兰州大学学报: 自然科学版, 2018, 54(5) / 10月
Journal of Lanzhou University: Natural Sciences, 2018, 54(5) / October

条件PA序列的条件H-R型不等式

冯德成, 李琴社, 王　英

西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070

摘　要: 将PA序列的H-R型不等式推广到了条件PA序列的情形下, 得到了条件PA序列的条件H-R型不等式, 并给出了条件PA序列的一个强大数定律.

关键词: 条件弱鞅; 条件弱下鞅; 条件H-R型不等式

中图分类号: O211.4　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 0455-2059(2018)05-0691-04

DOI: 10.13885/j.issn.0455-2059.2018.05.017

The conditional Hájeki-Rényi-type inequality for conditional PA sequences

Feng De-cheng, Li Qin-she, Wang Ying

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: The paper obtained the conditional Hájeki-Rényi-type inequality for conditional PA sequences, generalising and improving the Hájeki-Rényi-type inequality for PA sequences in the case of conditional PA sequences. We established a strong law of large numbers for conditional PA sequences.

Key words: conditional demimartingale; conditional demisubmartingale; conditional Hàjeki- Rènye inequality

AMS Subject Classifications(2010): 60E15; 60F15

用$\{X_n, n\geqslant 1\}$或$\{S_n, n\geqslant 1\}$表示定义在概率空间(Ω, A, P)上的随机变量序列. 记$S_0=0$, $X^+=\max(0, X)$, $X^-=\max(0, -X)$, I_A表示集合A的示性函数.

设X和Y是定义在概率空间(Ω, A, P)上的随机变量, 且$EX^2<+\infty$, $EY^2<+\infty$, F是A的子σ-代数. 定义X和Y的条件协方差(F-协方差)为

$$\mathrm{Cov}^F(X, Y)=E^F((X-E^FX)(Y-E^FY)),$$

其中, E^FX表示随机变量X的条件期望, 即$E^FX=E(X|F)$.

定义1　设$\{S_n, n\geqslant 1\}$是一列随机变量序列, 如果对任意的$j>i\geqslant 1$, 都有

$$E^F\{(S_j-S_i)f(S_1, S_2, \cdots, S_i)\}\geqslant 0 \quad \text{a.s.},$$

其中f是任意分量不减函数, 并且使上述条件期望有意义, 则称$\{S_n, n\geqslant 1\}$为条件弱鞅, 如果进一步假设f是非负的, 则称$\{S_n, n\geqslant 1\}$为条件弱下鞅.

定义2　称有限随机变量序列$\{X_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$在给定$F$下是条件相协的, 如果对定义在$\mathbb{R}^n$上的任意两个使下述条件协方差存在且分量不减的函数$f$和$g$, 有

$$\mathrm{Cov}^F\{f(X_1, \cdots, X_n), g(X_1, \cdots, X_n)\}\geqslant 0 \ \text{a.s.}.$$

如果随机变量序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$的任意有限子序列都是条件相协的, 则称序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$是条件PA(positively associated)序列.

注1　均值为0的条件PA序列的部分和序列

收稿日期: 2017-07-11　　**修回日期:** 2017-09-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(11461061); 西北师范大学青年教师科研能力提升计划项目(NWNU-LKQN-11-2)

作者简介: 冯德成(1972-), 男, 甘肃武威人, 副教授, 博士, e-mail: fengdc@163.com, 研究方向为随机分析及应用概率.

是一个条件弱鞅.

