DOI:10.16783/j.cnki.nwnuz.2009.04.001
第 45 卷 2009 年第 4 期　　西北师范大学学报(自然科学版)
Vol.45　2009　No.4　　Journal of Northwest Normal University (Natural Science)

一类固定时刻脉冲微分系统的有界变差解

李宝麟，吴卫红
(西北师范大学 数学与信息科学学院，甘肃 兰州　730070)

摘　要：利用不连续系统有界变差解的结论，讨论了有限区间内固定时刻一阶脉冲微分系统的有界变差解，给出了该类脉冲微分系统有界变差解存在和唯一的充分性条件.

关键词：脉冲微分系统；不连续系统；有界变差解
中图分类号：O 175.12　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1001-988X(2009)04-0001-05

Bounded variation solutions for a class of impulsive differential systems at fixed times

LI Bao-lin，WU Wei-hong
(College of Mathematics and Information Science，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，Gansu，China)

Abstract：The bounded variation solutions for one order impulsive differential systems at fixed times on a finite interval are discussed by using the conclusions of bounded variation solutions for discontinuous systems，the sufficient conditions of existence and uniqueness of bounded variation solutions for the impulsive differential systems are established.

Key words：impulsive differential system；discontinuous system；bounded variation solution

1　引言

考虑固定时刻一阶脉冲微分系统初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), & t \neq t_i, \\ \Delta x = I_i(x), & t = t_i,\ i=1,2,\cdots, \\ x(t_0+0) = x_0, \end{cases} \qquad (1)$$

其中

(H_1) $0<t_1<t_2<\cdots<t_i<\cdots$，且 $\lim\limits_{i\to+\infty} t_i = +\infty$；

(H_2) $f: \mathbf{R}_+ \times B \longrightarrow \mathbf{R}^n$，且对 $\forall\, t \in \mathbf{R}_+$，有 $f(t,0)=0$，B 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集；

(H_3) $I_i: B \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $I_i(0)=0$，$I_i \in C(B,\mathbf{R}^n)$，$i \in \mathbf{N}$，$\mathbf{R}^n$ 为具有通常范数的 n 维欧氏空间.

称系统(1)的解在脉冲时刻 t_i 是左连续的，如果 $x(t_i-0)=x(t_i)$, $x(t_i+0)=x(t_i)+I_i(x(t_i))$, $i=1,2,\cdots$. 对每个函数 $x(t): B \longrightarrow \mathbf{R}^n$，除了 t_i 时刻以外它是连续的；$x(t,t_0,x_0)$表示系统(1)过初始值 $x(t_0,x_0)$的解.

文献[1]、[2]讨论了 f(t,x)为连续函数时，系统(1)解的存在唯一性问题，其中要求解是绝对连续的，文献[3]利用系统(1)与 Kurzweil 广义常微分方程之间的关系，建立了系统(1)有界变差解的局部存在唯一性定理. 本文将使系统(1)右端函数 $f(t,x)$在$(t_i,t_{i+1}]$, i=1,2,…上非 Lebesgue 可积，出现解为非绝对连续但却是有界变差的，并在此基础上讨论了系统(1)的有界变差解，给出了该类微分系统有界变差解存在和唯一的充分条件.

2　预备知识

为方便起见，本文取系统(1)有限个脉冲点

收稿日期：2008-11-08；**修改稿收到日期**：2009-03-19
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771171)；甘肃省“555 创新人才工程”资助项目
作者简介：李宝麟(1963—)，男，甘肃天水人，教授，博士. 主要研究方向为拓扑动力系统.
E-mail：libl@nwnu.edu.cn
(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$t_i, i=0,1,\cdots,k, k\in\mathbf{N}$ 进行讨论．设有限个脉冲点 $t_i\in(a,b)\subset\mathbf{R}_+$，令 $B_c=\{x\in\mathbf{R}^n:\|x\|<c\}$，$c>0$ 为常数，$G=B_c\times(a,b)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的开集．

