DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2009.03.003
第21卷 第3期
2009年9月
甘肃科学学报
Journal of Gansu Sciences
Vol.21 No.3
Sep.2009

二阶两点边值问题正解的存在性

张 婷
(西北师范大学 数学与信息科学学院,甘肃 兰州 730070)

摘 要: 讨论了二阶非线性边值问题

$$\begin{cases} -u''(t)+bu'(t)+au(t)=f(t,u(t)),t\in[0,1] \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性,其中$f:[0,1]\times \mathrm{R}^{+}\to R^{+}$为连续函数.利用锥上的不动点理论,获得了正解存在的最优结果.

关键词: 二阶边值问题;正解;锥;不动点

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-0366(2009)03-0010-05

Positive Solutions of Second Order Boundary Value Problem

ZHANG Ting
(*College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: This paper studies the existence of positive solutions for the second order boundary value problem

$$\begin{cases} -u''(t)+bu'(t)+au(t)=f(t,u(t)),t\in[0,1] \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

where $f:[0,1]\times R^{+}\to R^{+}$ is continuous. The existence of positive solutions is obtained by applying the fixed-point theorem of cone map.

Key words: second-order boundary value problem; positive solution; cone; fixed-point

考虑二阶非线性边值问题

$$\begin{cases} -u''(t)+bu'(t)+au(t)=f(t,u(t)),t\in[0,1] \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性,其中$f:[0,1]\times \mathrm{R}^{+}\to R^{+}$为连续函数,$a,b\in \mathrm{R}$.

二阶边值问题描述了大量力学和电学模型,因此其研究具有重要意义.许多学者都对该问题做过研究,其中文献[1]对$a=0,b=0$的情形应用锥映射的拓扑度方法,文献[2]对$b=0$的情形应用锥压缩与锥拉伸不动点定理,研究了问题(1)的正解的存在性.我们对文献[1,2]的工作进行推广,在$a\neq 0,b\neq 0$时,借助于Green函数的研究及锥上的不动点理论,讨论了问题(1)正解的存在性.

1 预备工作及引理

以下记$C(I)$为$[0,1]$上连续函数以范数$\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$构成的Banach空间,$L^2(I)$为$[0,1]$上的平方可积函数以范数$\|u\|_2=(\int_0^1|u(t)|^2\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}$构成的Hilbert空间,$C^{+}(I)=\{u\in \mathrm{C(I)}\mid \mathrm{u(t)}\geqslant 0\}$为

收稿日期: 2008-12-16

$C(I)$ 中的非负函数锥,并记 $I=[0,1]$ 为单位区间.

引理 1　设 $M>-\pi^2$,则线性二阶边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)+Mu(t)=h(t),t\in \mathrm{I}\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}\tag{2}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s.$$

其中 $G(t,s)$ 为相应齐次线性边值问题的 Green 函数,且具有如下性质

(ⅰ) $G(t,s)>0.\ \forall\, \mathrm{t},\mathrm{s}\in \mathrm{I}$.

(ⅱ) $G(t,s)\leqslant \mathrm{c}\,\mathrm{G}(\mathrm{s},\mathrm{s}),\ \forall\, \mathrm{t},\mathrm{s}\in \mathrm{I}$,其中 $\mathrm{c}>0$ 且为常数.

(ⅲ) $G(t,s)\geqslant \delta\,\mathrm{G}(\mathrm{t},\mathrm{t})\mathrm{G}(\mathrm{s},\mathrm{s}),\ \forall\, \mathrm{t},\mathrm{s}\in \mathrm{I}$,其中 $\delta>0$ 且为常数[3].

引理 2　设 $a,b\in \mathrm{R}$,则线性特征值问题

$$\begin{cases}-u''(t)+bu'(t)+au(t)=\lambda u,t\in \mathrm{I}\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}\tag{3}$$

的特征值为

$$\lambda_k=a+\frac{b^2}{4}+k^2\pi^2,k=1,2,\cdots,$$

相应的特征函数为

$$\psi_k(t)=e^{\frac{b}{2}t}\sin k\pi t,k=1,2,\cdots.$$

证明　当 $\Delta=b^2+4(a-\lambda)>0$ 时,记 $w=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$,那么方程

$$-u''+bu'+au=\lambda u\tag{4}$$

的通解为

$$u(t)=c_1e^{\frac{b}{2}t}\sinh w\,t+c_2e^{\frac{b}{2}t}\sinh w(1-t),$$

代入边界条件得 $c_1=0,c_2=0$,故问题(3) 只有零解.

