doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2018477

一类带非线性边界条件的一阶奇异微分方程正解的存在性

祝 岩
(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘要：用 Krasnoselskii 不动点定理，证明一类带非线性边界条件的一阶微分方程

$$\begin{cases} u'(t)+a(t)u(t)=\lambda h(t)f(u(t)), & t\in(0,1), \\ u(0)=c(u(1))u(1) \end{cases}$$

正解的存在性结果. 其中：$\lambda>0$ 是一个参数；$a\in C([0,1],[0,\infty))$ 且 $\int_0^1 a(t)\mathrm{d}t>0$；$h\in C([0,1],(0,\infty))$；$c\in C([0,\infty),[1,\infty))$ 且 $c<\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}$；$f\in C((0,\infty),\mathbb{R})$，$f$ 在 ∞ 处超线性且 f 在 0 点允许有奇异性.

关键词：一阶微分方程；非线性边界条件；正解；奇异性；半正问题；Krasnoselskii 不动点定理
中图分类号：O175.8 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2019)05-1035-06

Existence of Positive Solutions of a Class of First-Order Singular Differential Equations with Nonlinear Boundary Conditions

ZHU Yan
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: By using the Krasnoselskii fixed point theorem, the author proves the existence of positive solutions of the first-order differential equation with nonlinear boundary conditions:

$$\begin{cases} u'(t)+a(t)u(t)=\lambda h(t)f(u(t)), & t\in(0,1), \\ u(0)=c(u(1))u(1), \end{cases}$$

where λ is a positive parameter. $a\in C([0,1],[0,\infty))$ and $\int_0^1 a(t)\mathrm{d}t>0$, $h\in C([0,1],(0,\infty))$, $c\in C([0,\infty),[1,\infty))$ and $c<\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}$, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ is continuous, superlinear at ∞ and is allowed to be singular at 0.

Keywords: first-order differential equation; nonlinear boundary condition; positive solution; singularity; semipositone problem; Krasnoselskii fixed point theorem

1 引言与预备知识

一阶常微分方程边值问题在物理学、生物学和计算机等领域应用广泛，例如：可用于描述动物红

收稿日期：2018-12-27. **网络首发日期**：2019-07-15.
作者简介：祝 岩(1995—)，男，汉族，硕士研究生，从事常微分方程边值问题的研究，E-mail：18693761799@163.com.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：11671322).
网络首发地址：http://kns.cnki.net/kcms/detail/22.1340.o.20190710.1619.001.html.

细胞的再生现象、种群生态系统的特征以及电路信号的传播频率等．目前，关于非线性一阶微分方程边值问题正解的存在性研究已有许多结果[1-13]．特别地，Zhang 等[9]用上下解方法和单调迭代方法得到了一阶周期边值问题：

$$\begin{cases} u'(t)+a(t)u(t)=\lambda h(t)f(t(t-\tau(t))), & t\in\mathbb{R}, \\ u(t)=u(t+\omega), \end{cases}$$

基于下列条件正解的存在性结果：

1) $a\in C(\mathbb{R},[0,+\infty))$，$h\in C(\mathbb{R},(0,+\infty))$，$\tau\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$均为 ω 周期的函数，且$\int_0^\omega a(t)\mathrm{d}t>0$；

2) $f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$ 非减且 $f(0)>0$.

朱雯雯[10]用上下解方法和拓扑度理论给出了一阶周期边值问题：

$$\begin{cases} u'(t)+a(t)u(t)=\lambda f(t,u(t)), & t\in[0,T], \\ u(0)=u(T), \end{cases}$$

基于下列条件正解的存在性结果：

1) $a\in C(\mathbb{R},[0,+\infty))$，$\int_0^T a(\theta)\mathrm{d}\theta>0$；

2) $f\in C([0,T]\times[0,+\infty),(0,+\infty))$；

3) $f_\infty=\liminf\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(t,u)}{u}=\infty$对任意的 $t\in[0,T]$一致成立.

