

文章编号: 1001-246X(2019)06-0682-09

磁化尘埃等离子体中的冲击波及其横向扰动稳定性

庞军刚^{1,2}, 宋琳^{1,2}, 唐娜^{1,2}, 杨雪滢^{1,2}, 李晓霖^{1,2},
席忠红^{1,2,3,*}, 石玉仁^{1,2,*}

(1. 西北师范大学物理与电子工程学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 甘肃 兰州 730070;
3. 甘肃民族师范学院物理与水电工程系, 甘肃 合作 747000)

摘 要: 利用双曲函数法得到 ZKB 方程的一组冲击波解, 并对波在横向扰动下的动力学稳定性进行研究. 对冲击波解进行线性稳定性分析, 并构造高精度的有限差分格式求解所得本征值问题. 结果表明: 对于正耗散的情形, 该冲击波在线性意义下稳定; 对于负耗散情形, 该冲击波在线性意义下不稳定. 构造有限差分格式对受扰动的冲击波进行非线性动力学演化. 结果表明: 对于正耗散的情况, 该冲击波是稳定的.

关键词: Zakharov-Kuznetsov-Burgers 方程; 动力学稳定性; 线性稳定性分析

中图分类号: O411.1

文献标志码: A

DOI: 10.19596/j.cnki.1001-246x.7941

0 引言

尘埃等离子体广泛存在于天体物理环境中, 如彗星、地球电离层下部、行星磁层等^[1-4], 也存在于实验室等离子体环境^[5-6]. 对尘埃等离子体中非线性波的研究具有重要的理论意义和实际应用价值^[7-8]. 尘埃等离子体中主要有两种类型的声波: 运动离子与静止尘埃颗粒的高频尘埃离子声波(DIAW), 运动尘埃颗粒的低频尘埃声波(DAW). 其中, 最重要的低频波之一是尘埃离子声波(DIA). 对这两种类型的声波都进行了广泛和深入的理论^[9-10]和实验^[11]研究. DAW 的存在首先由 Rao 预测^[12]; Shukla 和 Silin 在理论上预测了 DIAW 的存在^[13], 后来 Barkan 等在实验中观察到 DIAW^[14].

文献[15-17]考虑含有高能电子和正电子的尘埃离子声波的传播, 通过约化摄动法^[18-21]获得了描述尘埃离子声波传播的 Zakharov-Kuznetsov-Burgers (ZKB) 方程. Moslem 和 Sabry 给出了 ZKB 方程的一组冲击波解^[16], 并且研究了充电过程中的三种情形: 存在较强耗散而色散效应可忽略时, 存在与耗散效应有关的冲击波; 如果没有耗散(或耗散很微弱), 非线性作用和色散效应相平衡, 这时存在钟状孤立波; 若耗散与色散均不能忽略时, 系统中存在一种类似钟状孤立波与冲击波叠加状态的冲击波. Zhen 等^[17]在研究尘埃等离子体中尘埃离子声波时发现: 当尘埃粒子中的电子数量减少或者这种尘埃粒子的质量变大时, 孤子的能量增加; 系统中存在混沌运动, 而且混沌状态随着尘埃粒子中电子的数量或尘埃粒子的质量减少而增强. El-Bedwehy 等^[17]研究了超热电子和正电子(用卡伯分布表示)的 electron-positron-ion 磁流体中三维离子声孤波和激波的传播, 通过考虑离子流体之间的运动粘度引入耗散效应, 发现可以用 ZKB 方程描述该系统中非线性波的传播, 且发现系统中耗散效应的存在与否决定了非线性波为孤立波或冲击波.

本文用 ZKB 方程描述磁化尘埃等离子体中存在的冲击波, 研究在横向扰动下的动力学稳定性. 发现系统中存在两种类型的冲击波: 单调型冲击波与振荡型冲击波, 并利用双曲函数法给出特殊情形下单调型冲击波的一解析解. 对该冲击波进行线性稳定性分析, 构造高精度数值格式求解所得本征值问题. 构造有限差分格式对冲击波的传播进行非线性动力学演化, 与线性稳定性分析结论一致. 所用方法, 也可用于其他非线性动力系统的研究.

收稿日期: 2018-08-12; 修回日期: 2018-11-26

基金项目: 国家自然科学基金(11565021, 11047010)及西北师范大学青年教师科研能力提升计划项目(NWNU-LKQN-16-3)资助

第一作者: 庞军刚(1992-), 男, 硕士研究生, 主要研究领域为非线性物理, E-mail: 1773799211@qq.com

* 通信作者: 石玉仁, E-mail: shiyur@nwnu.edu.cn; 席忠红, E-mail: zhifuxian@163.com

1 ZKB 方程及其冲击波解

文献 [15-17] 研究了由低温正离子、等温电子和带电尘埃颗粒组成的磁化尘埃等离子体中有限小振幅尘埃离子声波的传播, 发现可用下述 ZKB 方程描述该非线性波

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} + s_1 \phi \frac{\partial \phi}{\partial X} + s_2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} + s_3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^2 \partial X} + s_3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial Z^2 \partial X} - s_4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = 0, \tag{1}$$

其中 s_1, s_4 为非线性与耗散系数, s_2 与 s_3 为色散项系数. 当 $s_4 > 0$ 时, 称系统是正耗散的; 当 $s_4 < 0$ 时, 称系统是负耗散的. 各系数与具体物理量的关系较为复杂, 在文献 [17] 中给出. 现寻找方程 (1) 下列形式的行波

$$\phi(X, Y, Z, T) = u(\xi), \quad \xi = kX + lY + mZ - \omega T, \tag{2}$$

其中 (k, l, m) 为波矢量, 则有

$$-\omega \frac{du}{d\xi} + s_1 k u \frac{du}{d\xi} + (s_2 k^3 + s_3 k m^2 + s_3 k l^2) \frac{d^3 u}{d\xi^3} - s_4 k^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} = 0. \tag{3}$$

方程 (3) 两边对 ξ 积分, 得

$$r_1 u_{\xi\xi} - r_2 u_{\xi} + \frac{1}{2} u^2 - r_3 u = C, \tag{4}$$

其中 $r_1 = (s_2 k^2 + s_3 m^2 + s_3 l^2) / s_1, r_2 = s_4 k / s_1, r_3 = \omega / (s_1 k), C$ 为积分常数.

