\omega(r)=\omega_1(r)+\omega_2(r)$. 则 $F\in\tilde{\mathcal{F}}(G,h,\omega)$. 又 $x_0+=x(t_0+)=x_0$. 所以由 (8) 式，定义 2 及引理 1. 得 $x(t)$ 为 Kurzweil 方程初值问题 (5) 的有界变差解.

反之，若 $x(t)$ 是 Kurzweil 方程初值问题 (5) 满足 $x(t_0)=x_0$ 的解，则由引理 1. $x(t)$ 是有界变差函数，易知 $\dot{x}(t)=f(x,t)$. a.e. 成立，又由引理 2. 得

$$x(t_i+)-x(t_i)=F(x(t_i),t_i+)-F(x(t_i),t_i)=\lim_{t\to t_i+}\sum_{i=1}^{p}I_i(x(t_i))G_{t_i}(t)-\sum_{i=1}^{p}I_i(x(t_i))G_{t_i}(t_i)$$

$$=I_i(x(t_i))(G_{t_i}(t_i+)-G_{t_i}(t_i))=I_i(x(t_i)).$$

则 $x(t)$ 既是 IVP (4) 的解，也是 Kurzweil 方程初值问题 (5) 的解. 定理得证.

定理 3　设 $f:G\to R^n$ 属于 $\widetilde{\mathcal{V}}(G,h,\omega)$, $(x_0,t_0)\in G$, 则一定存在 $\triangle_1>0$, 使得 IVP(1) 在 $(t_0,t_0+\triangle_1)$ 上存在有界变差解 $x(t)$.

证明　因为 $f:G\to R^n$ 属于 $\widetilde{\mathcal{V}}(G,h,\omega)$, $(x_0,t_0)\in G$, 则 f 在 $\overline{\overline{G}}$ 上满足定义 4 中的条件 (1), (2), (3). 且由于 $t_1<t_2<\cdots<t_i<\cdots<+\infty$, $t_i\to+\infty$. 则存在 $\triangle_1>0$, 使在 $(t_0,t_0+\triangle_1)$ 上的 t_i 至多有有限个，设为 $t_1,t_2,\cdots,t_m$, 于是令

$$F(x,t)=\int_{t_0}^{t}f(x(s),s)ds+\sum_{i=1}^{m}I_i(x)G_{t_i}(t),\quad (x,t)\in\overline{\overline{G}},$$

由定理 2 的证明，得 $F\in\tilde{\mathcal{F}}(G,h,\omega)$. 从而，由文 [4, 定理 4.2], Kurzweil 方程初值问题 (5). $F(x,t)$ 由上式定义，存在解 $x(t)$. 又由定理 2, 可得结论成立.

定理 4　设 $f:G\to R^n$ 属于 $\widetilde{\mathcal{V}}(G,h,\omega)$, $(x_0,t_0)\in G$, $h:[t_0,t_0+\Delta]\to R$ 是不减左连续函数，$\omega:[0,+\infty)\to R$ 为连续增函数且 $\omega(0)=0$, 对每个 $u>0$, 有

$$\lim_{v\to0+}\int_v^u\frac{1}{\omega(r)}dr=+\infty,$$

那么对 $(x_0,t_0)\in\{(x,t)\in G;(x+F(x,t+)-F(x,t),t)\in\widetilde{G}\}$, IVP(1) 的解 $x(t)$ 是右行局部唯一的.

证明　由定理 3 的证明可知，$F\in\tilde{\mathcal{F}}(G,h,\omega)$, $F(x,t)$ 由 (7) 式定义，则由定理 2 及文 [4, 定理 4.8]. 得 IVP(1) 的解 $x(t)$ 是右行局部唯一的.

参 考 文 献

[1] 傅希林，闫宝强，刘衍胜. 脉冲微分系统引论. 北京：科学出版社，2005.3.

[2] Lakshimikantham V, Bainov D D and Simeonov P S. Theory of impulsive differential equations. Singapore: World Scientific, 1989.

[3] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. Czechoslovak Math. J.. 1957, 7: 418-449.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[4] Schwabik S. Generalized ordinary differential equations. Singapore: World Scientific. 1992.
[5] 李宝麟，吴从． Kurzweil 方程的 Φ– 有界变差解．数学学报， 2003. 46(3): 561-570.
[6] 李宝麟，马学敏．一类脉冲微分系统与 Kurzweil 广义常微分方程的关系．甘肃科学学报，2007, 19(1): 1-6.
[7] 吴从，李宝麟．不连续系统的有界变差解．数学研究， 1998, 31(4): 417-427
[8] 李宝麟，马学敏．不连续系统的有界变差解对参数的连续依赖性．数学研究， 2007, 40(2): 159-163.

Bounded Variation Solutions for a Class of Impulsive Differential Systems

Li Baolin Liang Xuefeng

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu 730070)

Abstract The relation between impulsive differential systems at fixed times and Kurzweil generalized ordinary differential equations is discussed in weaker condition than paper [3]. The local existence and uniqueness theorems of bounded variation solutions for the class of impulsive differential equations are established.

Key words impulsive differential system; Kurzweil equation; bounded variation solution

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net