定义 1[3,4] 称 $x(t,t_0,x_0), t\in[t_0,T]\subset(a,b)$ 是系统(1)的有界变差解，若

(i) $x(t)$ 在 $[t_0,T]$ 的任何紧区间上有界变差；

(ii) 当 $t\in[t_0,T]$ 时，$(x,t)\in G$；

(iii) $x(t_0+0,t_0,x_0)=x_0$；

(iv) 当 $t\neq t_i, t\in[t_0,T]$ 时，$\dot{x}(t,t_0,x_0)=f(t,x(t,t_0,x_0))$；

(v) $\Delta x(t)|_{t=t_i}=x(t_i+0)-x(t_i)=I_i(x(t_i))$，$t_i\in[t_0,T]$．

定义 2[4-6] 函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 称为 Henstock 可积的，如果存在 $A\in\mathbf{R}^n$ 使得对 $\forall\varepsilon>0$，存在正值函数 $\delta(t):[a,b]\longrightarrow(0,+\infty)$，使得对 $[a,b]$ 的任何 δ-精细分划 D：

$$a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_j=b$$

及 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j\}$ 满足 $\xi_i-\delta(\xi_i)<\tau_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant\tau_i<\xi_i+\delta(\xi_i), i=1,2,\cdots,j$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{j}x(\xi_i)(\tau_i-\tau_{i-1})-A\right\|<\varepsilon.$$

记 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Henstock 积分为 $\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=A$．

为考虑系统(1)的有界变差解，首先建立系统(1)右端向量值函数 $f:G\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 组成的函数空间 $\mathscr{D}(G,h,w)$．

定义 3[4-7] 设 $f:G\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 为 Garatheodory 函数，称 $f\in\mathscr{D}(G,h,w)$，如果 $f(t,x)$ 满足下列条件：

(i) 存在正值函数 $\delta:(t_i,t_{i+1}]\longrightarrow\mathbf{R}_+$, $(t_i,t_{i+1}]\subset[t_0,T]$, $i=0,1,\cdots,k-1$，对每个区间 $[u,v]$，满足 $\tau\in[u,v]\subset(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\subset(t_i,t_{i+1}]$ 以及 $x\in B_c$，有

$$\|f(\tau,x)(v-u)\|\leqslant h(v)-h(u);\qquad(2)$$

(ii) 对每个区间 $[u,v]$，满足 $\tau\in[u,v]\subset(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\subset(t_i,t_{i+1}]$，及所有的 $x,y\in B_c$，有

$$\|f(\tau,x)-f(\tau,y)\|(v-u)\leqslant w(\|(x-y)\|)(h(v)-h(u));\qquad(3)$$

(iii) 对每个定义在 $(t_i,t_{i+1}]\subset[t_0,T]$ 上的阶梯函数 $\psi(t)$，$f(t,\psi(t))$ 在 $(t_i,t_{i+1}]$, $i=0,1,\cdots,k-1$ 上是 Henstock 可积的．

在(2)、(3)式中，$h:[t_0,T]\longrightarrow\mathbf{R}$ 是定义在 $[t_0,T]$ 上的单调增加左连续函数，而 $w:[0,+\infty]\longrightarrow\mathbf{R}$ 是连续增加函数，且 $w(r)>0(r>0)$, $w(0)=0$．

引理 1[4] 设 $f\in\mathscr{D}(G,h,w)$，如果 $x:(t_i,t_{i+1}]\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 为 $(t_i,t_{i+1}]$ 上的有界变差函数，使得对 $t\in(t_i,t_{i+1}]$，有 $(t,x(t))\in G$，则 Henstock 积分 $\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(t,x(t))\mathrm{d}t$ 存在．

引理 2[4] 如果 $x:(t_i,t_{i+1}]\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 在 $(t_i,t_{i+1}]$, $i=0,1,\cdots,k-1$ 上 Henstock 可积，则其原函数 $X(t)=\int_{t_i}^{t}x(s)\mathrm{d}s$ 在 $(t_i,t_{i+1}]$ 上连续．

引理 3 设系统(1)的右端向量值函数 $f\in\mathscr{D}(G,h,w)$．如果 $x:[t_0,T]\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 是系统(1)的解且 Henstock 积分 $\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(t,x(t))\mathrm{d}t$ 存在，则 $x(t)$ 是系统(1)在 (t_i,t_{i+1}), $i=0,1,2,\cdots,k-1$ 上的连续有界变差解，且

$$\sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{Var}_{t_i}^{t_{i+1}}x\leqslant h(T)-h(t_0)<+\infty,\qquad(4)$$