文献 [23] 对 Burgers-K-dV 方程的有界行波解作定性分析, 得如下常微分方程

$$\beta w_{\xi\xi} - \gamma w_{\xi} + \frac{1}{2} w^2 - cw = K, \tag{5}$$

其中 β, γ 为色散与耗散系数 ($\beta > 0$), c 为波速, K 为积分常数. 文献 [23] 研究表明, 方程 (5) 存在两种类型的有界行波: 当 $\gamma^2 \geq 4\beta\sqrt{c^2 + 2K}$ 时, 为图 1(a) 所示单调型冲击波; 当 $\gamma^2 < 4\beta\sqrt{c^2 + 2K}$ 时, 为图 1(b) 所示振荡型冲击波. 当 $\beta < 0$ 时, 也有类似结论.

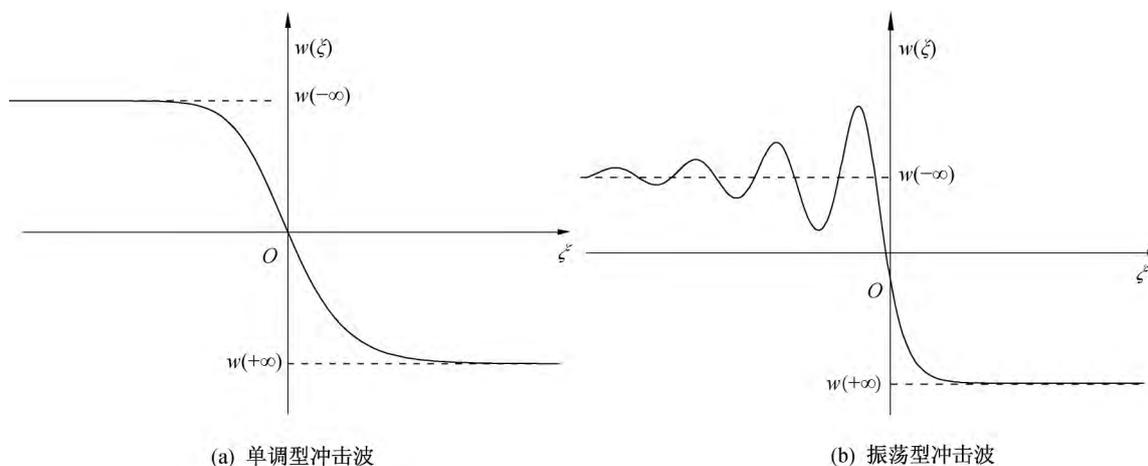


图 1 Burgers-K-dV 方程的 (a) 单调型冲击波和 (b) 振荡型冲击波

Fig. 1 Profiles of the Burgers-K-dV equation (a) monotonic shock wave; (b) oscillating shock wave

将方程 (4) 与 (5) 进行对照, 则有如下结论 (设 $r_1 > 0$): 在变换 (2) 下, 对合适的积分常数 C , ZKB 方程 (1) 存在两种类型的有界冲击波. 当 $r_2^2 \geq 4r_1\sqrt{r_3^2 + 2C}$ 时, 为图 1(a) 所示单调型冲击波; 当 $r_2^2 < 4r_1\sqrt{r_3^2 + 2C}$ 时, 为图 1(b) 所示振荡型冲击波. 当 $r_1 < 0$ 时, 也有类似结论.

用双曲函数展开法^[24-28]可得 ZKB 方程的一类冲击波

$$\phi(X, Y, Z, T) = u_0(\xi) = \frac{6s_4 k^2 + 5\omega}{5ks_1} - \frac{12s_4 k}{5s_1} \tanh(\xi) - \frac{6s_4 k}{5s_1} \tanh^2(\xi), \tag{6}$$

其中 $k = (\varepsilon_1 s_4 + \varepsilon_2 \sqrt{s_4^2 - 400s_2 s_3 (l^2 + m^2)}) / (20s_2), \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1, k \neq 0, \omega$ 为任意常数. 容易验证, 这是 ZKB 方程的一组单调型冲击波. 对 ZKB 方程的振荡型冲击波, 就笔者所知, 目前尚没有给出解析解.

2 ZKB 方程冲击波的线性稳定性

设 $\phi = \phi_0(X, Y, Z, T)$ 为方程 (1) 的精确解, 对该解施加扰动 $\delta\phi(X, Y, Z, T)$. 将扰动解 $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ ($|\delta\phi| \ll 1$) 代入式 (1), 仅保留 $\delta\phi$ 的一次量, 得

$$\frac{\partial \delta\phi}{\partial T} + s_1 \frac{\partial(\phi_0 \delta\phi)}{\partial X} + s_2 \frac{\partial^3 \delta\phi}{\partial X^3} + s_3 \frac{\partial^3 \delta\phi}{\partial X \partial Y^2} + s_3 \frac{\partial^3 \delta\phi}{\partial X \partial Z^2} - s_4 \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial X^2} = 0. \quad (7)$$

方程 (7) 为关于 $\delta\phi$ 的齐次线性偏微分方程, 通常情况下解不唯一, 且满足叠加原理.