在文献[9-10]中，非线性项 f 均是非负的，而当非线性项 f 为半正情形时一阶周期边值问题正解的存在性研究尚未见文献报道．文献[11]用 Leray-Schauder 度的性质和不动点理论，得到了一阶系统周期边值问题：

$$\begin{cases} x'+b(t)x=g(t,x), & t\in[0,1], \\ x(0)=x(1) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性结果．当问题(1)为一阶周期边值问题并且 $g(t,x)$ 恒为 0 时，问题(1)即退化为人口模型 $x'(t)=-b(t)x(t)$．受上述研究结果启发，本文研究非线性项半正情形下的一类带非线性边界条件的含参一阶微分方程：

$$\begin{cases} u'(t)+a(t)u(t)=\lambda h(t)f(u(t)), & t\in(0,1), \\ u(0)=c(u(1))u(1) \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性．其中：$\lambda>0$ 是一个参数；f 在 0 点允许有奇异性.

假设：

(H_1) $a\in C([0,1],[0,\infty))$，$\int_0^1 a(t)\mathrm{d}t>0$，$h\in C([0,1],(0,\infty))$；

(H_2) $c\in C([0,\infty),[1,\infty))$且 $c<\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}$；

(H_3) $f\in C((0,\infty),\mathbb{R})$且$\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f(s)}{s}=+\infty$；

(H_4) 存在常数 γ 满足 $0<\gamma<1$，使得 $\limsup\limits_{s\to0^+}s^\gamma|f(s)|<+\infty$.

记 $\|\cdot\|_p$ 为 $L^p(0,1)$中的范数.

引理 1(**Krasnoselskii 不动点定理**)[1] 令 X 是一个 Banach 空间，T：$X\to X$ 是一个全连续算子．假设存在 $h\in X$，$h\neq0$ 及两个不相等的正常数 r,R，使得下列条件成立：

1) 如果 $y\in X$ 满足 $y=\theta Ty$，$\theta\in[0,1]$，则 $\|y\|\neq r$；

2) 如果 $y\in X$ 满足 $y=Ty+\xi h$，$\xi\geqslant0$，则 $\|y\|\neq R$.

则 T 在 X 中有一个不动点 y，并且满足 $\min\{r,R\}<\|y\|<\max\{r,R\}$.

设 $m(t)\in C([0,1],(0,+\infty))$，则线性问题：

$$\begin{cases} u'(t)+a(t)u(t)=m(t), & t\in(0,1), \\ u(0)=\alpha u(1) \end{cases}$$

有唯一解 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)m(s)\mathrm{d}s$，其中 $1\leqslant\alpha<\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}$ 是一个常数，并且

$$G(t,s)=\begin{cases} \exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\left(\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}-\alpha\right)^{-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \alpha\exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\left(\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}-\alpha\right)^{-1}, & 0\leqslant t<s\leqslant 1. \end{cases} \tag{3}$$

显然 $G(t,s)>0$. 记 $0<N=\min\limits_{0\leqslant s,\ t\leqslant 1}G(t,s)\leqslant G(t,s)\leqslant\max\limits_{0\leqslant t,\ s\leqslant 1}G(t,s)=M$，进一步有

$$u(t)\geqslant N\int_0^1 m(s)\mathrm{d}s=\frac{N}{M}M\int_0^1 m(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{N}{M}\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)m(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{N}{M}\|u\|_\infty.$$

注 1　特别地，当 α 恒为 1 时，格林函数(3)将退化为

$$G(t,s)=\begin{cases} \exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\left(1-\exp\left\{-\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\right)^{-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\left(\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}-1\right)^{-1}, & 0\leqslant t<s\leqslant 1. \end{cases} \tag{4}$$

式(4)即为文献[12]中给出的边界条件为 $u(0)=u(1)$ 的一阶微分方程的格林函数.

