DOI：10.16783/j.cnki.nwnuz.2009.04.003
第 45 卷 2009 年第 4 期
Vol.45 2009 No.4

粗糙核 Marcinkiewicz 积分在 Companato 空间上的有界性

陶双平，李省哲
（西北师范大学 数学与信息科学学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：假设 Ω 满足一定的正则性条件，则 Marcinkiewicz 积分

$$\mu_\Omega(f)(x)=\left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t}(x)|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}$$

在 Campanato 空间上是有界的．这里

$$F_{\Omega,t}(x)=\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)dy.$$

关键词：粗糙核；Marcinkiewicz 积分；Companato 空间
中图分类号：O 174.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-988Ⅹ(2009)04-0011-04

Boundedness of Marcinkiewicz integrals with rough kernel on Companato spaces

TAO Shuang-ping，LI Xing-zhe
(College of Mathematics and Information Science，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，Gansu，China)

Abstract：The boundedness is considered for Marcinkiewicz integrals with rough kernel which is defined by

$$\mu_\Omega(f)(x)=\left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t}(x)|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2},$$

where

$$F_{\Omega,t}(x)=\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)dy.$$

A regularity condition on Ω is given，which implies that $\mu_\Omega(f)$ is bounded on Companato spaces.

Key words：rough kernel；Marcinkiewicz integral；Companato space

1　引言

用 S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 上的单位球面，$d\sigma$ 表示 S^{n-1} 上的 Lebesgue 测度．设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的零次齐次函数，满足 $\Omega\in L^1(S^{n-1})$ 和

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x')d\sigma(x')=0,\qquad (1)$$

这里 $x'=x/|x|$，$x\neq 0$．定义高维 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 如下：

$$\mu_\Omega(f)(x)=\left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t}(x)|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2},\qquad (2)$$

其中，

$$F_{\Omega,t}(x)=\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)dy.$$

收稿日期：2008-10-30；**修改稿收到日期**：2009-04-06
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10571014)；甘肃省教育厅科研资助项目(0701-15)
作者简介：陶双平（1964—），男，甘肃天水人，教授，博士．主要研究方向为调和分析及其在偏微分方程中的应用．
E-mail：taosp@nwnu.edu.cn

众所周知，高维 μ_Ω 算子是 Stein[1] 首次提出的，他证明了当 $\Omega\in \mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})(0<\alpha\leqslant 1)$ 时，μ_Ω 是 $(p,p)(1<p\leqslant 2)$ 型的和弱 $(1,1)$ 型的. 随后，Benedek-Calderon-Panzone[2] 证明了当 $\Omega\in C^1(S^{n-1})$ 时，μ_Ω 是 $(p,p)(1<p<\infty)$ 型的. 2000 年，Ding-Fan-Pan[3] 得到了下面重要结果.

定理A 设 $\Omega\in H^1(S^{n-1})$ 且满足(1)式，$1<p<\infty$，则存在不依赖于 f 的常数 $C>0$，使得

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{L^p}\leqslant C\|f\|_{L^p}.$$

这里 $H^1(S^{n-1})$ 是单位球面上的 Hardy 空间.

注意到对任意 $0<\alpha\leqslant 1$，$q>1$，有

$$\mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})\subset L^p(S^{n-1})\subset L\log^+ L(S^{n-1})\subset H^1(S^{n-1})\subset L^1(S^{n-1}),\tag{3}$$

因此定理 A 是文献[1]、[2]结果的一个提升. 最近，Lee-Rim[4] 证明了当 Ω 满足下列条件(4)时，μ_Ω 为 (H^1,L^1)，$(L^2\cap L^\infty,BMO)$ 和 $(L^p,L^p)(1<p<\infty)$ 型的，即存在常数 $C>0$ 和 $\rho>1$，使得

$$|\Omega(x')-\Omega(y')|\leqslant\frac{C}{\left(\log\dfrac{1}{|x'-y'|}\right)^{\rho}}\tag{4}$$

对任意的 $x',y'\in S^{n-1}$ 一致成立.