其中 $\mathrm{Var}_{t_i}^{t_{i+1}}x$ 表示 $x(t)$ 在 $t\in(t_i,t_{i+1})$ 上的全变差．

证明 设 $t_i=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_k=t_{i+1}$ 是区间 (t_i,t_{i+1}) 的任意划分．对每个子区间 $[\tau_{j-1},\tau_j]$，因 Henstock 积分 $\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}f(t,x(t))\mathrm{d}t$ 存在，$j=1,2,\cdots,k$，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在正值函数 $\delta_j:[\tau_{j-1},\tau_j]\longrightarrow\mathbf{R}_+$，使得对 $[\tau_{j-1},\tau_j]$ 的任何 δ_j-精细分划：$\tau_{j-1}=s_0^j<s_1^j<\cdots<s_{m_j}^j=\tau_j$ 及 $\xi_l^j\in[s_{l-1}^j,s_l^j]\subset(\xi_l^j-\delta_j(\xi_l^j),\xi_l^j+\delta_j(\xi_l^j))$, $l=1,2,\cdots,m_j$，有

$$\left\|\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}f(t,x(t))\mathrm{d}t\right\|\leqslant\left\|\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}f(t,x(t))\mathrm{d}t-\sum_{l=1}^{m_j}f(\xi_l^j,x(\xi_l^j))(s_l^j-s_{l-1}^j)\right\|+\left\|\sum_{l=1}^{m_j}f(\xi_l^j,x(\xi_l^j))(s_l^j-s_{l-1}^j)\right\|<\frac{\varepsilon}{2^j}+h(\tau_j)-h(\tau_{j-1}),$$

所以

$$\sum_{j=1}^{k}\|x(\tau_j)-x(\tau_{j-1})\|=\sum_{j=1}^{m_j}\left\|\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}f(t,x(t))\mathrm{d}t\right\|<\varepsilon+\sum_{j=1}^{m_j}h(\tau_j)-h(\tau_{j-1})=\varepsilon+h(t_{i+1})-h(t_i).$$

从而

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\|x(\tau_j)-x(\tau_{j-1})\|=$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f(t,x(t))\mathrm{d}t<$$
$$\varepsilon+\sum_{i=0}^{k-1}(h(t_{i+1})-h(t_i)).$$

由 ε 的任意性和 h 是单调左连续的可知

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\|x(\tau_j)-x(\tau_{j-1})\|\leqslant \mathrm{h}(\mathrm{T})-\mathrm{h}(\mathrm{t}_0)<+\infty,$$

即 $x(t)$ 在 $t\in[\mathrm{t}_0,T]$ 上是有界变差的且(4)式成立．又由引理 2 知，$x(t)$ 在 $t\in(t_i,t_{i+1}),i=0,1,\cdots,k-1$ 上是连续的． 】

为讨论系统(1)有界变差解的存在性和唯一性，考虑下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(t_0+0)=x_0.\end{cases}\tag{5}$$

其中 $f:\mathbf{R}_+\times B_c\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 具有某种不连续性．

引理 4[4] 设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$ 且 $(t_0,x_0)\in G$，则一定存在 $\Delta_-,\Delta_+>0$，使得系统(5)在区间 $[\mathrm{t}_0-\Delta_-,t_0+\Delta_+]$ 上存在满足 $\mathrm{x}(\mathrm{t}_0)=x_0$ 的有界变差解 $x(t)$．