引理 2　令 $k\in L^1(0,1)$，$k\geqslant 0$，$u\in C[0,1]\cap C^1(0,1]$，并且在 $(0,1)$ 上满足

$$\begin{cases} u'+au\geqslant -k, \\ u(0)\leqslant\alpha u(1), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $1\leqslant\alpha<\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}$ 是一个常数. 假设 $\|u\|_\infty>\|k\|_1$，则有

$$u(t)\geqslant\frac{N}{M}\|u\|_\infty-M\|k\|_1. \tag{6}$$

证明：令 w_0 是问题

$$\begin{cases} w'(t)+a(t)w(t)=-k(t), & t\in(0,1), \\ w(0)=\alpha u(1) \end{cases}$$

的唯一解. 则 $w_0(t)=-\int_0^1 G(t,s)k(s)\mathrm{d}s$，$t\in(0,1)$. 令 $y=u-w_0$，则有

$$\begin{cases} y'(t)+a(t)y(t)\geqslant 0, & t\in(0,1), \\ y(0)\leqslant\alpha y(1). \end{cases}$$

因为 $y(t)\geqslant\frac{N}{M}\|y\|_\infty$，$w_0(t)\geqslant-\int_0^1 Mk(s)\mathrm{d}s\geqslant -M\|k\|_1$，因此 $u(t)\geqslant\frac{N}{M}\|u\|_\infty-M\|k\|_1$. 证毕.

2　主要结果

设 $X=C[0,1]$ 是一个 Banach 空间，其范数 $\|u\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$.

定理 1　设 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$ 成立，则存在一个常数 $\lambda_0>0$，使得当 $\lambda<\lambda_0$ 时问题(2)存在一个正解 u_λ.

证明：令 $\lambda>0$，对任意 $v\in X$，定义 $T_\lambda v=u$，其中 u 是问题：

$$\begin{cases} u'(t)+a(t)y(t)=\lambda h(t)f(\tilde{v}(t)), & t\in(0,1), \\ u(0)=\alpha_v u(1) \end{cases}$$

的解，式中：$\tilde{v}(t)=\max\{v(t),1\}$；$\alpha_v=c(|v(1)|)$. 则 $u(t)=\lambda\int_0^1 G_v(t,s)h(s)f(\tilde{v}(s))\mathrm{d}s$，其中

$$G_v(t,s)=\begin{cases} \exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\left(\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}-\alpha_v\right)^{-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \alpha_v\exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\left(\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}-\alpha_v\right)^{-1}, & 0\leqslant t<s\leqslant 1. \end{cases}$$

记 M_v 是 $G_v(t,s)$ 的最大值，则对于任意 $t,s\in[0,1]$，$G_v(t,s)\leqslant M_v$. 由(H_4)，存在常数 $P>0$，使得

$$|f(\tilde{v}(s))| \leqslant \frac{P}{\tilde{v}^{\gamma}(s)} \leqslant P \in L^1(0,1). \tag{7}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可知 $u \in C[0,1]$，因此 $T_\lambda: X \to X$. 下证 T_λ 是一个全连续算子.

首先证明 T_λ 连续. 设 $v_n \subset C[0,1]$，使得在 X 中有 $v_n \to v$. 令 $u_n = T_\lambda v_n$，$u = T_\lambda v$. 固定 $t, s \in (0,1)$，对 $z > 0$ 定义 $H(z)$ 为

$$H(z) = \begin{cases} \exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} \exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} \left(\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} - z\right)^{-1}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ z\exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} \left(\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} - z\right)^{-1}, & 0 \leqslant t < s \leqslant 1. \end{cases}$$

记 $\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} = \mu$，则有 $H'(z) = \dfrac{\mu \exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}}{(\mu - z)^2}$，显然 $|H'(z)| \leqslant \dfrac{\mu^2}{(\mu - z)^2}$. 根据中值定理可得

$$|G_{v_n}(t,s) - G_v(t,s)| \leqslant \frac{\mu^2}{(\mu - z)^2} |\alpha_{v_n} - \alpha_v|.$$