当 $\Delta=0$ 时,方程(4) 的通解为

$$u(t)=c_1e^{\frac{b}{2}t}t+c_2e^{\frac{b}{2}t}(1-t),$$

代入边界条件得 $c_1=0,c_2=0$,此时问题(3) 也只有零解.

当 $\Delta=b^2+4(a-\lambda)<0$ 时,记 $w=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$,方程(4) 的通解为

$$u(t)=c_1e^{\frac{b}{2}t}\sin w\,t+c_2e^{\frac{b}{2}t}\sin w(1-t),$$

代入边界条件得

$$u(0)=c_2\sin w=0,u(1)=c_1e^{\frac{b}{2}}\sin w.$$

则问题(3) 有非零解的充要条件为 $\sin w=0$,即 $w=k\pi$,由此 $\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}=k\pi$,从而

$$\lambda_k=a+\frac{b^2}{4}+k^2\pi^2,k=1,2,\cdots,$$

相应的特征函数为

$$\psi_k(t)=e^{\frac{b}{2}t}\sin k\pi t,k=1,2,\cdots.$$

证毕.

引理 3　设 $a>-\pi^2-\dfrac{b^2}{4}$,当 $h\in \mathrm{C}^+(I)$ 时,线性方程

$$\begin{cases}-u''(t)+bu'(t)+au(t)=h(t),t\in \mathrm{I}\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}\tag{5}$$

有唯一正解 $u(t)$,且有强正性估计

$$u(t)\geqslant \frac{m\delta}{Mc}G(t,t)\,\|\,u\,\|,t\in \mathrm{I}.\tag{6}$$

证明　因为 $a>-\pi^2-\frac{b^2}{4}$，由引理 2 知，问题(5) 的解存在且唯一. 将问题(5) 化为标准的 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases}-(e^{-bt}u')'+e^{-bt}au=e^{-bt}h(t),t\in \mathrm{I}\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases} \tag{7}$$

当 $\Delta=b^2+4a>0$ 时，记 $w=\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$，则问题(7) 相应的齐次边值问题的 Green 函数为

$$H_1(t,s)=\begin{cases}e^{\frac{b}{2}(t+s)}\cdot\frac{\sinh wt\cdot\sinh w(1-s)}{w\sinh w},0\leqslant \mathrm{t}\leqslant \mathrm{s}\leqslant 1\\ e^{\frac{b}{2}(s+t)}\cdot\frac{\sinh ws\cdot\sinh w(1-t)}{w\sinh w},0\leqslant \mathrm{s}\leqslant \mathrm{t}\leqslant 1,\end{cases} \tag{8}$$

当 $\Delta=0$ 时，问题(7) 相应的齐次边值问题的 Green 函数为

$$H_1(t,s)=\begin{cases}e^{\frac{b}{2}(t+s)}\cdot t(1-s),0\leqslant \mathrm{t}\leqslant \mathrm{s}\leqslant 1\\ e^{\frac{b}{2}(s+t)}\cdot s(1-t),0\leqslant \mathrm{s}\leqslant \mathrm{t}\leqslant 1,\end{cases} \tag{9}$$

当 $\Delta=b^2+4a<0$ 时，记 $w=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$，则问题(7) 相应的齐次边值问题的 Green 函数为

$$H_1(t,s)=\begin{cases}e^{\frac{b}{2}(t+s)}\cdot\frac{\sin wt\cdot\sin w(1-s)}{w\sin w},0\leqslant \mathrm{t}\leqslant \mathrm{s}\leqslant 1\\ e^{\frac{b}{2}(s+t)}\cdot\frac{\sin ws\cdot\sin w(1-t)}{w\sin w},0\leqslant \mathrm{s}\leqslant \mathrm{t}\leqslant 1,\end{cases} \tag{10}$$

由此 $H_1(t,s)=e^{\frac{b}{2}(t+s)}\cdot G(t,s)$，其中 $G(t,s)$ 为齐次线性边值问题

$$-v''+\left(a+\frac{b^2}{4}\right)v=0,v(0)=v(1)=0$$

的 Green 函数.