Hàjeki等[1]提出：设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是均值为0的独立随机变量序列，且 $\{b_n, n\geq 1\}$ 是不减的正实数序列，则对任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的正整数 $m\leq n$，都有

$$P\left(\max_{m\leq k\leq n}\left|\frac{\sum_{j=1}^{k}X_j}{b_k}\right|>\varepsilon\right)\leq\varepsilon^{-2}\left(\sum_{j=m+1}^{n}\frac{EX_j^2}{b_j^2}+\frac{1}{b_m^2}\sum_{j=1}^{m}EX_j^2\right).$$

该不等式被称为H-R型不等式. Prakasa[2]将该不等式推广到了PA序列的情形下，Sung[3]在此基础上改进了文献[2]的结论. 胡舒合等[4]用不同于文献[3]的方法对其结果做了进一步改进. Yuan等[5]将文献[3]的结论推广到了条件PA序列的情形下，得到了条件PA序列的条件H-R型不等式. 本研究将文献[4]中的一些结论推广到了条件PA序列的情形下，得到了条件PA序列的新的条件H-R型不等式，并得到条件PA序列的一个强大数定律.

引理1[6] 令 $\{S_n, n\geq 1\}$ 是一个条件弱下鞅(或条件弱鞅)，且 g 是一个不减的凸函数，$g(S_n)\in L^1$，$n\geq 1$，则 $\{g(S_i), i\geq 1\}$ 是一个条件弱下鞅.

引理2 若 $\{S_n, n\geq 1\}$ 是条件弱鞅，则 $\{S_n^+, n\geq 1\}$ 和 $\{S_n^-, n\geq 1\}$ 是条件弱下鞅.

证明 显然 $g(x)=x^+=\max\{0,x\}$ 是不减的凸函数，由引理1知 $\{S_n^+, n\geq 1\}$ 是条件弱下鞅，取 $Y_n=-S_n$，$n=1, 2, \cdots$，则 Y_n 是条件弱鞅. 由引理1知 $\{Y_n^+, n\geq 1\}$ 也是条件弱下鞅. 又因 $Y_n^+=S_n^-$，故 $\{S_n^-, n\geq 1\}$ 是条件弱下鞅.

引理3 令 $\{S_n, n\geq 1\}$ 是一个条件弱下鞅，$\{c_k, k\geq 1\}$ 是一正的不增的 F-可测随机变量序列，则对任意的 F-可测随机变量 $\varepsilon>0$ a.s. 有

$$\varepsilon P^F\left\{\max_{1\leq k\leq n}c_kS_k\geq\varepsilon\right\}\leq\sum_{j=1}^{n}c_jE^F(S_j^+-S_{j-1}^+)=$$

$$c_1E^FS_1^++\sum_{j=2}^{n}c_jE^F(S_j^+-S_{j-1}^+)\quad \text{a.s.}.$$

证明 类似于文献[7]中定理2.1的证明，易证.

定理1 设 $\{S_n, n\geq 1\}$ 是一个条件弱鞅，且 $\{c_k, k\geq 1\}$ 是一正的不增的 F-可测随机变量序列，若 $v\geq 1$，且对任意的 k 有 $E^F(|S_k|^v)<\infty$ a.s.，则对任意的 F-可测随机变量 $\varepsilon>0$ a.s. 以及 $1\leq n\leq N$，有

$$P^F\left\{\max_{n\leq k\leq N}c_k|S_k|\geq\varepsilon\right\}\leq$$

$$\frac{2}{\varepsilon^v}\left(c_n^vE^F|S_n|^v+\sum_{k=n+1}^{N}c_k^vE^F(|S_k|^v-|S_{k-1}|^v)\right)\quad \text{a.s.}.$$

证明 令 $g(x)=x^vI_{(x\geq 0)}$，则 $g(x)$ 是一个不减的凸函数，从而有 $g(S_k^+)=(S_k^+)^v$ 和 $g(S_k^-)=(S_k^-)^v$. 因为 $\{S_n, n\geq 1\}$ 是一个条件弱鞅，所以由引理1、2知 $\{(S_n^+)^v, n\geq 1\}$ 和 $\{(S_n^-)^v, n\geq 1\}$ 都是条件弱下鞅. 再由条件弱下鞅的定义，对任意的 $m\geq 1$，$\{(S_n^+)^v, n\geq m\}$ 也是一个条件弱下鞅，从而由引理3有

$$P^F\left(\max_{n\leq k\leq N}c_k^v(S_k^+)^v\geq\frac{\varepsilon^v}{2}\right)\leq$$

$$\frac{2}{\varepsilon^v}\left(c_n^vE^F(S_n^+)^v+\sum_{k=n+1}^{N}c_k^v(E^F(S_k^+)^v-E^F(S_{k-1}^+)^v)\right)\quad \text{a.s.}.\tag{1}$$