引理 5[4] 设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$，且对每个 $u>0$，有

$$\lim_{v\to 0^+}\int_v^u\frac{1}{w(r)}\mathrm{d}r=+\infty,$$

那么系统(5)的每个满足 $x(t_0)=x_0$ 的有界变差解 $x(t)$ 是局部右行唯一的，其中 $(t_0,x_0)\in G$．

定义 4[7] 设 $x:[\mathrm{t}_0,t_0+\delta]\longrightarrow\mathbf{R}^n$，$\delta>0$ 是系统(5)在 $[\mathrm{t}_0,t_0+\delta]$ 上的一个解．称系统(5)的解 $y:[\mathrm{t}_0,t_0+\sigma],\sigma>0$ 为 x 的一个延拓，如果 $[\mathrm{t}_0,t_0+\delta]\subset[\mathrm{t}_0,t_0+\sigma]$，且对 $\forall\,\mathrm{t}\in[\mathrm{t}_0,t_0+\delta]$，有 $\mathrm{x}(\mathrm{t})=y(t)$；如果 $[\mathrm{t}_0,t_0+\delta]\subsetneqq[\mathrm{t}_0,t_0+\sigma]$，即 $\sigma>\delta$，那么 $[\mathrm{t}_0,t_0+\sigma]$ 称为 x 的右行真延拓．

如果 $(x_0,t_0)\in G$，且存在 $b(x_0,t_0)>t_0$，使得 x 在 $[\mathrm{t}_0,b(x_0,t_0))$ 上存在且不能延拓到形如 $[\mathrm{t}_0,\beta]$，$\beta>b(x_0,t_0)$ 的更大区间，或者说，没有系统(5)的解 $x:[\mathrm{t}_0,b(x_0,t_0))\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 的右行真延拓，那么称系统(5)满足 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t>t_0)$ 是饱和的．

定义 5[7] 系统(5)的有界变差解 $x:[\mathrm{t}_0,t_0+\beta]\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 称为右行局部唯一的，如果对系统(5)的任何满足 $y(t_0)=x(t_0)$ 的有界变差解 $y:[\mathrm{t}_0,t_0+\sigma]\longrightarrow\mathbf{R}^n$，存在 $\beta_1>0$，使得对 $t\in[\mathrm{t}_0,t_0+\beta]\cup[\mathrm{t}_0,t_0+\sigma]\cup[\mathrm{t}_0,t_0+\beta_1]$，有 $\mathrm{x}(\mathrm{t})=y(t)$．

引理 6 设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$，$x:[\mathrm{t}_0,T]\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 是系统(5)在 $[\mathrm{t}_0,T]$ 上的解，则对 $\forall\,\mathrm{s}\in[\mathrm{t}_0,T)$，有

$$x(s+)-x(s)=\lim_{\sigma\to s_+}x(\sigma)-x(s)=$$
$$F(x(s),s+)-F(x(s),s);\tag{6}$$

对 $\forall\,\mathrm{s}\in(t_0,T]$，有

$$x(s)-x(s-)=x(s)-\lim_{\sigma\to s_-}x(\sigma)=$$
$$F(x(s),s)-F(x(s),s-).\tag{7}$$

其中对 $\forall\,\mathrm{s}\in[\mathrm{t}_0,T)$，$F(x(s),s+)=\lim_{\sigma\to s_+}F(x,\sigma)$；对 $\forall\,\mathrm{s}\in(t_0,T]$，$\mathrm{F}(\mathrm{x}(\mathrm{s}),\mathrm{s}-)=\lim_{\sigma\to s_-}F(x,\sigma)$，且 $F(x(s),s)=\int_{t_0}^{s}f(x,t)\mathrm{d}t$．

证明 因为 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$，取 $[\mathrm{s},\sigma]\in[\mathrm{t}_0,T]$，不妨设 $\sigma>s$，则对任意 $\varepsilon>0$ 及任何 δ-精细分划 D：

$$s=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_j=\sigma$$

及 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j\}$，其中 $\xi_i-\delta(\xi_i)<\tau_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant\tau_i<\xi_i+\delta(\xi_i)$，$i=1,2,\cdots,j$，有

$$\|F(x,\sigma)-F(x,s)\|=\left\|\int_s^\sigma f(x,t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant$$
$$\left\|\int_s^\sigma f(x,t)\mathrm{d}t-\sum_{i=1}^{j}f(x(\xi_i),\xi_i)(\tau_i-\tau_{i-1})\right\|+$$
$$\left\|\sum_{i=1}^{j}f(x(\xi_i),\xi_i)(\tau_i-\tau_{i-1})\right\|\leqslant$$
$$\varepsilon+\sum_{i=1}^{j}\|f(x(\xi_i),\xi_i)(\tau_i-\tau_{i-1})\|<$$
$$\varepsilon+\sum_{i=1}^{j}|h(\tau_i)-h(\tau_{i-1})|<$$
$$\varepsilon+|h(\sigma)-h(s)|.$$