对 ZKB 方程冲击波 $\phi = u_0(\xi)$ 施加如下扰动

$$\delta\phi(X, Y, Z, T) = \varepsilon u_1(\xi) \exp[i(k_y Y + k_z Z) + \lambda t], \quad (8)$$

其中 $|\varepsilon| \ll 1$ (k_y, k_z) 为扰动波矢. 若 $\text{Re}(\lambda) > 0$, 则扰动波的振幅将随时间指数式增长, 故该冲击波在线性意义下不稳定. 反之, 若 $\text{Re}(\lambda) \leq 0$, 则扰动波的振幅不变或随时间指数式减小, 该冲击波在线性意义下稳定. 将式 (8) 代入式 (7) 并略去 ε 的高阶量, 得

$$L u_1 = \lambda u_1, \quad (9)$$

其中,

$$L = (\omega + s_3 k k_y^2 + s_3 k k_z^2) \frac{d}{d\xi} - s_1 k \frac{d}{d\xi} u_0 - k(2is_3 l k_y + 2is_3 m k_z - s_4 k) \frac{d^2}{d\xi^2} - k(s_2 k^2 + s_3 m^2 + s_3 l^2) \frac{d^3}{d\xi^3}. \quad (10)$$

考虑扰动具有局域性, 则边界条件为 $u_1(\pm\infty) = 0$. 方程 (9) 与边界条件共同构成本征问题, 通常很难得到它的精确解. 但当 $k_y = k_z = 0$ 时, 容易看出 $\lambda = 0$ 为其一本征值, 属于它的本征矢为 $u_1(\xi) = du_0/d\xi$. 一般情况下, 可采用有限差分法对前述本征问题进行数值求解, 具体做法如下.

首先将区间 $\xi \in (-\infty, +\infty)$ 截断为有限长区间 $\xi \in [a, b]$, 然后把区间 N 等分. 记步长 $h = (b - a) / N$, $u_1 = (u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,N})^T$, 上标 T 表示转置. $u_{1,j} \approx u_1(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. 采用 6 阶中心差分格式对导数项进行近似, 有

$$\begin{cases} \left. \frac{du_1}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_j} = \frac{1}{h} \sum_{n=-3}^3 f_n^{(1)} u_{1,j+n} + O(h^6), \\ \left. \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} \right|_{\xi=\xi_j} = \frac{1}{h^2} \sum_{n=-3}^3 f_n^{(2)} u_{1,j+n} + O(h^6), \\ \left. \frac{d^3 u_1}{d\xi^3} \right|_{\xi=\xi_j} = \frac{1}{h^3} \sum_{n=-4}^4 f_n^{(3)} u_{1,j+n} + O(h^6), \end{cases} \quad (11)$$

其中,

$$(f_{-3}^{(1)}, \dots, f_3^{(1)}) = (-1/60, 3/20, -3/4, 0, 3/4, -3/20, 1/60),$$

$$(f_{-3}^{(2)}, \dots, f_3^{(2)}) = (1/90, -3/20, 3/2, -49/18, 3/2, -3/20, 1/90),$$

$$(f_{-4}^{(3)}, \dots, f_4^{(3)}) = (-7/240, 3/10, -169/120, 61/30, 0, -61/30, 169/120, -3/10, 7/240).$$

经上述方法离散后, 前述本征问题转化为

$$M u_1 = \lambda u_1, \quad (12)$$

M 为方程 (9) 左端离散化后的 N 阶方阵

$$M = (\omega + s_3 k k_y^2 + s_3 k k_z^2) H_1 - s_1 k \text{diag}(u_0) H_1 - s_1 k \text{diag}(u_0') - k(2is_3 m k_z + 2is_3 l k_y - s_4 k) H_2 - k(s_2 k^2 + s_3 m^2 + s_3 l^2) H_3, \quad (13)$$

其中 $u_0 = [u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}, \dots, u_{0,N}]$, $u_{0,j} = u_0(\xi_j)$, $u_0' = [u_{0,1}', u_{0,2}', u_{0,3}', \dots, u_{0,N}']$, $u_{0,j}' = u_0'(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. 计算时区间 $[a, b]$ 取足够宽, 则边界条件近似满足, 可采用周期性边界条件. 矩阵 H_1, H_2, H_3 均为拓普利兹型矩阵, 很容易构造. 实际求解时, 取 $\xi \in [-50, 50]$, $N = 1000$. 一般可通过选择合适的截断区间和节点数得到满意的结果.

图 2 显示了 $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, $l = m = 0$, $k = s_4 / (10s_2)$, $k_y = 0.1\pi$, $k_z = 0$, $\omega = 1$ 时 ZKB 方程冲击波在不同耗散情形下的线性稳定性谱, 其中图 2(a) 为正耗散情形而图 2(b) 为负耗散情形. 从图 2(a) 可以

看出: 在误差范围内, 正耗散情况下特征值的实部不大于 0, 即所有本征模均 $\text{Re}(\lambda) \leq 0$, 所以此时的冲击波是线性稳定的. 虽然在数值计算时无法穷尽所有参数, 但在计算过程中所尝试的所有参数情况下, 特征值实部均没出现大于零的情况. 表明在正耗散情形下, 冲击波是稳定的. 从图 2 (b) 可以看出: 负耗散情况下, 存在实部大于 0 的特征值, 即存在 $\text{Re}(\lambda) > 0$ 的本征模, 表明此时的冲击波是线性不稳定的. 大量数值结果表明, 冲击波的稳定性完全决定于耗散系数 s_4 , 而与色散系数 s_2, s_3 与非线性系数 s_1 无关(但 s_1, s_2, s_3 会影响扰动的增长或衰减速度).

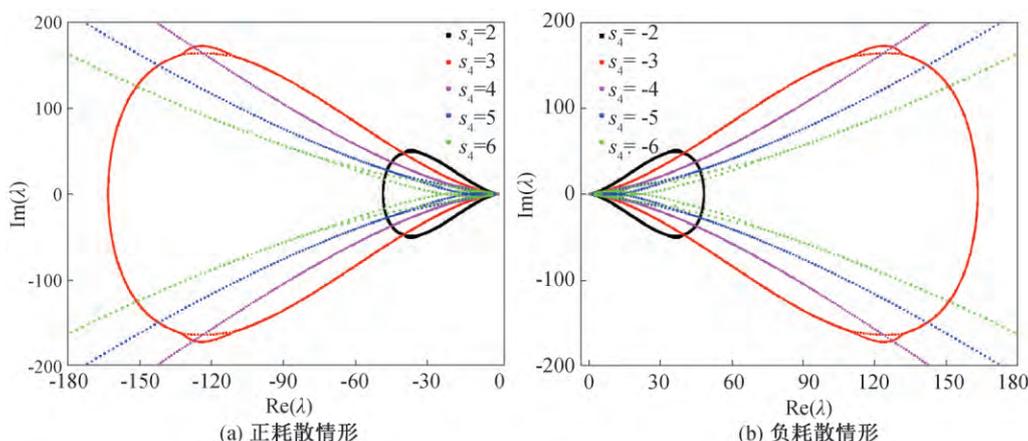


图 2 ZKB 方程冲击波的线性稳定性谱

Fig. 2 Linear stability spectrum of shock waves of ZKB equation (a) positive dissipation case; (b) negative dissipation case