类似的，有

$$P^F\left(\max_{n\leq k\leq N}c_k^v(S_k^-)^v\geq\frac{\varepsilon^v}{2}\right)\leq$$

$$\frac{2}{\varepsilon^v}\left(c_n^vE^F(S_n^-)^v+\sum_{k=n+1}^{N}c_k^v(E^F(S_k^-)^v-E^F(S_{k-1}^-)^v)\right)\quad \text{a.s.},\tag{2}$$

由(1)、(2)式可得

$$P^F\left\{\max_{n\leq k\leq N}c_k|S_k|\geq\varepsilon\right\}\leq$$

$$P^F\left(\max_{n\leq k\leq N}c_k^v(S_k^+)^v\geq\frac{\varepsilon^v}{2}\right)+P^F\left(\max_{n\leq k\leq N}c_k^v(S_k^-)^v\geq\frac{\varepsilon^v}{2}\right)\leq$$

$$\frac{2}{\varepsilon^v}\left(c_n^vE^F|S_n|^v+\sum_{k=n+1}^{N}c_k^v(E^F|S_k|^v-E^F|S_{k-1}|^v)\right)\quad \text{a.s.}.$$

定理2 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是一个条件PA序列，满足 $E^FX_n=0$，且 $E^FX_n^2<\infty$，$n\geq 1$，$\{b_n, n\geq 1\}$ 是一正的不减的 F-可测随机变量序列，则对任意的 F-可测随机变量 $\varepsilon>0$ a.s. 及任意的正整数 $m\leq n$，有

$$P^F\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\frac{1}{b_k}\sum_{j=1}^{k}X_j\right|\geq\varepsilon\right)\leq$$

$$\frac{2}{\varepsilon^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{E^FX_j^2}{b_j^2}+2\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{Cov}^F(X_j, S_{j-1})}{b_j^2}\right)\quad \text{a.s.},$$

$$P^F\left(\max_{m\leq k\leq n}\left|\frac{1}{b_k}\sum_{j=1}^{k}X_j\right|\geq\varepsilon\right)\leq$$

$$\frac{2}{\varepsilon^2}\left(\frac{E^FS_m^2}{b_m^2}+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{E^F(S_k^2-S_{k-1}^2)}{b_k^2}\right)\leq$$

$$\frac{4}{\varepsilon^2b_m^2}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}^F(X_j, S_j)+\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\mathrm{Cov}^F(X_j, S_j)}{b_j^2}\quad \text{a.s.}.$$

证明 假设 $f(y_1, y_2, \cdots, y_j)$ 是一个分量不减的函数，若令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$n\geq 1$，则 $\{S_n, n\geq 1\}$ 是一条件弱鞅，进而对 $j=1, 2, \cdots$

$$E^F\{(S_{j+1}-S_j)f(S_1, S_2, \cdots, S_j)\}=$$

$$\mathrm{Cov}^F(X_{j+1}, f(X_1, X_1+X_2, \cdots, X_1+X_2+\cdots+X_j))\geq$$

$$0\quad \text{a.s.}.$$

若令 $c_k=\frac{1}{b_k}$，$k\geq 1$，则对任意的 F-可测随机变量 $\varepsilon>0$ a.s.，$v\geq 1$ 和 $1\leq n\leq N$，由定理1有

$$P^F\left(\max_{n\le k\le N}\left|\frac{1}{b_k}\sum_{j=1}^{k}X_j\right|\ge\varepsilon\right)\le \frac{2}{\varepsilon^v}\left(\frac{E^F|S_n|^v}{b_n^v}+\sum_{k=n+1}^{N}\frac{E^F(|S_k|^v-|S_{k-1}|^v)}{b_k^v}\right)\ \text{a.s.}. \tag{3}$$

