DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2011.01.003
第23卷 第1期 甘肃科学学报 Vol. 23 No. 1
2011年3月 Journal of Gansu Sciences Mar. 2011

一类脉冲微分系统的变差稳定性逆定理

姜旭东,李宝麟
(西北师范大学 数学与信息科学学院,甘肃 兰州 730070)

摘 要: 利用Kurzweil方程解的变差稳定性有关理论,在固定时刻脉冲微分系统有界变差解变差稳定性和渐近变差稳定性定理的基础上,讨论其变差稳定性逆定理,建立了该类脉冲微分系统有界变差解的变差稳定性和渐近变差稳定性定理的逆定理.

关键词: 脉冲微分系统;变差稳定性;渐近变差稳定性; Lyapunov函数
中图分类号: O175.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-0366(2011)01-0011-05

Converse Theorems of Variational Stability for a Class of Impulsive Differential Systems

JIANG Xu-dong, LI Bao-lin
(*College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: Converse theorems of variational stability and asymptotically variational stability for a class of impulsive differential systems are established and discussed by using the theories of variational stability for Kurzweil equation, based on the theorems of variational stability and asymptotically variational stability for a class of impulsive differential systems.

Key words: impulsive differential system; variational stability; asymptotically variational stability; Lyapunov function

考虑固定时刻一阶脉冲微分系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), t \neq t_i \\ \Delta x|_{t=t_i} = I_i(x(t_i)), t = t_i, i = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{1}$$

其中(H_1) $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots < +\infty, t_i \to +\infty (i \to +\infty)$,$(\mathrm{H}_2)$ $f: G \to R^n$,G是R^{n+1}中的开域,(H_3) $I_i: R^n \to R^n$连续,$I_i(0) = 0, i = 1,2,\cdots$. R^n为具有通常范数$\|\cdot\|$的n维欧氏空间,系统(1)的解在脉冲时刻t_i左连续,$\Delta x(t)|_{t=t_i} = x(t_i^+) - x(t_i)$.

1 预备知识

取系统(1)有限个脉冲点$t_i, i = 0,1,\cdots,k, k \in N$进行讨论,设有限个脉冲点$t_i \in (a,b) \subseteq R_+$,令$B_c = \{x \in R^n, \|x\| < c\}$, $c > 0$为常数,$G = B_c \times (a,b)$是R^{n+1}中的开集.

系统(1)有界变差解的定义见文献[1]中定义1,函数$x(t): [a,b] \to R^n$, H-K可积定义见文献[1,2],系统(1)的有界变差解变差稳定的定义,变差吸引的定义,渐近变差稳定的定义,见文献[2]中定义3.2 ~ 3.4.

定义1 设函数$f: G \to R^n$为Carathéodory函数,称$f: G \to R^n$属于$V(G,h,\omega)$,如果$f(t,x)$满足下列条

收稿日期:2010-05-12

基金项目:国家自然科学基金项目(10771171);甘肃省"555"创新人才工程资助项目;西北师范大学科技创新工程项目

件[1]：

（ⅰ）存在正值函数 $\delta:[t_0,T]\to(0,+\infty)$，对每个区间 $[u,v]$，满足 $\tau\in[u,v]\subset(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\subset[t_0,T]$，$\tau\neq t_i$，$i=0,1,2,\cdots,k$，以及 $x\in B_c$，有

$$\|f(\tau,x)(v-u)\|\leqslant h(v)-h(u). \tag{2}$$

（ⅱ）对每个区间 $[u,v]$，满足 $\tau\in[u,v]\subset(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\subset[t_0,T]$，$\tau\neq t_i$ 以及所有的 $x,y\in B_c$ 有

$$\|f(\tau,x)-f(\tau,y)\|(v-u)\leqslant\omega(\|x-y\|)(h(v)-h(u)), \tag{3}$$

其中 $h:[t_0,T]\to R^1$ 是定义在 $[t_0,T]$ 上单调增加的左连续函数，而 $\omega:[0,+\infty)\to R^1$ 是单调增加的连续函数，且 $\omega(r)>0(r>0)$，$\omega(0)=0$.