易知条件(4)比 $\mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})(0<\alpha\leqslant 1)$ 更弱. 另外，如果 Ω 满足条件(4)，则由(3)式可得

$$\Omega\in L^\infty(S^{n-1})\subset L^q(S^{n-1}) \quad 1<q<\infty.\subset H^1,\tag{5}$$

最近，李冉[5] 证明了当 $1<p\leqslant 2$ 时带变量核参数型 Marcinkiewicz 积分在 Companato 空间的有界性，关于带粗糙核的 Marcinkiewicz 积分的进一步结果见文献[6]. 受上面研究启发，本文考虑当 Ω 满足条件(4)时，Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω 在 Companato 空间上的有界性.

2 主要结果

定义1 设 $1\leqslant p<\infty$，$-n/p\leqslant\alpha<1$，称局部可积函数 $f(x)$ 属于 Companato 空间 $E^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\|f\|_{E^{\alpha,p}}:=\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n}\sup_B\frac{1}{|B|^{\alpha/n}}\cdot\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-f_B|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac1p}<\infty,$$

其中，B 是 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心 r 为半径的球；f_B 是 f 在 B 上的平均值，即 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f(x)\mathrm{d}x$.

定理1 设 $1<p<\infty$，$-n/p<\alpha\leqslant 0$，Ω 满足(1)式，且对某确定的 $\rho>1$ 满足(4)式. 假设 $f(x)\in E^{\alpha,p}$ 且存在一个可测集 $E\subset\mathbb{R}^n(|E|>0)$，使得 $\mu_\Omega(f)(x)<\infty$ 对任意的 $x\in E$ 成立. 则 $\mu_\Omega(f)(x)<\infty$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处成立，并且存在不依赖于 f 的常数 $C>0$，使得

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{E^{\alpha,p}}\leqslant C\|f\|_{E^{\alpha,p}}.\tag{6}$$

注意到当 $\alpha=0$ 时，$E^{0,p}$ 恰好就是 BMO 空间. 因此有下面的推论.

推论1 设 Ω 满足(1)式且对某确定的 $\rho>1$ 满足(4)式. 假如 $f(x)\in BMO$ 且存在一个可测集 $E\subset\mathbb{R}^n(|E|>0)$，使得 $\mu_\Omega(f)(x)<\infty$ 对任意 $x\in E$ 成立. 则 $\mu_\Omega(f)(x)<\infty$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处成立，并且存在不依赖于 f 的常数 $C>0$，使得

$$\|\mu_\Omega(f)\|_{BMO}\leqslant C\|F\|_{BMO}.\tag{7}$$

为证明定理1，我们需要下面的引理.

引理1[7] 设 $\rho>0$，则存在常数 $C>0$，使得

$$\int_{t-r}^{t}s^{\rho-1}\mathrm{d}s\leqslant Crt^{\rho-1},\quad 0<r<t.$$

引理2[8] 设 $1\leqslant p<\infty$，$\delta>0$，且 $-n/p\leqslant\alpha<\min(1,\delta/p)$，则存在常数 $C>0$，使得对任意球 $B_0=B(x_0,r)$ 和任意 $f\in E^{\alpha,p}$，成立

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(y)-f_{B_0}|^p}{(r+|y-y_0|)^{n+\delta}}\mathrm{d}y\right)^{1/p}\leqslant Cr^{\alpha-\delta/p}\|f\|_{E^{\alpha,p}}.$$

定理1的证明 设 $\bar{x}$ 为 E 的一个聚点，$B=B(\bar{x},r)$ 为以 $\bar{x}$ 为中心 r 为半径的球，首先证明：$\mu_\Omega(f)(x)<\infty$ 在 B 上几乎处处成立. 令 $B^*=8B=:B(\bar{x},8r)$，对 $f(x)$ 进行如下分解

$$f(x)=f_{B^*}+(f(x)-f_{B^*})\chi_{B^*}+(f(x)-f_{B^*})(1-\chi_{B^*})=:f_1+f_2+f_3.\tag{8}$$

由(1)式知 $\mu_\Omega(f_1)(x)\equiv 0$. 由(5)式和定理 A 可知

$$\int_B|\mu_\Omega(f_2)(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\mu_\Omega(f_2)(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|f_2|^p\mathrm{d}x\leqslant C|B|^{\alpha p/n+1}\|f\|^p_{E^{\alpha,p}}<\infty,$$

即 $\mu_\Omega(f_2)(x)<\infty$ a.e. 于 B.