由 ε 的任意性，有

$$\|F(x,\sigma)-F(x,s)\|\leqslant|\mathrm{h}(\sigma)-\mathrm{h}(\mathrm{s})|,$$

于是

$$\|F(x,\sigma)\|\leqslant\|\mathrm{F}(\mathrm{x},\sigma)-\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{s})\|+\|\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{s})\|\leqslant$$
$$|h(\sigma)-h(s)|+\|F(x,s)\|.$$

当 $\sigma\to s_+$ 时，有

$$\|F(x,s_+)\|\leqslant|\mathrm{h}(\mathrm{s}_+)-h(s)|+\|F(x,s)\|,$$

于是 $F(x,s_+)$ 存在．同理可证 $F(x,s_-)$ 存在．

由文献[4]可知，系统(5)在 $[\mathrm{t}_0,T]$ 上的解是 Henstock 可积的，于是

$$F(x,s_+)-F(x,s)=$$
$$\int_{t_0}^{s_+}f(x,t)\mathrm{d}t-\int_{t_0}^{s}f(x,t)\mathrm{d}t=$$
$$\int_{s}^{s_+}f(x,t)\mathrm{d}t=x(s_+)-x(s).$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

同理可证得(7)式成立. ■

定义 $G_F=\{(x,t)\in G;(x+F(x,t_+)-F(x,t),t)\in G\}$，其中 $F(x(s),s)=\int_{t_0}^{s}f(x,t)\mathrm{d}t$.

引理7 设 $x:[t_0-\Delta_-,t_0+\Delta_+]\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 是系统(5)在 $[t_0-\Delta_-,t_0+\Delta_+]$ 上的有界变差解，若 $(x(s),s)\in G_F,s\in[t_0-\Delta_-,t_0+\Delta_+]$，则系统(5)的有界变差解可向右延拓.

证明 对不连续系统(5)，由引理6可知，其有界变差解 $x(t)$ 是非绝对连续的，对某个 $\tilde{x}(t)\in B_c$，$\tilde{x}(t)$ 的间断有可能出现，即对某个 $(\tilde{x},t_0)\in G$，函数

$$\tilde{x}_+=\tilde{x}+F(\tilde{x},t_{0+})-F(\tilde{x},t_0) \tag{8}$$

不属于 B_c，此时系统(5)满足 $x(t_0)=\tilde{x}$ 的有界变差解在 t_0 时刻跳出集合 B_c，因而不能对 $t>t_0$ 的解延拓. 由引理4，若 $x(t),t\in[t_0-\Delta_-,t_0+\Delta_+]$ 是系统(5)在 $[t_0-\Delta_-,t_0+\Delta_+]$ 上的有界变差解，并且 $x(t)$ 在其右端点满足条件(8)，于是有

$$\begin{aligned}x((t_0+\Delta_+)_+)=&\ x(t_0+\Delta_+)+\\&F(x(t_0+\Delta_+),(t_0+\Delta_+)_+)-\\&F(x(t_0+\Delta_+),t_0+\Delta_+),\end{aligned}$$

其中 $(x(t_0+\Delta_+),t_0+\Delta_+)\in G_F$，则系统(5)在区域 $[t_0-\Delta_-,t_0+\Delta_+]$ 上的有界变差解可通过该区域边界点向右延拓. ■

下面给出系统(5)饱和解的3个性质.

性质1[8] 设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$，且 $(t_0,x_0)\in G_F$，如果系统(5)的解是局部右行唯一的，那么存在左端点为 t_0 的区间 J 和函数 $x:J\longrightarrow\mathbf{R}^n$，使得 $t_0\in J,x(t_0)=x_0$，且 $x:J\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 是系统(5)的饱和解；区间 J 和函数 x 由初始条件 $x(t_0)=x_0$ 和解的饱和性唯一地确定.