由于

$$E^F(S_k^2-S_{k-1}^2)=E^F\{(S_k-S_{k-1})(S_k+S_{k-1})\}=E^F\{X_k(S_k+S_{k-1})\}=E^F\{X_k(2S_{k-1}+X_k)\}=2E^F(X_kS_{k-1})+E^F(X_k^2)\ \text{a.s.},$$

则在(3)式中取 n=1, N=n, v=2 时，有

$$P^F\left(\max_{1\le k\le n}\left|\frac{1}{b_k}\sum_{j=1}^{k}X_j\right|\ge\varepsilon\right)\le \frac{2}{\varepsilon^2}\left(\frac{E^FX_1^2}{b_1^2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2E^F(X_kS_{k-1})+E^FX_k^2}{b_k^2}\right)= \frac{2}{\varepsilon^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{E^FX_j^2}{b_j^2}+2\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{Cov}^F(X_j,S_{j-1})}{b_j^2}\right)\ \text{a.s.}.$$

进一步，在(3)式中取 n=m, N=n, v=2, 可以得到

$$P^F\left(\max_{m\le k\le n}\left|\frac{1}{b_k}\sum_{j=1}^{k}X_j\right|\ge\varepsilon\right)\le \frac{2}{\varepsilon^2}\left(\frac{E^FS_m^2}{b_m^2}+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{2E^F(X_kS_{k-1})+E^FX_k^2}{b_k^2}\right)\le \frac{4}{\varepsilon^2b_m^2}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Cov}^F(X_j,S_j)+\frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\mathrm{Cov}^F(X_j,S_j)}{b_j^2}\ \text{a.s.}.$$

若在定理1中取 c_k=1 a.s., n=1, N=n, 可得以下推论.

推论 1 令$\{S_n, n\ge1\}$是一个条件弱鞅，则对任意的F-可测随机变量 $\varepsilon>0$ a.s., $v\ge1$ 和 $n\ge1$, 有

$$P^F\left\{\max_{1\le k\le n}|S_k|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{2}{\varepsilon^v}E^F|S_n|^v\ \text{a.s.}.$$

下面是关于条件弱鞅的一个极限结论.

定理 3 设$\{S_n, n\ge1\}$是一个条件弱鞅，$\{c_k, k\ge1\}$是一正的不增的F-可测随机变量序列，且满足 $\lim\limits_{k\to\infty}c_k=0$. 取$v\ge1$, 对任意的$k$有 $E^F(|S_k|^v)<\infty$, 若

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^vE^F(|S_k|^v-|S_{k-1}|^v)<\infty\ \text{a.s.}, \tag{4}$$

则有 $c_nS_n\to\infty$ a.s..

证明 对任意的F-可测随机变量 $\varepsilon>0$ a.s. 有

$$P^F\left\{\sup_{k\ge n}c_k|S_k|\ge\varepsilon\right\}\le P^F\left\{\sup_{k\ge n}c_k^v(S_k^+)^v\ge\frac{\varepsilon^v}{2}\right\}+P^F\left\{\sup_{k\ge n}c_k^v(S_k^-)^v\ge\frac{\varepsilon^v}{2}\right\}\ \text{a.s.}. \tag{5}$$

由引理3, 因为$\left\{(S_n^+)^v, n\ge1\right\}$和$\left\{(S_n^-)^v, n\ge1\right\}$都是条件弱下鞅，所以(5)式右边几乎处处不超过

$$2\varepsilon^{-v}\left\{c_n^vE^F(S_n^+)^v+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^vE^F\left[(S_k^+)^v-(S_{k-1}^+)^v\right]+c_n^vE^F(S_n^-)^v+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^vE^F\left[(S_k^-)^v-(S_{k-1}^-)^v\right]\right\}= 2\varepsilon^{-v}\left\{c_n^vE^F|S_n|^v+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^vE^F\left[|S_k|^v-|S_{k-1}|^v\right]\right\}\ \text{a.s.}.$$

由 Kronecker 引理及(4)式可得

$$\lim_{n\to\infty}c_n^vE^F|S_n|^v=0\ \text{a.s.}.$$

再根据(5)式可得

$$\lim_{n\to\infty}P^F\left\{\sup_{k\ge n}c_k|S_k|\ge\varepsilon\right\}=0\ \text{a.s.},$$

即 $c_nS_n\to\infty$ a.s..