下面估计 $\mu_\Omega(f_3)(x)$. 从定理1的假设，可取 $x_0\in B\cap E$，$|x_0-\bar{x}|<r/4$，使得 $\mu_\Omega(f)(x_0)<\infty$ 和 $\mu_\Omega(f_2)(x_0)<\infty$ 同时成立，则

$$\mu_\Omega(f_3)(x_0)\leqslant\mu_\Omega(f)(x_0)+\mu_\Omega(f_2)(x_0)<\infty.\tag{9}$$

另一方面，对任意 $x\in B$，有

$$|\mu_\Omega(f_3)(x)-\mu_\Omega(f_3)(x_0)|\leqslant \left(\int_0^\infty\left(\int_{\substack{|x-y|\leqslant t\\|x_0-y|>t}}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f_3(y)\right|dy\right)^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}+\left(\int_0^\infty\left(\int_{\substack{|x-y|>t\\|x_0-y|\leqslant t}}\left|\frac{\Omega(x_0-y)}{|x_0-y|^{n-1}}f_3(y)\right|dy\right)^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}+\left(\int_0^\infty\left(\int_{\substack{|x-y|\leqslant t\\|x_0-y|\leqslant t}}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_0-y)}{|x_0-y|^{n-1}}\right||f_3(y)|dy\right)^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}$$
$$=:I_1+I_2+I_3. \tag{10}$$

对 I_1，取 $\eta>0$ 满足 $0<\eta<p-1$. 因为 $y\in(B^*)^c$, $x\in B$, $|x-y|\leqslant t$，所以，$t\geqslant|x-y|\geqslant|y-x_0|-|x_0-x|>3r$ 且 $|y-x|>|y-x_0|-|x_0-x|>t-r$. 由 Hölder 不等式、定理 A 和引理 1,2 可得

$$\int_{\substack{|x-y|\leqslant t\\|x_0-y|>t}}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f_3(y)\right|dy\leqslant \left(\int_{\max(3r,t-r)<|x-y|<t}\frac{|\Omega(x-y)|^{p'}}{|x-y|^{(n-1)p'-(n+\eta)p'/p}}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f_3(y)|^p}{|x-y|^{n+\eta}}dy\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\|\Omega\|_{L^\infty(S^{n-1})}\|f\|_{E^{\alpha,p}}r^{\alpha-\eta/p}\cdot\left(\int_{\max(3r,t-r)}^t s^{(n+\eta)p'/p-(n-1)p'+n-1}ds\right)^{1/p'}\leqslant r^{\alpha-\eta/p}r^{1/p'}t^{\eta/p-1/p'+1}\|\Omega\|_{L^\infty(S^{n-1})}\|f\|_{E^{\alpha,p}}.$$

注意到 $\eta/p-1/p'=(\eta-(p-1))/p<0$，因此

$$I_1(x)=\left(\int_0^\infty\left(\int_{|x-y|\leqslant t,|x_0-y|>t}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}f_3(y)\right|dy\right)^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\leqslant Cr^{\alpha-\eta/p+1/p'}\|f\|_{E^{\alpha,p}}\left(\int_{3r}^\infty t^{2\eta/p-2/p'-1}dt\right)^{1/2}\leqslant Cr^\alpha\|f\|_{E^{\alpha,p}}. \tag{11}$$

类似地，我们有 $I_2(x)\leqslant Cr^\alpha\|f\|_{E^{\alpha,p}}$.