从图 2 还可看出, 当 s_4 变为 $-s_4$ 时, 本征谱表现出镜像对称. 该结论(注意此时 $l = m = 0$) 可证明如下: 记 $k = k(s_4)$, $u_0(\xi) = u_0(\xi; s_4)$, $u_1(\xi) = u_1(\xi; s_4)$, $\lambda = \lambda(s_4)$, 分别表示取参数 s_4 时的 k, u_0, u_1, λ . 本征方程(9) 改写为

$$\begin{aligned} & [\omega + s_3 k(s_4) k_y^2 + s_3 k(s_4) k_z^2] u_1'(\xi; s_4) - s_1 k(s_4) [u_0(\xi; s_4) u_1(\xi; s_4)]' + \\ & s_4 k^2(s_4) u_1''(\xi; s_4) - s_2 k^3(s_4) u_1'''(\xi; s_4) = \lambda(s_4) u_1(\xi; s_4), \end{aligned} \tag{14}$$

其中撇号仍表示 $d/d\xi$. $l = m = 0$ 时 $k(-s_4) = -k(s_4)$, $u_0(\xi; -s_4) = u_0(\xi; s_4) - 2\omega/(k(s_4) s_1)$. 当 s_4 变为 $-s_4$ 而其他参量均不变时, 本征方程变为

$$\begin{aligned} & [\omega + s_3 k(s_4) k_y^2 + s_3 k(s_4) k_z^2] u_1'(\xi; -s_4) - s_1 k(s_4) [u_0(\xi; s_4) u_1(\xi; -s_4)]' + \\ & s_4 k^2(s_4) u_1''(\xi; -s_4) - s_2 k^3(s_4) u_1'''(\xi; -s_4) = -\lambda(-s_4) u_1(\xi; -s_4). \end{aligned} \tag{15}$$

比较式(14)、(15)可知: 若 λ 为取参数 s_4 时的本征值, 则 $-\lambda$ 为取参数 $-s_4$ 时的本征值, 故本征谱有图 2 所示镜像对称的结构. 这一结果也蕴含着下述结论: 若正耗散时冲击波线性稳定, 则负耗散时的冲击波必线性不稳定.

在 $lk_y + mk_z = 0$ 情形下, 图 2 所示的本征值以复共轭的形式成对出现, 该结论很容易从本征方程(9) 得到证明, 前面数值方法也很好地保持了该性质. 但当 $lk_y + mk_z \neq 0$ 时, 该对称性被破坏, 这一结论也得到了数值结果的证实.

图 3 (a) ~ (d) 显示了属于不同本征值的本征矢实部波形(参数同图 2 (a)). 虚部波形与此类似, 故略. 可以看出, 随着 $|\xi|$ 的增加, $\mu_1(\xi)$ 逐渐趋于 0, 说明本征矢较好地满足 0 边界条件. 图 3 (c)、(d) 中的本征矢较 (a)、(b) 中显示的要“胖”. 由于数值计算在有限宽度的区间上进行, 那些较“胖”的本征矢, 宽度可能会大于计算区间的宽度, 这样就会使得 0 边界条件无法满足. 尽管这样, 但从实际计算结果来看, 那些“胖”本征矢仍在边界处有趋于 0 的趋势, 计算结果仍然可靠.