性质2[8] 设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$，且 $(t_0,x_0)\in G_F$，系统(5)的解局部右行唯一，$x:J\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 是系统(5)满足 $x(t_0)=x_0$ 的饱和解，$t_0\in J$ 是区间的左端点，则 $J=[t_0,\beta)\cap I$，其中 $t_0<\beta\leqslant+\infty$，$I=(-\infty,+\infty)$.

性质3[8] 设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$，且 $(t_0,x_0)\in G_F$，系统(5)的解局部右行唯一，$x:[t_0,\beta)\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 是系统(5)的饱和解，$M\subset G=B_c\times(a,b)\subset R^{n+1}$ 是紧集，则存在 $c\in[t_0,\beta)$，使得 $(x(t),t)\overline{\in}M$，$t\in(c,\beta)$.

3 主要结果

定理1 设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$，且 $(t_0,x_0)\in G$，则一定存在 $\delta>0$，使得系统(1)在区间 $[t_0,t_0+\delta]$ 上存在满足 $x(t_0)=x_0$ 的有界变差解 $x(t)$.

证明 考虑系统(5)，由引理4可知，存在 $t_1-t_0>\delta>0$，使得该系统在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上存在有界变差解 $x(t)$. 显然，$x(t)$ 在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上是系统(1)的解，且 $x(t_0)=x_0$. 故系统(1)在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上存在满足 $x(t_0)=x_0$ 的有界变差解 $x(t)$. ■

定理2 设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w),(t_0,x_0)\in G$，且对每个 $u>0$，

$$\lim_{v\to0^+}\int_v^u\frac{1}{w(r)}\mathrm{d}r=+\infty,$$

则存在 $\delta>0$，使得系统(1)在 $[t_0,t_0+\delta]$ 满足 $x(t_0)=x_0$ 的有界变差解 $x(t)$ 是局部右行唯一的.

证明 考虑系统(5)，由引理5可知，存在 $t_1-t_0>\delta>0$，使得该系统在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上满足 $x(t_0)=x_0$ 的有界变差解 $x(t)$ 是局部右行唯一的. 显然 $x(t)$ 在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上是系统(1)的解，故系统(1)在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上满足 $x(t_0)=x_0$ 的有界变差解 $x(t)$ 是局部右行唯一的. ■

定理3 若 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$ 且 $(t_0,x_0)\in G_F$，则系统(1)存在饱和解 $x(t)$，$t\in(t_0,t_0+\beta)\subset(a,b)$.

证明 由引理7可知，系统(5)的局部解一定可以延拓. 若其饱和解存在区间之右端点 $\beta'\leqslant t_1$，则系统(1)的饱和解仅在 (t_0,β') 存在，若 $\beta'>t_1$，考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x), & t>t_1,\\ x(t_1+0)=x(t_1)+I_1(x(t_1)).\end{cases}$$

根据系统(5)饱和解的3个性质，我们可以讨论该系统饱和解存在区间的存在性. 这样一直讨论下去，我们可以得到系统(1)饱和解的存在区间. 若 $\beta\leqslant b$，则存在 $k\geqslant1$，使得 $\beta\in(t_k,t_{k+1}]\subset(t_k,b)$，从而在 (t_k,β) 上系统(1)的解也是系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x), & t>t_k,\\ x(t_k+0)=x(t_k)+I_1(x(t_k))\end{cases}$$

的解. ■

下面考虑系统(1)在 (a,b) 上有界变差解的存在性和唯一性.

定理4 设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$，且 $(t_0,x_0)\in G_F$，则在 (a,b) 上一定存在使系统(1)满足 $x(t_0)=x_0$ 的有界变差解 $x(t)$.