下面考虑 $I_3(x)$. 应用 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式得

$$I_3(x)\leqslant\int_{(B^*)^c}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_0-y)}{|x_0-y|^{n-1}}\right|\cdot|f_3(y)|\left(\int_{\substack{|x-y|\leqslant t\\|x_0-y|\leqslant t}}\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}dy\leqslant C\int_{(B^*)^c}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_0-y)}{|x_0-y|^{n-1}}\right|\frac{|f_3(y)|}{|x_0-y|}dy.$$

注意到 $x,x_0,\bar{x}\in B$ 及 $y\in(B^*)^c$ 时，$|x-y|\sim|x_0-y|$，并且

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x_0-y}{|x_0-y|}\right|\leqslant C\frac{r}{|x_0-y|}, \tag{12}$$

故由(4)式和(12)式可得，

$$|\Omega(x-y)-\Omega(x_0-y)|=\left|\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)-\Omega\left(\frac{x_0-y}{|x_0-y|}\right)\right|\leqslant \frac{C}{\left(\log\frac{|y-x_0|}{r}\right)^\rho}. \tag{13}$$

应用(13)式可得

$$\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_0-y)}{|x_0-y|^{n-1}}\right|\leqslant\frac{|\Omega(x-y)-\Omega(x_0-y)|}{|x_0-y|^{n-1}}+|\Omega(x-y)|\left|\frac{1}{|x-y|^{n-1}}-\frac{1}{|x_0-y|^{n-1}}\right|\leqslant \frac{C}{|x_0-y|^{n-1}\left(\log\frac{|y-x_0|}{r}\right)^\rho}+\frac{Cr}{|x_0-y|^n}\leqslant \frac{C}{|x_0-y|^{n-1}\left(\log\frac{|y-x_0|}{r}\right)^\rho},$$

因此

$$I_3(x)\leqslant C\int_{(B^*)^c}\frac{|f_3(y)|dy}{|x_0-y|^n\left(\log\frac{|y-x_0|}{r}\right)^\rho}.$$

由 $y\in(B^*)^c$ 及 $x_0,\bar{x}\in B$ 得，$|y-x_0|\geqslant|y-\bar{x}|-|\bar{x}-x_0|\geqslant 8r-r/4>4r$，故有

$$I_3(x)\leqslant C\sum_{j=2}^\infty\int_{2^jr\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}r}\frac{|f_3(y)|dy}{|x_0-y|^n\left(\log\frac{|y-x_0|}{r}\right)^\rho}\leqslant C\sum_{j=2}^\infty\left(\int_{2^jr\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}r}\frac{dy}{|x_0-y|^n\left(\log\frac{|y-x_0|}{r}\right)^{\rho p'}}\right)^{1/p'}\cdot\left(\int_{2^jr\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}r}\frac{|f_3(y)|^pdy}{|x_0-y|^n}\right)^{1/p},$$

注意到

$$\left(\int_{2^j r\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}r}\frac{\mathrm{d}y}{|x_0-y|^n\left(\log\frac{|y-x_0|}{r}\right)^{\rho p'}}\right)^{1/p'}\leqslant$$
$$C\left(\int_{2^j r}^{2^{j+1}r}\frac{\mathrm{d}s}{s\left(\log\frac{s}{r}\right)^{p'\rho}}\right)^{1/p'}\leqslant$$
$$\frac{C}{(\log 2^j)^{\rho}}\left(\int_{2^j}^{2^{j+1}}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{1/p'}\leqslant\frac{C}{j^{\rho}}.\tag{14}$$

另一方面，令 B_k 为 B 的 2^k 倍扩张．由于 $\alpha\leqslant 0$，$f\in E^{\alpha,p}$，所以

$$|f_{B_k}-f_{B_{k-1}}|\leqslant\frac{1}{|B_{k-1}|}\int_{B_k}|f(x)-f_{B_k}|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\left(\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k}|f(x)-f_{B_k}|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant$$
$$C(2^k r)^{\alpha}\|f\|_{E^{\alpha,p}}.$$

因此，$|f_{B_k}-f_{B_k^*}|\leqslant Cr^{\alpha}\|f\|_{E^{\alpha,p}}$，且

$$\left(\int_{2^j r\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}r}\frac{|f_3(y)|^p\mathrm{d}y}{|x_0-y|^n}\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{(2^j r)^n}\int_{2^j r\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}r}|f_3(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\leqslant$$
$$C\left(\frac{1}{(2^j r)^n}\int_{2^j r\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}r}(|f(y)-f_{B_{j+1}}|^p+|f_{B_{j+1}}-f_{B^*}|^p)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\leqslant Cr^{\alpha}\|f\|_{E^{\alpha,p}}.\tag{15}$$