3 ZKB 方程冲击波的非线性动力学演化

前面线性稳定性分析结果表明: 在正耗散情形下 ZKB 方程的冲击波线性稳定. 下面对该冲击波在受扰

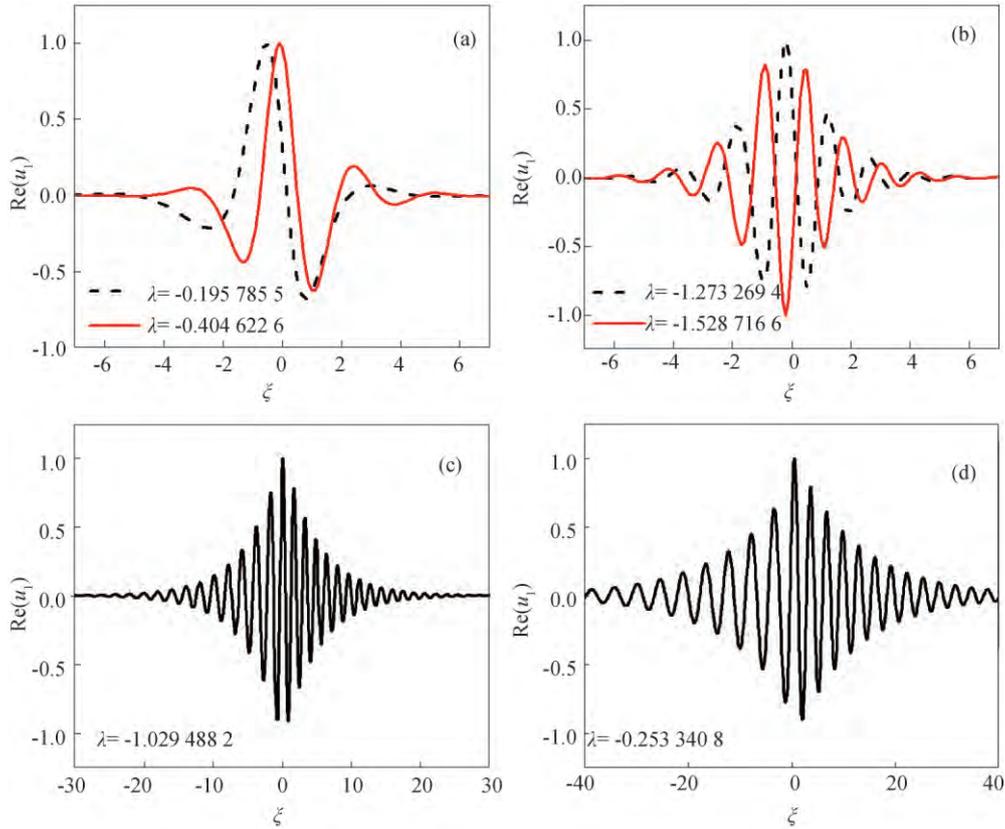


图 3 $s_4=2$ 时本征矢实部波形图

Fig. 3 Wave profiles of real parts of eigenvectors at $s_4=2$

动的情况下进行长时间动力学演化来考察其非线性动力学稳定性. 为数值计算方便起见, 下面仅考虑二维情形. 即取 $\partial/\partial Z = 0, m = 0, k_z = 0$, 但所用方法的思想也适用于三维情形.

对方程(1)构造下列有限差分格式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta T} \delta_t \phi_{j,p}^n + \frac{s_1}{4\Delta X} \frac{\phi_{j,p}^{n+1} + \phi_{j,p}^n}{2} (\delta_x \phi_{j,p}^{n+1} + \delta_x \phi_{j,p}^n) + \frac{s_2}{4\Delta X^3} (\delta_x^3 \phi_{j,p}^{n+1} + \delta_x^3 \phi_{j,p}^n) + \\ \frac{s_3}{4\Delta X \Delta Y^2} (\delta_x \delta_y^2 \phi_{j,p}^n + \delta_x \delta_y^2 \phi_{j,p}^{n+1}) - \frac{s_4}{2\Delta X} (\delta_x^2 \phi_{j,p}^{n+1} + \delta_x^2 \phi_{j,p}^n) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

其中, $\Delta T, \Delta X, \Delta Y$ 分别表示时间和空间步长 $\phi_{j,p}^n \approx \phi(X_j, Y_p, T_n)$,

$$\begin{aligned} \delta_t \phi_{j,p}^n &= \phi_{j,p}^{n+1} - \phi_{j,p}^n, \quad \delta_x \phi_{j,p}^n = \phi_{j+1,p}^n - \phi_{j-1,p}^n, \quad \delta_y \phi_{j,p}^n = \phi_{j,p+1}^n - \phi_{j,p-1}^n, \\ \delta_x^2 \phi_{j,p}^n &= \phi_{j+2,p}^n - 2\phi_{j,p}^n + \phi_{j-2,p}^n, \quad \delta_y^2 \phi_{j,p}^n = \phi_{j,p+2}^n - 2\phi_{j,p}^n + \phi_{j,p-2}^n, \\ \delta_x^3 \phi_{j,p}^n &= \phi_{j+3,p}^n - 3\phi_{j+1,p}^n + 3\phi_{j-1,p}^n - \phi_{j-3,p}^n, \\ \delta_x \delta_y^2 \phi_{j,p}^n &= \phi_{j+1,p+1}^n - 2\phi_{j+1,p}^n + \phi_{j+1,p-1}^n + \phi_{j-1,p+1}^n - 2\phi_{j-1,p}^n + \phi_{j-1,p-1}^n. \end{aligned}$$

该格式为两层隐式格式, 其截断误差为

$$\begin{aligned} T(X_j, Y_p, T_n) &= \frac{1}{12} [2\phi_{TTT} + 3s_1\phi_{TT\phi_X} + 3s_1\phi_{T\phi_{XT}} + 3s_1\phi\phi_{TTX} + 3s_2\phi_{TTXX} + 3s_3\phi_{TTXY} + 3s_4\phi_{TTX}]_{j,p}^n \Delta T^2 + \\ &O(\Delta T^4) + \frac{1}{12} [2s_1\phi\phi_{XXX} + 3s_2\phi_{XXXX} + 2s_3\phi_{XXYY} + s_4\phi_{XXX}]_{j,p}^n \Delta X^2 + O(\Delta X^4) + \frac{1}{12} s_3\phi_{XYYY}|_{j,p}^n \Delta Y^2 + \\ &O(\Delta Y^4) = O(\Delta T^2 + \Delta X^2 + \Delta Y^2). \end{aligned} \tag{17}$$

故该格式为二阶精度格式. 对格式(16)进行数值稳定性分析^[29]: 记 $(u_{j,p}^{n+1} + u_{j,p}^n)/2$ 为常数 σ , 并设 $\phi_{j,p}^n = V^n \exp(iq_x j \Delta X) \exp(iq_y p \Delta Y)$ 其中 q_x, q_y 为任意实数, 代入式(16)后得误差增长因子的模方为

$$|P|^2 = \frac{|1 + g|^2}{|1 - g|^2} = \frac{1 + |g|^2 + g + g^*}{1 + |g|^2 - g - g^*}, \quad (18)$$

其中“*”表示复共轭，

$$g = -\frac{2s_4\Delta TS_X^2}{\Delta X^2} + i\left(\frac{4s_2\Delta TC_X S_X^3}{\Delta X^3} - \frac{s_1\sigma\Delta TC_X S_X}{2\Delta X} + \frac{4s_3\Delta TC_X S_X S_Y^2}{\Delta X\Delta Y^2}\right),$$

$$C_X = \cos(q_X\Delta X/2), \quad S_\kappa = \sin(q_\kappa\Delta\kappa/2), \quad \kappa = X, Y.$$

由于

$$|1 + g|^2 - |1 - g|^2 = 2(g + g^*) = 4\text{Re}(g) = -8s_4\Delta TS_X^2/\Delta X^2. \quad (19)$$

故知: 当 $s_4 < 0$ 时, 总有 $|P|^2 \geq 1$, 表明负耗散时总存在不稳定波模, 差分格式绝对不稳定; 当 $s_4 > 0$ 时, $|P|^2 \leq 1$, 表明正耗散时所有波模均稳定, 差分格式绝对稳定.