因此对 $t \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u(t)| = {} & \lambda\left(\int_0^1 G_{v_n}(t,s)h(s)f(\tilde{v}_n(s))\mathrm{d}s - \int_0^1 G_v(t,s)h(s)f(\tilde{v}(s))\mathrm{d}s + \right. \\ & \left. \int_0^1 G_v(t,s)h(s)f(\tilde{v}_n(s))\mathrm{d}s - \int_0^1 G_v(t,s)h(s)f(\tilde{v}_n(s))\mathrm{d}s\right) = \\ & \lambda\left(\int_0^1 |G_{v_n}(t,s) - G_v(t,s)| h(s) |f(\tilde{v}_n(s))| \mathrm{d}s + \int_0^1 G_v(t,s)h(s) |f(\tilde{v}_n(s)) - f(\tilde{v}(s))| \mathrm{d}s\right) \leqslant \\ & \lambda\left(\frac{\mu^2}{(\mu - z)^2} |\alpha_{v_n} - \alpha_v| \int_0^1 h(s) |f(\tilde{v}_n(s))| \mathrm{d}s + \int_0^1 M_v h(s) |f(\tilde{v}_n(s)) - f(\tilde{v}(s))| \mathrm{d}s\right). \end{aligned} \tag{8}$$

因为 $\alpha_{v_n} \to \alpha_v$，由式(7)和 Lebesgue 控制收敛定理可知，当 $n \to \infty$ 时式(8)不等号右边趋于 0. 因而在 X 中 $u_n \to u$，因此 T_λ 连续. 因为

$$\begin{aligned} (T_\lambda v)'(t) = {} & -\int_0^t \exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} \exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} \left(\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} - \alpha_v\right)^{-1} a(t)h(s)f(\tilde{v}(s))\mathrm{d}s - \\ & \int_t^1 \alpha_v \exp\left\{\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} \left(\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} - \alpha_v\right)^{-1} a(t)h(s)f(\tilde{v}(s))\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

表明 T_λ 将 $C[0,1]$ 中的有界集映到 $C^1[0,1]$ 中的有界集，因此 T_λ 是一个 Banach 空间 X 中的全连续算子.

由(H_3)，存在 $a > 1$，使得对于 $z \geqslant a$ 有 $f(z) > 0$. 因为 $\limsup\limits_{s \to 0^+} s^\gamma |f(s)| < +\infty$，则存在一个常数 $b > 0$，使得 $|f(z)| \leqslant b/z^\gamma$，$z \in (0,a)$. 因此对于 $z > 0$，有

$$f(z) \geqslant -\frac{b}{z^\gamma}, \tag{9}$$

$$|f(z)| \leqslant \frac{b}{z^\gamma} + \hat{f}(\max\{z,a\}), \tag{10}$$

其中 $\hat{f}(s) = \sup\limits_{a \leqslant z \leqslant s} f(z)$，$s \geqslant a$，$\hat{f}$ 是非减的.

假设 $\lambda < \dfrac{a}{2Q(b + \hat{f}(a))}$，其中 $Q = M_u \int_0^1 h(s)\mathrm{d}s$. 下边对算子 T_λ 验证引理 1 中的条件.

1) 存在 $r_\lambda > 0$，使得如果 $u \in X$ 满足 $u = \theta T_\lambda u$，$\theta \in [0,1]$，则 $\|u\|_\infty \neq r_\lambda$.

对于 $\theta \in (0,1]$，令 $u \in X$ 满足 $u = \theta T_\lambda u$，则 $\dfrac{u}{\theta} = T_\lambda u$，并且

$$u(t) = \lambda\theta \int_0^1 G_u(t,s)h(s)f(\tilde{u}(s))\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1].$$

注意到 $a > 1$，由式(10)可得

$$|f(\tilde{u}(s))| \leqslant \frac{b}{\tilde{u}^\gamma(s)} + \hat{f}(\max\{\tilde{u}(s),a\}) \leqslant b + \hat{f}(\max\{u(s),a\}).$$

记 $\max G_u(t,s)=M_u$，进一步可得

$$|u(t)|\leqslant \lambda M_u\left(b\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s+\hat{f}(\max\{\|u\|_\infty,a\})\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s\right)=\lambda Q(b+\hat{f}(\max\{\|u\|_\infty,a\}),$$