（ⅲ）对每个定义在 $[t_0,T]$，$t\neq t_i$ 上的阶梯函数 $\varphi(t)$，$f(t,\varphi(t))$ 在 $[t_0,T]$ 上是 H-K 可积的.

在以下讨论中 $f\in V(G,h,\omega)$.

对系统(1)作一个小扰动 $g(t,x)$，即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)+g(t,x),t\neq t_i\\ \Delta x|_{t=t_i}=I_i(x(t_i)),t=t_i,i=1,2,\cdots\end{cases} \tag{4}$$

其中扰动项 $g(t,x)$，$t\in[t_0,T]$，$t\neq t_i$，$x\in B_a$ 在 $[t_0,T]$ 上是 H-K 可积的，且对任意的 $\tau_1,\tau_2\in[t_0,T]$，$\tau_1,\tau_2\neq t_i$，有 $\|g(\tau_1,x(\tau_1))-g(\tau_2,x(\tau_2))\|\leqslant\omega(x(\tau_1)-x(\tau_2))<\bar{M}$，$\omega$ 为连续增函数，且 $\omega(0)=0$，$\omega(r)>0$，$r>0$，$\bar{M}>0$ 为常数，设 $p(t)=\int_{t_0}^{t}g(s,x)\,\mathrm{d}s$.

在扰动下系统(4)的有界变差解变差稳定的定义，变差吸引的定义，渐近变差稳定的定义，见文献[2]中定义4.1～4.3.

定义2 设 $-\infty<a<b<+\infty$，$G:[a,b]\to R^n$. 对区间的任一分划 $D:a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k=b$ 及任意的 $\lambda\geqslant0$，定义 $\sum\limits_{j=1}^{k}e^{-\lambda(b-\alpha_{j-1})}\|G(\alpha_j)-G(\alpha_{j-1})\|=v_\lambda(G,D)$，令 $e_\lambda\mathrm{Var}_a^bG=\sup\limits_{D}v_\lambda(G,D)$，数 $e_\lambda\mathrm{Var}_a^bG$ 称为函数 G 在区间 $[a,b]$ 上的 e_λ 变差[3].

引理1 $-\infty<a<b<+\infty$，$G:[a,b]\to R^n$. 任意的 $\lambda\geqslant0$，有[3]

$$e^{-\lambda(b-a)}\mathrm{Var}_a^bG\leqslant e_\lambda\mathrm{Var}_a^bG\leqslant\mathrm{Var}_a^bG.$$

若 $a\leqslant c\leqslant b$，则对 $\lambda\geqslant0$，有[3]

$$e_\lambda\mathrm{Var}_a^bG=e^{-\lambda(b-a)}e_\lambda\mathrm{Var}_a^cG+e_\lambda\mathrm{Var}_c^bG. \tag{5}$$

以下构造函数 $V_\lambda(s,x)$.

对 $a>0$，$t>0$，记 $A_a(t,x)=\{\varphi:[0,+\infty)\to R^n$；$\varphi$ 是 $[0,+\infty)$ 上的局部有界变差函数，且左连续. $\varphi(0)=0$，$\varphi(t)=x$，当 $s=t_i\in[0,t]$，$i=0,1,\cdots,k$ 时，$\varphi(t_i^+)-\varphi(t_i)=I_i(\varphi(t_i))$ 其中 I_i 由条件 H_3 定义，$\sup\limits_{s\in[0,t]}\|\varphi(s)\|<a\}$.

对 $\lambda\geqslant0$，$s\geqslant0$，$x\in B_a$，定义

$$V_\lambda(s,x)=\begin{cases}\inf\limits_{\varphi\in A_a(s,x)}\{e_\lambda\mathrm{Var}_0^s(\varphi(\sigma)-\int_0^\sigma f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t)\},s>0\\ \|x\|,s=0.\end{cases} \tag{6}$$

这个定义是合理的，因为对 $\varphi\in A_a(s,x)$，积分 $\int_0^\sigma f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t$，是变量 σ 的有界变差函数，因此函数 $\varphi(\sigma)-\int_0^\sigma f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t$ 也是有界变差函数，它的 e_λ 变差是有界的.