则问题(5) 的解为

$$v(t)=\int_0^1 e^{\frac{b}{2}(t+s)}\cdot G(t,s)\cdot e^{-bs}h(s)\mathrm{d}s.$$

记

$$\Phi(t,s)=e^{\frac{b}{2}(t-s)},m=\min_{(t,s)\in \mathrm{I}}\Phi(t,s),M=\max_{(t,s)\in \mathrm{I}}\Phi(t,s)$$

则 $0<m<M<+\infty$，因 $a>-\pi^2-\frac{b^2}{4}$，由引理 1(ⅱ) 有

$$u(t)=\int_0^1\Phi(t,s)G(t,s)h(s)\mathrm{d}s\leqslant \mathrm{Mc}\int_0^1 G(s,s)h(s)\mathrm{d}s,$$

故

$$\|u\|\leqslant \mathrm{Mc}\int_0^1 G(s,s)h(s)\mathrm{d}s.$$

另一方面，由引理(1)(ⅲ) 有

$$u(t)=\int_0^1\Phi(t,s)G(t,s)h(s)\mathrm{d}s\geqslant \mathrm{m}\delta \mathrm{G}(\mathrm{t},\mathrm{t})\int_0^1 G(s,s)h(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{m\delta}{Mc}G(t,t)\|u\|,$$

即式(6) 成立. 证毕.

引理 4　若算子 $L:D(L)\to L^2(I)$ 是正常算子，即 $LL^*=L^*L$，其中 L^* 为 L 的共轭算子，λ_1 为 L 的最小正实特征值，且 λ_1 是单重的，$\psi_1(t)$ 为相应的正特征函数，则 λ_1 亦为 L^* 的特征值，$\psi_1(t)$ 亦为相应的特征函数[4].

利用锥上的不动点理论考察问题(1) 正解的存在性，在讨论中需要用到 2 个关于锥映射度数的引理.

引理 5　设 E 为 Banach 空间，$K\subset \mathrm{E}$ 为闭凸锥，$\Omega\subset \mathrm{E}$ 为有界开集，$\theta\in\Omega$，$\mathrm{A}:\mathrm{K}\cap\bar{\Omega}\to K$ 为全连续映射. 若对任意 $u\in\partial\Omega\cap \mathrm{K}$ 及 $0<\mu\leqslant 1$，$\mu Au\neq \mathrm{u}$，则 $\mathrm{i}(\mathrm{A},\mathrm{K}\cap\Omega,\mathrm{K})=1$[5].

引理 6　设 E 为 Banach 空间，$K\subset E$ 为闭凸锥，$\Omega\subset E$ 为有界开集，$\theta\in\Omega$，$A:K\cap\bar{\Omega}\to K$ 为全连续映射．若存在 $e\in K$，$e\neq\theta$ 使得对任意 $u\in\partial\Omega\cap K$ 及 $\tau\geqslant 0$，$u-Au\neq\tau e$，则 $i(A,K\cap\Omega,K)=0$[5]．

2　主要结果及证明

为了方便，引入下列记号

$$\underline{f}_0=\lim_{u\to 0^+}\inf\min_{t\in I}\frac{f(t,u)}{u},\quad \overline{f}_0=\lim_{u\to 0^+}\sup\max_{t\in I}\frac{f(t,u)}{u},$$

$$\underline{f}_\infty=\lim_{u\to+\infty}\inf\min_{t\in I}\frac{f(t,u)}{u},\quad \overline{f}_\infty=\lim_{u\to+\infty}\sup\max_{t\in I}\frac{f(t,u)}{u}.$$

定理 1　设 $a>-\pi^2-\dfrac{b^2}{4}$，若 $f:I\times R^+\to R^+$ 连续，满足下列条件之一

(ⅰ) $\overline{f}_0<\pi^2+a+\dfrac{b^2}{4}$，$\underline{f}_\infty>\pi^2+a+\dfrac{b^2}{4}$，

(ⅱ) $\underline{f}_0>\pi^2+a+\dfrac{b^2}{4}$，$\overline{f}_\infty<\pi^2+a+\dfrac{b^2}{4}$，