图 4 显示了 $s_1 = s_2 = s_3 = 1, \Delta T = 1 \times 10^{-3}, \Delta X = \Delta Y = 0.1, \sigma = 2$ 时不同 s_4 值情况下 $|P|^2$ 随 q_X, q_Y 的变化. 从图 4(a) 可以看出, 当 $s_4 = -1$ 时, 对所有 q_X, q_Y 都有 $|P|^2 \geq 1$, 表明此时差分格式绝对不稳定; 从图 4(b) 可以看出, 当 $s_4 = 1$ 时, 对所有 q_X, q_Y 都有 $|P|^2 \leq 1$, 表明此时差分格式稳定. 该结论与前面的理论分析完全一致.

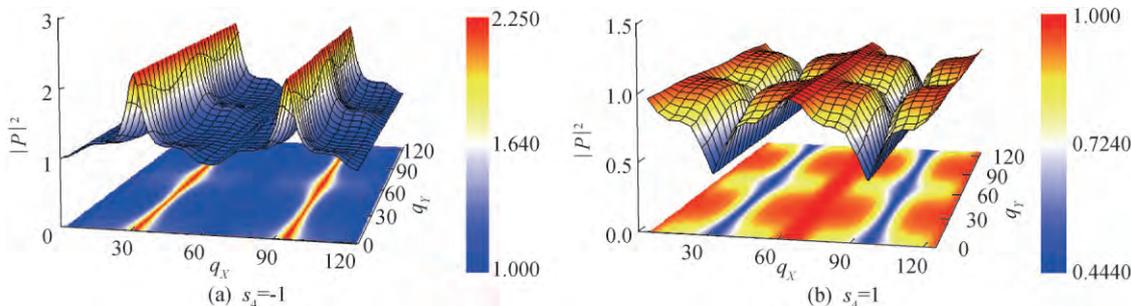


图 4 $|P|^2$ 随 q_X, q_Y 的变化
Fig. 4 Profiles of $|P|^2$ versus q_X, q_Y

对式(16)的求解, 可采用迭代法进行. 值得注意的是, 尽管线性稳定性分析结果表明 $s_4 > 0$ 时该格式无条件稳定, 但实际计算时发现, 在给定的参数条件下, 时间步长 ΔT 仍需足够小才能保证数值稳定性.

数值演化时, 冲击波由式(6)给出, 初始扰动取为下列形式

$$\delta\phi(X, Y, 0) = \tilde{A} \cos(k_y Y) \exp\left[-\frac{(X+X_0)^2 + (Y+Y_0)^2}{W^2}\right], \quad (20)$$

其中 $\tilde{A}(X_0, Y_0)$, W 为扰动波的振幅、中心位置和宽度. 初始条件为

$$\phi(X, Y, 0) = \phi_0(X, Y, 0) + \delta\phi(X, Y, 0), \quad (21)$$

各量取为 $\Delta X = 0.2, \Delta Y = 0.25, \tilde{A} = 0.1, W = 5$. 数值计算在有限宽度区间上进行, 将 X 方向区间 J 等分, 各节点记为 $X_j(j = 0, 1, \dots, J-1, J)$. 考虑到冲击波的结构特点, X 方向采用绝热边界条件 $\phi_{0,p}^n = \phi_{1,p}^n = \phi_{2,p}^n, \phi_{J,p}^n = \phi_{J-1,p}^n = \phi_{J-2,p}^n$ 而 Y 方向采用周期性边界条件.

图 5 显示了 $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1, l = m = 0, k_y = 0.1\pi, k = s_4/(10s_2) = 1/10, \omega = 1$ 时受扰动的冲击波在 $t = 0$ 与 $t = 100$ 时的波形. 此时波的相速度 $v_p = \omega/k = 10$, 表明波沿 X 轴向右传播. 可以看出, 经过足够长时间后, 扰动的振幅已非常小, 表明在正耗散情况下, ZKB 方程的冲击波在横向扰动下是动力学稳定的. 该结果与前面线性稳定性分析所得结论一致.

研究过程中, 计算了其他一些参数情况, 所得结论与这里类似, 故略. 值得注意的是, 负耗散情形下, 由于前述数值方法不稳定, 从而无法对波进行动力学演化. 这一特点可能也意味着负耗散时冲击波不稳定.

文献[17]中给出了磁化尘埃等离子体中各系数 $s_j(j = 1, 2, 3, 4)$ 与各物理量的关系, 其中

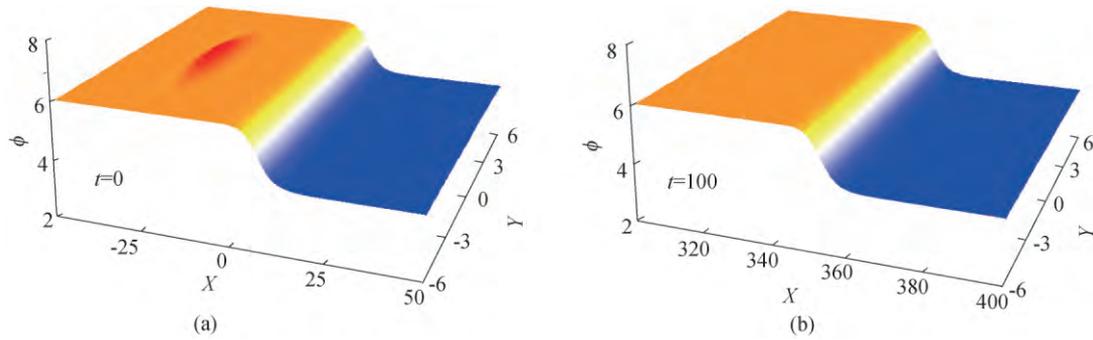


图5 受扰冲击波在 (a) $t=0$ 与 (b) $t=100$ 时的波形 ($\omega=1$)

Fig. 5 Wave profiles of the disturbed shock waves at (a) $t=0$ and (b) $t=100$ ($\omega=1$)

$$s_4 = -\frac{S^2}{2\lambda_1\alpha G} \left(\frac{\delta Z_d^{(0)} \lambda \eta_0 H_1}{F} \right). \quad (22)$$