证明 对系统(5)，设 $f\in\mathscr{V}(G,h,w)$，且 $(t_0,x_0)\in G_F$，则由引理7知，其有界变差解可向

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

右延拓．又 $G=G_c\times(a,b)$，由性质3知，其有界变差解必在(a,b)上有定义，且解最多只能延拓至b点．

当$[t_0,t_1]\subset(a,b)$时，首先考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_0+0)=x_0.\end{cases}\tag{9}$$

由引理4和定理3知，系统(9)在$t\in[t_0,t_1]$上存在有界变差解$x_0(t)$．下面考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_1+0)=x_0(t_1)+I_1(x_0(t_1)).\end{cases}\tag{10}$$

当$[t_1,t_2]\subset(a,b)$时，同样由引理4和定理3知，系统(10)在$t\in[t_1,t_2]$上存在有界变差解$x_1(t)$．当$t_k\leqslant b$时，依次类推，我们可以得到

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_{k-1}+0)=x_{k-2}(t_k)+I_{k-1}(x_{k-2}(t_k))\end{cases}\tag{11}$$

的有界变差解$x_{k-1}(t)$，$t\in(t_{k-1},t_k]$．

定义

$$x(t;t_0,x_0)=\begin{cases}x_0(t), & t\in[t_0,t_1];\\ x_1(t), & t\in[t_1,t_2];\\ \quad\vdots & \\ x_{k-1}(t), & t\in(t_{k-1},t_k].\end{cases}$$

易证$x(t;t_0,x_0)$是系统(1)在(a,b)上的有界变差解． 】

定理5 设$f\in\mathscr{U}(G,h,w)$，$(t_0,x_0)\in G_F$，且对每个$u>0$，

$$\lim_{v\to 0^+}\int_v^u\frac{1}{w(r)}dr=+\infty,$$

那么系统(1)在$[t_0,T]\subset(a,b)$上的每个满足$x(t_0)=x_0$的有界变差解$x(t)$是右行唯一的．

证明 对系统(5)，设$f\in\mathscr{U}(G,h,w)$，且$(t_0,x_0)\in G_F$，则由引理7知，其有界变差解可向右延拓．又$G=B_c\times(a,b)$，由性质3知，其有界变差解必在(a,b)上有定义，且解最多只能延拓至b点．

首先考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_0+0)=x_0.\end{cases}\tag{12}$$

由引理5知，系统(12)在$t\in[t_0,t_1]$上存在唯一的有界变差解$x_0(t)$．

考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_1+0)=x_0(t_1)+I_1(x_0(t_1)).\end{cases}\tag{13}$$

同样由引理5知，系统(13)在$t\in[t_1,t_2]$上存在唯一的有界变差解$x_1(t)$．依次类推，对$t\in[t_{i-1},t_i]\subset[t_0,T]$，$i\leqslant k$，我们可以得到

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_{i-1}+0)=x_{i-2}(t_i)+I_{i-1}(x_{i-2}(t_i))\end{cases}\tag{14}$$

的解$x_{i-1}(t)$，$t\in(t_{i-1},t_i]$．

定义

$$x(t;t_0,x_0)=\begin{cases}x_0(t), & t\in[t_0,t_1];\\ x_1(t), & t\in[t_1,t_2];\\ \quad\vdots & \\ x_{k-1}(t), & t\in(t_{k-1},t_k].\end{cases}$$

易证$x(t;t_0,x_0)$的解是系统(1)在(a,b)上唯一的有界变差解． 】

参考文献：

[1] 傅希林，闫宝强，刘衍胜．**脉冲微分系统引论**[M]．北京：科学出版社，2005．

[2] LAKSHIMIKANTHAM V，BAINOVD D，SIMEONOV P S．*Theory of Impulsive Differential Equations* [M]．Singapore：World Scientific，1980．

[3] 李宝麟，梁雪峰．一类脉冲微分系统的φ有界变差解[J]．**西北师范大学学报：自然科学版**，2007，**43**(4)：1-5．

[4] 吴从炘，李宝麟．不连续系统的有界变差解[J]．**数学研究**，1998，**31**(4)：417-427．

[5] 李宝麟，尚德泉．一类不连续系统的变差稳定性[J]．**西北师范大学学报：自然科学版**，2006，**42**(2)：15-18．

[6] WU Cun-xing，LI Bao-lin．STANLEY Lee E．Discontinuous system and Henstock-Kurzweil integrals[J]．*J Math Anal Appl*，1999，**229**(1)：119-139．

[7] SCHWABIK S．*Generalized Ordinary Differential Equations*[M]．Singapore：World Scientific，1992．

[8] 马学敏．**不连续系统和Kurzweil广义常微分方程**[D]．兰州：西北师范大学，2007．

（责任编辑　马宇鸿）

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net