由于均值为0的条件PA序列的部分和序列是一个条件弱鞅，故有如下关于条件PA序列的Kolmogorov强大数定理.

推论 2 设$\{X_n, n\ge1\}$是L^2上均值为0的条件PA序列，其中 $S_j=\sum_{i=1}^{j}X_i$ 且 S_0=0. 假设

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}\mathrm{Cov}^F(X_k, S_k)<\infty\ \text{a.s.},$$

则 $\frac{S_n}{n}\to0$ a.s..

证明 由于$\{X_n, n\ge1\}$是L^2上均值为0的条件PA序列，则$\{S_n, n\ge1\}$是条件弱鞅. 在定理3中取 $v=2$, $c_n=\frac{1}{n}$, 则

$$\frac{S_n}{n}\to0\ \text{a.s.}$$

在条件 $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}E^F(S_k^2-S_{k-1}^2)<\infty$ a.s. 下成立.

事实上

$$E^F\left(S_k^2-S_{k-1}^2\right)=E^F\left\{(S_k-S_{k-1})(S_k+S_{k-1})\right\}=E^F\left\{X_k(2S_{k-1}+X_k)\right\}=2E^F\left(X_kS_{k-1}\right)+E^F\left(X_k^2\right)\ \text{a.s.},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}E^F(S_k^2-S_{k-1}^2)=2\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}E^F\left(X_kS_{k-1}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}E^F\left(X_k^2\right)\le2\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}E^F\left(X_kS_k\right)<\infty\ \text{a.s.}.$$

注 2 当$\{X_n, n\ge1\}$是一个条件PA序列时，由文献[5]的性质3知，$\left\{X_n-E^FX_n, n\ge1\right\}$是均值为0的条件PA序列，因此推论2即为文献[8]中的定理5.2.

参考文献

[1] Hájeki J, Rényi A. A generalization of an inequality cf Kolmogorov[J]. Acta Mathematica Hungarica, 1955, 6(3/4): 281-283.

（下转第697页）

$$(-1)^{k+(k-1)}\sigma_2 S_{k-2}+(-1)^{k+k}\sigma_1 S_{k-1}=$$
$$(-1)^{k+1}k\sigma_k+(-1)^{k}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^{k-1}\sigma_{k-2}S_{k-2}+\cdots+$$
$$(-1)^{3}\sigma_2 S_{k-2}+(-1)^{2}\sigma_1 S_{k-1}=S_k.$$

由第2数学归纳法得证.

因此, 当$1\leqslant k\leqslant n$时, 将

$$\begin{cases}\sigma_n=(-1)^n a_0,\ \sigma_{n-1}=(-1)^{n-1}a_1,\\ \sigma_{n-2}=(-1)^{n-2}a_2,\ \sigma_{n-3}=(-1)^{n-3}a_3,\\ \quad\cdots\\ \sigma_2=(-1)^2 a_{n-2},\ \sigma_1=(-1)a_{n-1},\end{cases}$$

代入结果, 从而得

$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{S}_k=$

$$\begin{vmatrix}(-1)a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2(-1)^2a_{n-2} & (-1)a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 3(-1)^3a_{n-3} & (-1)^2a_{n-2} & (-1)a_{n-1} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (k-1)(-1)^{k-1}a_{n-k+1} & (-1)^{k-2}a_{n-k+2} & (-1)^{k-3}a_{n-k+3} & \cdots & (-1)a_{n-1} & 1\\ k(-1)^k a_{n-k} & (-1)^{k-1}a_{n-k+1} & (-1)^{k-2}a_{n-k+2} & \cdots & (-1)^2a_{n-2} & (-1)a_{n-1}\end{vmatrix}.$$