由(14),(15)式且注意到 $\rho>1$，有

$$I_3(x)\leqslant C\sum_{j=2}^{\infty}\frac{C}{j^{\rho}}r^{\alpha}\|f\|_{E^{\alpha,p}}\leqslant Cr^{\alpha}\|f\|_{E^{\alpha,p}}.\tag{16}$$

由(10),(11)及(16)式得

$$|\mu_{\Omega}(f_3)(x)-\mu_{\Omega}(f_3)(x_0)|\leqslant Cr^{\alpha}\|f\|_{E^{\alpha,p}},\tag{17}$$

所以，

$$\mu_{\Omega}(f)(x)\leqslant\mu_{\Omega}(f_1)(x)+\mu_{\Omega}(f_2)(x)+|\mu_{\Omega}(f_3)(x)-\mu_{\Omega}(f_3)(x_0)|+\mu_{\Omega}(f_3)(x_0)<\infty$$

a.e.于 B．由于 B 是中心为 $\bar{x}\in E$ 的任意球，因此，$\mu_{\Omega}(f)(x)<\infty$ a.e.于 $\mathbb{R}^n$．

最后证明(6)式成立．从上面的证明过程可见，在球 B 上，$\mu_{\Omega}(f_1)(x)\equiv 0$，且

$$\left(\int_B|\mu_{\Omega}(f_2)(x)|^p\mathrm{d}x\right)^p\leqslant C|B|^{1/p+\alpha/n}\|f\|_{E^{\alpha,p}}.$$

由(17)式得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B|\mu_{\Omega}(f)(x)-\mu_{\Omega}(f_3)(x_0)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B|\mu_{\Omega}(f_2)(x)|^p\mathrm{d}x\right)^p+\left(\frac{1}{|B|}\int_B|\mu_{\Omega}(f_3)(x)-\mu_{\Omega}(f_3)(x_0)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant$$
$$Cr^{\alpha}\|f\|_{E^{\alpha,p}}.\tag{18}$$

最后，由(17)和(18)式得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B|\mu_{\Omega}(f)(x)-(\mu_{\Omega}(f))_B|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B|\mu_{\Omega}(f)(x)-\mu_{\Omega}(f_3)(x_0)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\frac{1}{|B|}\int_B|\mu_{\Omega}(f_3)(x_0)-(\mu_{\Omega}(f))_B|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant$$
$$Cr^{\alpha}\|f\|_{E^{\alpha,p}}.$$

至此我们证明了(6)式．定理1证毕． ▌

参考文献：

[1] STEIN E M. On the function of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1958, **88**: 430-466.

[2] BENEDEK A, CALDERÓN A, PANZONE R. Convolution operators on Banach space valued functions[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1962, **48**: 356-365.

[3] Ding Yong, FAN Da-shan, PAN Yi-biao. L^p-boundedness of Marcinkiewicz integrals with Hardy space function kernel [J]. *Acta Math Sinica* (English Series), 2000, **16**(2): 593-600.

[4] LEE J, RIM K S. Estimates of Marcinkiewicz integrals with bounded homogeneous kernels of degree zero [J]. *Integral Equations Operator Theory*, 2004, **48**: 213-223.

[5] 李 冉. 带变量核参数型Marcinkiewicz积分的有界性[J]. **北京师范大学学报：自然科学版**, 2007, **43**(6): 599-605.

[6] 陶双平，司颖华. 带粗糙核的Marcinkiewicz积分算子在齐次Morrey-Herz空间上的有界性[J]. **西北师范大学学报：自然科学版**, 2007, **43**(1): 1-7.

[7] DING Yong, XUE Qing-ying, YABUTA K. Existence and boundedness of parameterized Marcinkiewicz integral with rough kernel on Companato spaces [J]. *Nagoya Math J*, 2006, **181**: 103-148.

[8] DING Yong, LU Shan-zhen, XUE Qing-ying. On Marcinkiewicz integral with homogeneous kernels[J]. *J Math Anal Appl*, 2000, **245**: 471-488.

（责任编辑 马宇鸿）