显然，函数 $\varphi=0\in A_a(s,x)$，因为对 $\sigma>0$，$\varphi(\sigma)-\int_0^\sigma f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t=0$，所以对任意的 $\lambda\geqslant0$，$s\geqslant0$，有

$$V_\lambda(s,0)=0. \tag{7}$$

2　主要结果及证明

引理 2　若 $\psi:[s,s+\eta(s)]\to R^n$，$s\neq t_i$，$i=0,1,2,\cdots,k$，$s\geqslant 0$，$\eta(s)>0$，是系统(1)的解，则对任意的 $\lambda\geqslant 0$，有不等式

$$\limsup_{\eta\to 0^+}\frac{V_\lambda(s+\eta,\psi(s+\eta))-V_\lambda(s,\psi(s))}{\eta}\leqslant -\lambda V_\lambda(s,\psi(s)) \tag{8}$$

成立.

若 $x:[t_0,T]\to R^n$ 为系统(1)满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解，对 $t_i\in[t_0,T]$，$i=1,2,\cdots,k$，对任意的 $\lambda\geqslant 0$，有不等式

$$V_\lambda(t_i^+,x(t_i^+))<V_\lambda(t_i,x(t_i)) \tag{9}$$

成立.

证明　对于 $s\in[0,+\infty)$，$s\neq t_i$，$i=0,1,2,\cdots,k$ 的情形，与文献[4]中引理 5.1 的证明类似.

若 $x:[t_0,T]\to R^n$ 为系统(1)满足初始条件 $x(t_0)=x_0$，$x_0\in R^n$ 的解，由文献[1]中定理 3 保证解的存在性. 对任意 $\eta>0$，选择 $a>\|x(t_i^+)\|+h(t_i+1)-h(t_i)$，$i=1,2,\cdots,k$，取 $\varphi\in A_a(t_i,x(t_i))$，其中 $\varphi(t_i)=x(t_i)$，$i=1,2,\cdots,k$.

对 $0<\eta<\eta(s)$，定义

$$\varphi_\eta(\sigma)=\begin{cases}\varphi(\sigma),\sigma\in[0,t_i]\\ x(\sigma),\sigma\in[t_i,t_i+\eta].\end{cases}$$

显然 $\varphi_\eta\in A_a(t_i+\eta,x(t_i+\eta))$. 由解的定义可知，$x$ 左连续，因此对 $\sigma\in[t_i,t_i+\eta]$，有

$$\begin{aligned}\|x(\sigma)\|&=\|x(t_i^+)+\int_{t_i}^{\sigma}f(t,x(t))\,\mathrm{d}t\|\leqslant\|x(t_i^+)\|+h(\sigma)-h(t_i)\leqslant\\&\|x(t_i^+)\|+h(t_i+1)-h(t_i)<a.\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}V_\lambda(t_i+\eta,x(t_i+\eta))&\leqslant e_\lambda\mathrm{Var}_0^{t_i+\eta}(\varphi_\eta(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi_\eta(t))\,\mathrm{d}t)=e^{-\lambda\eta}e_\lambda\mathrm{Var}_0^{t_i}(\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t)+\\&e_\lambda\mathrm{Var}_{t_i}^{t_i+\eta}(x(\sigma)-\int_0^{t}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t-\int_{t_i}^{\sigma}f(t,x(t))\,\mathrm{d}t)=\\&e^{-\lambda\eta}e_\lambda\mathrm{Var}_0^{t_i}(\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t)+\\&e_\lambda\mathrm{Var}_{t_i}^{t_i+\eta}(x(\sigma)-\int_0^{t}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t-x(\sigma)+x(t_i^+))=\\&e^{-\lambda\eta}e_\lambda\mathrm{Var}_0^{t_i}(\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t)+e_\lambda\mathrm{Var}_{t_i}^{t_i+\eta}(x(t_i^+)-\int_0^{t}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t)=\\&e^{-\lambda\eta}e_\lambda\mathrm{Var}_0^{t_i}(\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t).\end{aligned}$$

上式右端对 $\varphi\in A_a(t_i,x(t_i))$ 取下确界，有

$$V_\lambda(t_i+\eta,x(t_i+\eta))\leqslant e^{-\lambda\eta}V_\lambda(t_i,x(t_i)),$$

则

$$V_\lambda(t_i+\eta,x(t_i+\eta))-V_\lambda(t_i,x(t_i))\leqslant(e^{-\lambda\eta}-1)V_\lambda(t_i,x(t_i)).$$

由式(6)知 $V_\lambda(t_i,x(t_i))\geqslant 0$，当 $\eta\to 0^+$，有

$$V_\lambda(t_i^+,x(t_i^+))<V_\lambda(t_i,x(t_i)).$$

定理得证.