上式中各量的物理意义及详细表达式见文献[17]. 一种典型的等离子体参数为 $n_{e0} = 10^9 \text{ cm}^{-3}$, $n_{i0} = 10^4 \text{ cm}^{-3}$, $Z_d^{(0)} = 5 \times 10^3$, $T_e = 1 \text{ eV}$, $T_i = 0.1 \text{ eV}$, $r = 10^{-4} \text{ cm}^{[8]}$, 由此计算得到 $s_4 \approx 3.61$. 另外一种典型参数为 $n_{e0} = 2 \times 10^{27} \text{ cm}^{-3}$, $n_{i0} = 1.9 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$, $Z_d^{(0)} = 10^3$, $T_e = 2946 \text{ K}$, $T_i = 900 \text{ K}$, $r = 5.398 \times 10^{-8} \text{ cm}^{[22]}$, 由此计算得到 $s_4 \approx -2.35$. 因此在这样的系统中, 既存在稳定的冲击波, 也存在不稳定的冲击波. 文献[17]考虑的等离子体是由高能电子和正电子组成的二电子系统, 影响耗散系数的主要因素是等离子体中尘埃颗粒的电量变化和离子运动引起的电流. 在一定条件下, 该系统存在静电不稳定性, 形成所谓的“二电子川流不稳定性”^[30].

在 ZKB 方程冲击波解式(6)中 ω 为自由参量, 表明该系统中可存在以任意波速传播的冲击波, 甚至存在非传播型(相速度 $v_p = 0$)冲击波. 图6显示了 $\omega = 0$ 时受扰动的非传播型冲击波(其他参数同图5)在不同时刻的非线性动力学演化波形. 从图6可以看出, 经足够长时间演化后, 扰动波逐渐消失, 表明正耗散情形下的非传播型冲击波也是动力学稳定的.

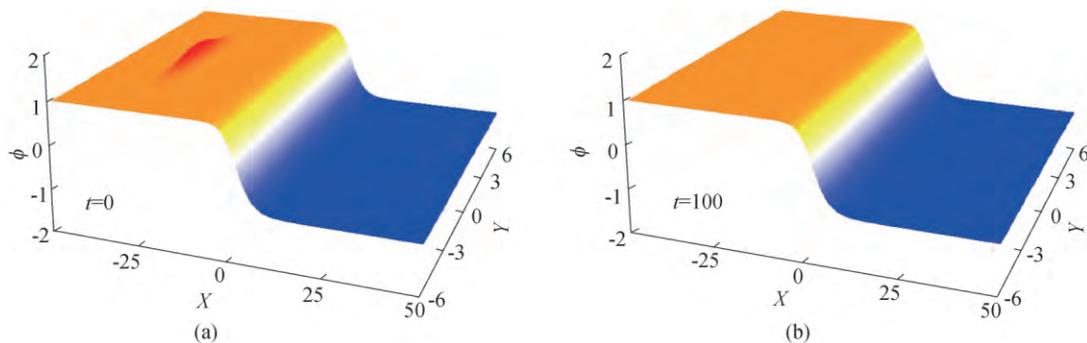


图6 受扰非传播型冲击波在 (a) $t=0$ 与 (b) $t=100$ 时的波形 ($\omega=0$)

Fig. 6 Wave profiles of the disturbed non-propagating shock wave at (a) $t=0$ and (b) $t=100$ ($\omega=0$)

对 ZKB 方程振荡型冲击波的求解以及该类型冲击波在横向扰动下的动力学稳定性, 也是一个值得研究的问题.

4 结论

对磁化尘埃等离子体中冲击波在横向扰动下的动力学稳定性进行研究, 利用双曲函数法得到了 ZKB 方程的一组冲击波解, 并进行了线性稳定性分析. 构造高精度的有限差分格式求解所得本征值问题. 结果表明: 对于正耗散的情形, 该冲击波在线性意义下稳定; 对于负耗散情形, 该冲击波在线性意义下不稳定. 构造有限差分格式对受扰动的冲击波进行了非线性动力学演化, 结果表明: 对于正耗散的情况, 该冲击波是稳定的. 非

线性动力学演化所得结果与线性稳定性分析结论一致.