从而可得

$$\frac{\|u\|_\infty}{Q(b+\hat{f}(\max\{\|u\|_\infty,a\})}\leqslant \lambda. \tag{11}$$

因为$\dfrac{a}{Q(b+\hat{f}(a))}>2\lambda$，由$(\mathrm{H}_3)$得$\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{z}{Q(b+\hat{f}(z))}=0$，则存在一个常数 $r_\lambda>a$，使得

$$\frac{r_\lambda}{Q(b+\hat{f}(r_\lambda))}=2\lambda. \tag{12}$$

联立式(11)，(12)可得 $\|u\|_\infty\neq r_\lambda$．注意到当 $\lambda\to0$ 时 $r_\lambda\to\infty$．

2）存在 $R_\lambda>r_\lambda$，使得若 $u=T_\lambda u+\xi$，$\xi\geqslant0$，则 $\|u\|_\infty\neq R_\lambda$．

令 $u\in X$ 满足 $u=T_\lambda u+\xi$，$\xi\geqslant0$，即 $u-\xi=T_\lambda u$，因此

$$u(t)-\xi=\lambda\int_0^1 G_u(t,s)h(s)f(\tilde{u}(s))\mathrm{d}s. \tag{13}$$

令 $k(t)=bh(t)$，$t\in(0,1)$，则 $k\in L^1(0,1)$．因为 u 满足

$$\begin{cases} u'(t)+a(t)u(t)=\lambda h(t)f(\tilde{u}(t)), & t\in(0,1),\\ u(0)\leqslant \alpha_u u(1), \end{cases}$$

由式(9)可得

$$h(t)f(\tilde{u}(t))\geqslant -\frac{bh(t)}{\tilde{u}^\gamma(t)}\geqslant -bh(t)=-k(t). \tag{14}$$

由引理 2 可知，当 $\|u\|_\infty>\|k\|_1$ 时，有

$$u(t)\geqslant \frac{N_u}{M_u}\|u\|_\infty-M_u\|k\|_1,\qquad t\in[0,1], \tag{15}$$

其中：$N_u=\min G_u(t,s)$；$M_u=\max G(t,s)$．假设 $\|u\|_\infty>\max\left\{2\|k\|_1,\dfrac{2M_u}{2N_u-M_u^2}\right\}$，则由式(15)得

$$u(s)\geqslant \frac{2N_u-M_u^2}{2M_u}\|u\|_\infty,\qquad s\in[0,1]. \tag{16}$$

因为

$$G_u(t,s)\geqslant N_u, \tag{17}$$

联立式(13)，(16)，(17)得

$$u(t)\geqslant \lambda\int_0^1 G_u(t,s)h(s)f(\tilde{u}(s))\mathrm{d}s\geqslant \lambda N_u\check{f}\left(\frac{2N_u-M_u^2}{2M_u}\|u\|_\infty\right)\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\check{f}(t)=\inf\limits_{z\geqslant t}f(z)$．进一步可得

$$\frac{N_u\check{f}\left(\dfrac{2N_u-M_u^2}{2M_u}\|u\|_\infty\right)\displaystyle\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s}{\|u\|_\infty}\leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{18}$$

因为当 $\|u\|_\infty\to\infty$时式(18)左边趋于∞，因此存在 $R_\lambda\gg1$ 满足 $\|u\|_\infty<R_\lambda$．故引理 1 中条件 2)得到验证．

根据引理 1，T_λ 存在一个不动点 u_λ，使得 $R_\lambda>\|u_\lambda\|_\infty>r_\lambda$．由于式(15)成立，并且 $\lambda\to0$ 时 $r_\lambda\to\infty$，因此当 λ 充分小时，u_λ 是问题(2)的一个正解．即存在一个常数 $\lambda_0>0$，使得当 $\lambda<\lambda_0$ 时，问题(2)存在一个正解 u_λ．证毕．