文献[2]中定理 3.5，3.6，给出系统(1)有界变差解变差稳定性和渐近变差稳定性 2 个判定定理，以下建立 2 个定理的逆定理.

定理 1　若系统(1)的平凡解是变差稳定的，则对任意的 $0<a<c$，存在函数 $V:[0,+\infty)\times B_a\to R$ 满

足下列条件:

(1) 对任意的 $x \in B_a$,函数 $V(\cdot,x)$ 左连续且有 $[0,+\infty)$ 上是局部有界变差函数.

(2) $V(t,0)=0$,且对任意的 $x,y \in B_a$,$t \in [0,+\infty)$,$|V(t,x)-V(t,y)| \leqslant \|x-y\|$.

(3) 对系统(1)任意的有界变差解 $x(t)$,当 $t=t_i$,$i=1,2,\cdots,k$ 时有

$$V(t_i^+,x(t_i^+)) < V(t_i,x(t_i)),$$

当 $t \neq t_i$ 时,函数 V 为不增函数.

(4) 函数 $V(t,x)$ 是正定的,即存在一个连续递增实函数 $v:[0,+\infty)\to R$,使得 $v(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho=0$;对任意 $(t,x) \in [0,+\infty)\times B_a$,有 $V(t,x) \geqslant v(\|x\|)$.

证明 对任意的 $x \in B_a$,$s \geqslant 0$,令 $V(s,x)=V_0(s,x)$,其中 $V_0(s,x)$ 由式(6)定义.

条件(1)、(2)的证明与文献[3]定理10.23中条件(1)、(2)的证明类似;式(8),式(9)可证条件(3)成立.

下证条件(4)成立.由文献[2]中定理4.4知,系统(1)的解 $x\equiv 0$ 是变差稳定的 $\Leftrightarrow$ 在扰动下的系统(4)的解 $x\equiv 0$ 是变差稳定的.由文献[2]中定义4.1知,称系统(4)的解 $x\equiv 0$ 是变差稳定的是指:对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,$\|y(t_0)\|<\delta$,$y\in R^n$,$\|y(t_i^+)-y(t_i^-)\|<\delta$,$p$ 是 $[t_0,T]$ 上的有界变差函数,在 $(t_0,T]$ 左连续,且 $\mathrm{Var}_{t_0}^{T}p(t)<\delta$,则对任意 $t\in[t_0,T]$,有 $\|y(t)\|<\varepsilon$.其中 $y(t,t_0,y_0)$ 是系统(4)满足 $y(t_0,t_0,y_0)$ 的解.

假设 $V(t,x)$ 不是正定的,则存在 ε,$0<\varepsilon<a$ 和序列 (t_m,x_m),$m=1,2,\cdots$,$\varepsilon \leqslant \|x_m\|<a$,$t_m\to\infty\ (m\to\infty)$,$m\to\infty$ 时,$V(t_m,x_m)\to 0$.

设 $\delta(\varepsilon)>0$ 相应于扰动下变差稳定性定义中的 ε.

设 $m_0\in N$,对 $m>m_0$,有 $V(t_m,x_m)<\delta(\varepsilon)$,则存在 $\varphi_m\in A_a(t_m,x_m)$,使

$$\mathrm{Var}_0^{t_m}\left(\varphi_m(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi_m(t))\,\mathrm{d}t\right)<\delta(\varepsilon),$$

令

$$p(\sigma)=\begin{cases}\varphi_m(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi_m(t))\,\mathrm{d}t, & \sigma\in[0,t_m]\\ x_m-\int_0^{t_m}f(t,\varphi_m(t))\,\mathrm{d}t, & \sigma\in[t_m,+\infty),\end{cases}$$

则 $\mathrm{Var}_0^{\infty}p=\mathrm{Var}_0^{t_m}\left(\varphi_m(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi_m(t))\,\mathrm{d}t\right)<\delta(\varepsilon)$,且函数 p 左连续.