推论2 设$\boldsymbol{A}$为数环R上的m阶矩阵,$\boldsymbol{A}$的特征多项式为$P(\lambda)=\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+a_{m-2}\lambda^{m-2}+\cdots+a_1\lambda+a_0$, 其中$a_0, a_1,\cdots,a_{m-1}$是$R$中的元素, 则

$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^k=$

$$\begin{vmatrix}(-1)a_{m-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2(-1)^2a_{m-2} & (-1)a_{m-1} & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 3(-1)^3a_{m-3} & (-1)^2a_{m-2} & (-1)a_{m-1} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (k-1)(-1)^{k-1}a_{m-k+1} & (-1)^{k-2}a_{m-k+2} & (-1)^{k-3}a_{m-k+3} & \cdots & (-1)a_{m-1} & 1\\ k(-1)^k a_{m-k} & (-1)^{k-1}a_{m-k+1} & (-1)^{k-2}a_{m-k+2} & \cdots & (-1)^2a_{m-2} & (-1)a_{m-1}\end{vmatrix}.$$

证明 由引理3, 数环R可以嵌入到整环中, 又根据引理4, 整环的分式环是域, 将整环的分式域延拓到代数闭域$\bar{R}$, 再由定理2可知

$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{S}_k=$

$$\begin{vmatrix}(-1)a_{m-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2(-1)^2a_{m-2} & (-1)a_{m-1} & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 3(-1)^3a_{m-3} & (-1)^2a_{m-2} & (-1)a_{m-1} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (k-1)(-1)^{k-1}a_{m-k+1} & (-1)^{k-2}a_{m-k+2} & (-1)^{k-3}a_{m-k+3} & \cdots & (-1)a_{m-1} & 1\\ k(-1)^k a_{m-k} & (-1)^{k-1}a_{m-k+1} & (-1)^{k-2}a_{m-k+2} & \cdots & (-1)^2a_{m-2} & (-1)a_{m-1}\end{vmatrix}.$$

参考文献

[1] 刘兴祥, 陈伟. n 元 m 阶方阵的 k 次方幂和的一种新算法[J]. 三峡大学学报: 自然科学版, 2011, 33(4): 96-100.

[2] 刘仲奎, 杨永保, 程辉, 等. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 190.

[3] 曹学锋. Newton 公式和 Vieta 定理的等价性[J]. 高等数学研究, 2013, 16(1): 14-15.

[4] 丘维声. 高等代数[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 562-563.

[5] Thomas W H. Algebra, GTM 73[M]. New York: Springer-Verlag, 1974: 119, 145.

[6] 张禾瑞. 近世代数基础(修订本)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978: 89.

[7] 林志红. Newton 公式和韦达定理的等价性[J]. 中国科教创新导刊, 2009(20): 91.

(责任编辑: 张 勇)

(上接第693页)

[2] Prakasa R. Hajeki-Renyi-type inequality for associated sequences[J]. Statistics and Probability Letters, 2002, 57(2): 139-143.

[3] Sung H S. A note on the Hajeki-Renyi inequality for associated random variables[J]. Statistics and Probability Letters, 2008, 78(7): 885-889.

[4] Hu Shu-he, Wang Xue-jun, Yang Wen-zhi, et al. The Hajeki-Reny-type inequality for associated random variables[J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79(15): 884-888.

[5] Yuan De-mei, Yang Yu-kun. Conditional versions of limit theorems for conditionally associated random variables[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 376(1): 282-293.

[6] Tasos C C, Milto H. Conditional demimartingales and related results[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 398(1): 380-391.

[7] Tasos C C. Maximal inequalities for demimartingales and a strong law of large numbers[J]. Statistics and Probability Letters, 2000, 50(4): 357-363.

[8] Wang Xing-hui, Wang Xue-jun. Some inequalities for conditional demimartingales and conditional N-demimartingales[J]. Statistics and Probability Letters, 2013, 83(3): 700-709.

(责任编辑: 张 勇)