则边值问题(1) 至少有一个正解．

证明　取非负函数锥 $C^+(I)$ 的子锥

$$K=\{u\in C^+(I)\mid u(t)\geqslant\frac{m\delta}{Mc}G(t,t)\|u\|,\ \forall t\in I\},$$

易见 K 是一个闭凸锥．令

$$Au(t)=\int_0^1\Phi(t,s)G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

则由引理 3，$A:K\to K$ 全连续，设 $0<r<R<+\infty$，令

$$K_r=\{u\in K\mid\|u\|\leqslant r\},\ K_R=\{u\in K\mid\|u\|\geqslant R\}$$

则 $\theta\in K_r$，$\overline{K_r}\subset K_R$．记 $L:D(L)\to L^2(I)$

$$Lu=-u''+bu'+au,\ D(L)=\{u\in C(I)\mid u(0)=u(1)=0\}.$$

而 $\pi^2+a+\dfrac{b^2}{4}$ 为问题(1) 所对应的线性边值问题的最小正实特征值，记 $\lambda_1=\pi^2+a+\dfrac{b^2}{4}$，相应的特征函数 $\psi_1(t)=e^{\frac{b}{2}t}\sin\pi t$．以下仅证条件(ⅰ) 成立的情形，条件(ⅱ) 成立的情形可同理证得．

由条件 $\overline{f}_0<\lambda_1$ 及 $\overline{f}_0$ 的定义可知，存在 $\varepsilon>0$，$\eta>0$，使得

$$f(t,x)\leqslant(\lambda_1-\varepsilon)x,\ \forall t\in I,\ x\in[0,\eta]. \tag{11}$$

取 $r\in[0,\eta]$，下证引理 5 的条件成立，即

$$\mu Au\neq u,\ \forall u\in\partial K_r\cap K,\ 0<\mu\leqslant 1. \tag{12}$$

反设 $\exists u_0\in\partial K_r\cap K$，及 $0<\mu_0\leqslant 1$，使 $u_0=\mu_0Au_0$．由 A 的定义有

$$\begin{cases}Lu_0=\mu_0f(t,u_0(t)),\ t\in I\\ u_0(0)=u_0(1)=0.\end{cases} \tag{13}$$

方程(13) 的两边同时与 $\psi_1(t)=e^{\frac{b}{2}t}\sin\pi t$ 作内积，由式(11) 可得

$$\langle Lu_0,\psi_1\rangle=\mu_0\int_0^1 f(t,u_0(t))\psi_1(t)\mathrm{d}t\leqslant(\lambda_1-\varepsilon)\int_0^1 u_0(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t, \tag{14}$$

另外由共轭算子的定义易得 $L^*v=-v''-bv'+av$，由此有 $LL^*=L^*L$，而 λ_1 为 L 的最小正实特征值，且 λ_1 是单重的，由引理 4 知

$$\langle Lu_0,\psi_1\rangle=\langle u_0,L^*\psi_1\rangle=\langle u_0,\lambda_1\psi_1\rangle=\lambda_1\int_0^1 u_0(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t, \tag{15}$$

又因为 $\int_0^1 u_0(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t\geqslant\dfrac{m\delta}{Mc}\int_0^1 G(t,t)\psi_1(t)\mathrm{d}t\cdot\|u_0\|>0$，由式(14) 及式(15) 得 $\lambda_1\leqslant\lambda_1-\varepsilon$，矛盾！故由引理 5 有

$$i(A, K \cap K_r, K) = 1. \tag{16}$$

另一方面,因为 $\underline{f}_\infty > \lambda_1$,由 $\underline{f}_\infty$ 的定义可知,$\exists\, \varepsilon > 0, R_0 > 0$,使得

$$f(t, x) \geqslant (\lambda_1 + \varepsilon)x, \forall t \in I, x \geqslant R_0. \tag{17}$$

取 $R > \max\{\eta, R_0\}$,下证引理6的条件成立.即取 $e = \psi_1(t)$,则 e 为 $h(t) = \lambda_1\psi_1(t)$ 对应的线性边值问题(5)的解,所以 $e \in K, e \neq \theta$,则有

$$u - Au \neq \tau e, \forall u \in \partial K_R \cap K, \tau \geqslant 0. \tag{18}$$