注 2　当非线性边界条件 $u(0)=c(u(1))u(1)$中的 $c(u(1))$恒为 1 时，该条件可退化为问题(1)中一般的周期边界条件 $u(0)=u(1)$．因此，本文的非线性边界条件是对周期边界条件的推广．

注 3　注意本文研究问题(2)正解的存在性时，边界条件中的非线性项 $c\in C([0,\infty),[1,\infty))$，并且 $c<\exp\left\{\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}$．

当 $c\in C([0,\infty),(0,1])$时，引理2可以改写成如下形式：

引理3 令 $k\in L^1(0,1)$，$k\geqslant 0$，$u\in C[0,1]\cap C^1(0,1]$，并且在$(0,1)$上满足

$$\begin{cases} u'+au\geqslant -k, \\ u(0)\geqslant \alpha u(1), \end{cases}$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1$ 是一个常数. 假设 $\|u\|_\infty>\|k\|_1$，则有

$$u(t)\geqslant \frac{N}{M}\|u\|_\infty - M\|k\|_1.$$

用上述证明方法，同理可得问题(2)当 $c\in C([0,\infty),(0,1])$时正解的存在性结果.

参 考 文 献

[1] AMANN H. Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces [J]. SIAM Rev, 1976, 18(4): 620-709.

[2] GRAEF J R, KONG Lingju. Periodic Solutions for Functional Differential Equations with Sign-Changing Nonlinearities [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2010, 140(3): 597-616.

[3] MA Ruyun, CHEN Ruipeng, CHEN Tianlan. Existence of Positive Periodic Solutions of Nonlinear First-Order Delayed Differential Equations [J]. J Math Anal Appl, 2011, 384(2): 527-535.

[4] MA Ruyun, GAO Chenghua, XU Jia. Existence of Positive Solutions for First Order Discrete Periodic Boundary Value Problems with Delay [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74(12): 4186-4191.

[5] CHEN Ruipeng, LI Xiaoya. Positive Periodic Solutions for Nonlinear First-Order Delayed Differential Equations at Resonance [J/OL]. Bound Value Probl, 2018-12-11. https://doi.org/10.1186/s13661-018-1104-x.

[6] DERHAB M, KHEDIM T, MESSIRDI B. Existence Results of First-Order Differential Equations with Integral Boundary Conditions at Resonance [J]. Comm Appl Nonlinear Anal, 2017, 24(2): 93-106.

[7] WANG Bin, WU Xinyuan, MENG Fanwei, et al. Exponential Fourier Collocation Methods for Solving First-Order Differential Equations [J]. J Comput Math, 2017, 35(6): 711-736.

[8] JIN Zhilong, WANG Haiyan. A Note on Positive Periodic Solutions of Delayed Differential Equations [J]. Appl Math Lett, 2010, 23(5): 581-584.

[9] ZHANG Guang, CHENG Suisun. Positive Periodic Solutions of Non-autonomous Functinal Differential Equations Depengding on a Parameter [J]. Abstract Appl Anal, 2002, 7(5): 279-286.

[10] 朱雯雯. 带参数的一阶周期边值问题正解的存在性及多解性 [J]. 山东大学学报(理学版), 2016, 51(12): 36-41. (ZHU Wenwen. Existence and Multiplicity of Positive Solutions of First Order Periodic Boundary Value Problems with Parameter [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2016, 51(12): 36-41.)

[11] TISDELL C C. Existence of Solutions to First-Order Periodic Boundary Value Problems [J]. J Math Anal Appl, 2006, 323(2): 1325-1332.

[12] CHU Jifeng, NIETO J J. Impulsive Periodic Solutions of First-Order Singular Differential Equations [J]. Bull Lond Math Soc, 2008, 40(1): 143-150.

[13] REZAIGUIA A, ARDJOUNI A, DJOUDI A. Existence of Positive Periodic Solutions of First-Order Neutral Differential Equations [J]. Honam Math J, 2018, 40(1): 1-11.

(责任编辑：李　琦，赵立芹)