参 考 文 献

- [1] BARKAN A , D'ANGELO N , MERLINO R L. Experiments on ion-acoustic waves in dusty plasmas [J]. *Planetary and Space Science* , 1996 , 44(3) : 239-242.
- [2] SHUKLA P K. Dusty plasmas: Physics , chemistry and technological impacts in plasma , processing [J]. *Journal of Plasma Physics* , 2000 , 62(5) : 393-393.
- [3] WANG X , BHATTACHARJEE A , GOU S K , et al. Ionization instabilities and resonant acoustic modes [J]. *Physics of Plasmas* , 2001 , 8(11) : 5018-5024.
- [4] MENDIS D A. Progress in the study of dusty plasmas [J]. *Plasma Sources Science and Technology* , 2002 , 11(3A) : A219-A228.
- [5] EL-LABANY S K , EL-SHAMY E F , EL-WARRAKI S A. Effects of two-temperature electrons , external oblique magnetic field , and higher-order nonlinearity on dust acoustic solitary waves in a dusty plasma with vortex-like ion distribution [J]. *Astrophysics and Space Science* , 2008 , 315: 287-295.
- [6] EL-LABANY S K , SHALABY M , EL-SHAMY E F , et al. Effects of two-temperature electrons , external oblique magnetic field , concentration of charged dust grains and higher-order nonlinearity on dust ion-acoustic solitary waves in Saturn's E-ring [J]. *Planetary and Space Science* , 2009 , 57(11) : 1246-1253.
- [7] VERHEEST F. Nonlinear dust-acoustic waves in multispecies dusty plasmas [J]. *Planetary and Space Science* , 1992 , 40(1) : 1-6.
- [8] SHUKLA P K , MAMUN A A. Introduction to dusty plasma physics [J]. *Plasma Physics and Controlled Fusion* , 2002 , 44(3) : 395-395.
- [9] DUAN W S , SHI Y R , HONG X R. Theoretical study of resonance of the Kadomtsev-Petviashvili equation [J]. *Physics Letters A* , 2004 , 323(1) : 89-94.
- [10] MAMUN A A , SHUKLA P K. Spherical and cylindrical dust acoustic solitary waves [J]. *Physics Letters A* , 2002 , 9(4) : 1468-1470.
- [11] JOHNSON J C , D'ANGELO N , MERLINO R L. A double layer induced ionisation instability [J]. *Journal of Physics D* , 1990 23: 682-685.
- [12] RAO N N , SHUKLA P K , YU M Y. Dust-acoustic waves in dusty plasmas [J]. *Planetary and Space Science* , 1990 , 38(4) : 543-546.
- [13] SHUKLA P K , SILIN V P. Dust ion-acoustic wave [J]. *Physica Scripta* , 1992 , 45(5) : 508-508.
- [14] BARKAN A , D'ANGELO N , MERLINO R L. Experiments on ion-acoustic waves in dusty plasmas [J]. *Planetary and Space Science* , 1996 , 44(3) : 239-242.
- [15] SEADAWY A R. Nonlinear wave solutions of the three-dimensional Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation in dusty plasma [J]. *Physica A* , 2015 , 439: 124-131.
- [16] MOSLEM W M , SABRY R. Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation for dust ion acoustic waves [J]. *Chaos , Solitons and Fractals* , 2008 , 36(3) : 628-634.
- [17] EL-BEDWEHY N A , MOSLEM W M. Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation in superthermal electron-positron-ion plasma [J]. *Astrophysics and Space Science* , 2011 , 335(2) : 435-442.
- [18] RAHIM Z , ALI S , QAMAR A. Dust acoustic solitary and shock excitations in a Thomas-Fermi magnetoplasma [J]. *Physics of Plasmas* , 2014 , 21(7) : 1-10.
- [19] MUSHTAQ A , SHAH H A. Nonlinear Zakharov-Kuznetsov equation for obliquely propagating two-dimensional ion-acoustic solitary waves in a relativistic , rotating magnetized electron-positron-ion plasma [J]. *Physics of Plasmas* , 2005 , 12(7) : 1-8.
- [20] KALITA B C , DEKA M. Investigation of solitary waves in warm plasma for smaller order relativistic effects with variable pressures and inertia of electrons [J]. *Astrophysics and Space Science* , 2013 , 343(2) : 609-614.
- [21] TAMANG J , SARKAR K , SAHA A. Solitary wave solution and dynamic transition of dust ion acoustic waves in a collisional nonextensive dusty plasma with ionization effect [J]. *Physica A* , 2018 , 505: 18-34.
- [22] ZHEN H L , TIAN B , ZHONG H , et al. Dynamics of the Zakharov-Kuznetsov-Burgers equations in dusty plasmas [J]. *Physics of Plasmas* , 2013 , 20(8) : 1-8.
- [23] GUAN K Y , GAO G. Qualitative analysis on the traveling wave solutions for the mixed Burgers-KdV type equation [J]. *Science*

- in China (A) , 1987 , 1: 64–73.
- [24] ZHANG G X , LI Z B , DUAN Y S. Exact solitary wave solutions of nonlinear wave equations [J]. Science in China (Series A) , 2001 , 44(3) : 396–401.
- [25] LÜ K P , SHI Y R , DUAN W S , et al. The solitary wave solutions to KdV–Burgers equation [J]. Acta Physica Sinica , 2001 , 50(11) : 2073–2076.
- [26] SHI Y R , FENG W X , XI Z H , et al. Dynamical stability of traveling wave solutions to KdV–Burgers equation [J]. Chinese Journal of Computational Physics , 2018 , 35(2) : 178–186.
- [27] WANG L X , ZONG J , WANG X L , et al. Solitary waves with double kinks of mBBM equation and their dynamical stabilities [J]. Chinese Journal of Computational Physics , 2016 , 33 (2) : 212–220.
- [28] SHI Y R , ZHOU Z G , ZHANG J , et al. Solitary wave solutions of modified coupled KdV equation and their stability [J]. Chinese Journal of Computational Physics , 2012 , 29(2) : 250–256.
- [29] LU J F , GUAN Z. Numerical methods for solving partial differential equations [M]. Beijing: Tsinghua University Press , 2003: 31–37.
- [30] WANG B K , CAO X K , LU Q K. On the Nyquist criteria of cyclotron instability caused by plasma streams (II) [J]. Nuclear Fusion and Plasma Physics , 1986 , 6(2) : 13–18.

Shock Waves in Magnetized Dusty Plasma and Their Dynamical Stability Under Transverse Perturbations

PANG Jungang^{1,2} , SONG Lin^{1,2} , TANG Na^{1,2} , YANG Xueying^{1,2} , LI Xiaolin^{1,2} , XI Zhonghong^{1,2,3} , SHI Yuren^{1,2}

(1. College of Physics and Electronic Engineering , Northwest Normal University , Lanzhou , Gansu 730070 , China;

2. Key Laboratory of Atomic and Molecular Physics & Functional Materials of Gansu Province , Lanzhou , Gansu 730070 , China;

3. College of Physics and Hydropower Engineering , Gansu Normal University for Nationalities , Hezuo , Gansu 747000 , China)

Abstract: A class of shock wave solutions of Zakharov–Kuznetsov–Burgers (ZKB) equation is obtained with hyperbolic–function–expansion method. Dynamical stability property of shock waves under transverse perturbations is investigated. Firstly , we made linear stability analysis on shock waves. A finite difference scheme with high accuracy is presented to solve numerically the eigenvalue problem. It shows that the shock waves are linearly stable with positive dissipation , while they are linearly unstable with negative dissipation. Secondly , a finite difference scheme is constructed to make long-time nonlinear dynamical evolution of shock waves. The results show that shock waves of ZKB equation are dynamically stable in the case of positive dissipation.

Keywords: Zakharov–Kuznetsov–Burgers equation; dynamical stability; linear stability analysis