反设 $\exists\, u_0 \in \partial K_R \cap K$,及 $\tau_0 \geqslant 0$,使得 $u_0 - Au_0 = \tau_0 e$,由 A 的定义有

$$\begin{cases} Lu_0 = f(t, u_0(t)) + \lambda_1\tau_0 e, t \in I \\ u_0(0) = u_0(1) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

令 $c_0 = \max\{|f(t, x) - (\lambda_1 + \varepsilon)x| \mid t \in I, 0 \leqslant x \leqslant R_0\} + 1 > 0$,结合式(17),容易得到

$$f(t, x) \geqslant (\lambda_1 + \varepsilon)x - c_0, \forall t \in I, x \geqslant 0. \tag{20}$$

方程(19)的两边同时与 $\psi_1(t)$ 作内积,由式(20)可得

$$\langle Lu_0, \psi_1\rangle = \int_0^1 (f(t, u_0(t)) + \lambda_1\tau_0 e)\psi_1(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 f(t, u_0(t))\psi_1(t)\mathrm{d}t \geqslant$$

$$(\lambda_1 + \varepsilon)\int_0^1 u_0(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t - c_0\int_0^1 \psi_1(t)\mathrm{d}t,$$

结合式(15)有 $\int_0^1 u_0(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{c_0}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_1(t)\mathrm{d}t$.又因为 $\int_0^1 u_0(t)\psi_1(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{m\delta}{Mc}\int_0^1 G(t, t)\psi_1(t)\mathrm{d}t \cdot \|u_0\|$,

所以

$$\|u_0\| \leqslant \frac{Mcc_0\int_0^1 \psi_1(t)\mathrm{d}t}{m\varepsilon\delta\int_0^1 G(t, t)\psi_1(t)\mathrm{d}t} \triangleq \bar{R},$$

故 $R \leqslant \bar{R}$,于是取 $R > \max\{\eta, R_0, \bar{R}\}$,由引理6可知 $i(A, K \cap K_R, K) = 0$.

上式结合式(16)与不动点指数的区域可加性,可知

$$i(A, K \cap (K_R \setminus \overline{K}_r), K) = i(A, K \cap K_R, K) - i(A, K \cap K_r, K) = 0 - 1 = -1 \neq 0,$$

由可解性,A 在 $K \cap (K_R \setminus \overline{K}_r)$ 内存在不动点,该不动点即为问题(1)的正解.证毕.

注 $\pi^2 + a + \frac{b^2}{4}$ 是线性边值问题(5)的特征值,如果定理1中的条件(ⅰ)或条件(ⅱ)不成立,那么问题(1)解的存在性就不能保证.因此,条件(ⅰ)和条件(ⅱ)中的 $\pi^2 + a + \frac{b^2}{4}$ 是最优结果,不能被改进.

参考文献:

[1] Liu Zhao-li, Li Fu-yi. Multiple Positive Solutions of Nonlinear Two-point Boundary Value Problems[J]. J. Math. Anal. Appl, 1996, 203: 610-625.

[2] 吴红萍.二阶Dirichlet边值问题的正解[J].甘肃科学学报,2007,19(1):53-55.

[3] Li Yong-xiang. Positive Solutions of Fourth-order Boundary Value Problems with Two Parameters[J]. J. Math. Anal. Appl, 2003, 281: 477-484.

[4] Li Yong-xiang. Abstract Existence Theorems of Positive Solutions for Nonlinear Boundary Value Problems[J]. Nonlinear Analysis, 2004, 57: 211-227.

[5] 郭大钧.非线性泛函分析[M].济南:山东科学技术出版社,2001.

[6] 王兆青.抽象二阶边值问题正解的存在性[J].甘肃科学学报,2004,16(3):27-29.

[7] 吴红萍.二阶Nuemann边值问题两个正解的存在性[J].数学研究,2001,34(4):370-373.

[8] 宋福民.Banach空间中两点边值问题的解[J].数学年刊,1993,14(6):692-697.

作者简介:

张 婷 (1984-)女,甘肃省兰州人,西北师范大学数学与信息科学学院2007级在读硕士研究生,主要研究方向为非线性泛函分析.