对 $\sigma\in[0,t_m]$,有

$$\varphi_m(\sigma)=\int_0^{\sigma}f(t,\varphi_m(t))\,\mathrm{d}t+\varphi_m(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi_m(t))\,\mathrm{d}t=\int_0^{\sigma}f(t,\varphi_m(t))\,\mathrm{d}t+p(\sigma)-p(0)=$$

$$\varphi_m(0)+\int_0^{\sigma}[f(t,\varphi_m(t))+g(t,\varphi_m(t))]\,\mathrm{d}t.$$

由于 $\varphi_m\in A_a(t_m,x_m)$,$\varphi_m(t_i^+)-\varphi_m(t_i)=I_i(\varphi_m(t_i))$,因此,$\varphi_m$ 为系统(4)满足 $\|\varphi(t_i^+)-\varphi(t_i^-)\|<2a=\delta$,$i=0,1,\cdots,k$ 的解,由变差稳定性的定义知 $\|\varphi_m(s)\|<\varepsilon$,$s\in[0,t_m]$,因此有 $\|\varphi_m(t_m)\|=\|x_m\|<\varepsilon$,这与假设 $\varepsilon\leqslant\|x_m\|<a$ 矛盾,所以 $V(t,x)$ 是正定的.

定理2 若系统(1)的平凡解是渐近变差稳定的,则对任意的 $0<a<c$,存在函数 $U:[0,+\infty)\times B_a\to R$ 满足下列条件:

(1) 对任意的 $x\in B_a$,函数 $U(\cdot,x)$ 左连续且在 $[0,+\infty)$ 上是局部有界变差函数;

(2) $U(t,0)=0$,且对任意的 $x,y\in B_a$,$t\in[0,+\infty)$,$|U(t,x)-U(t,y)|\leqslant\|x-y\|$;

(3) 对系统(1)任意的有界变差解 $x(t)$,当 $t=t_i$,$i=1,2,\cdots,k$ 时有

$$U(t_i^+,x(t_i^+))<U(t_i,x(t_i)),$$

当 $t\neq t_i$ 时,系统(1)的每一个满足初值 $\psi(t)=x\in B_a$ 的解 $\psi(t)=x\in B_a$ 的解 $\psi(\sigma)$,$\sigma\geqslant t$,有不等式

$$\lim_{\eta\to 0^+}\sup\frac{U(s+\eta,\psi(s+\eta))-U(s,x)}{\eta}\leqslant -U(s,x);$$

(4) 函数 $U(t,x)$ 是正定的.

证明　对任意的 $x\in B_a,s\geqslant 0$,令 $U(s,x)=V_1(s,x)$,其中 $V_1(s,x)$ 由式(6) 定义.

如定理 1 同样的证明方法,可证明条件(1) ~(3) 成立.

下证条件(4) 成立. 由文献 [2] 定理 4.5 知系统(1) 的解 $x\equiv 0$ 是变差吸引的 $\Leftrightarrow$ 在扰动下的系统(4) 的解 $x\equiv 0$ 是变差吸引的. 由文献 [2] 中定义 4.2 知,称系统(4) 的解 $x\equiv 0$ 是变差吸引的是指: 存在 $\delta_0>0$,对任意的 $\varepsilon>0$,有 $\tau=\tau(\varepsilon)\geqslant 0,\gamma=\gamma(\varepsilon)>0$,若 $\|y(t_0)\|<\delta_0,y\in R^n$. $\|y(t_i^+)-y(t_i^-)\|<\delta_0,p$ 是 $[t_0,T]$ 上的有界变差函数,在 $(t_0,T]$ 左连续,且 $\mathrm{Var}_{t_0}^{T}p(t)<\gamma$,则对任意的 $t\in[t_0,T]\cap[t_0+\tau(\varepsilon),+\infty),t_0\geqslant 0$,有 $\|y(t)\|<\varepsilon$,其中 $y(t,t_0,y_0)$ 是系统(4) 满足 $y(t_0,t_0,y_0)$ 的解.

假设 $U(t,x)$ 不是正定的,则存在 $\varepsilon,0<\varepsilon<a$ 和序列 $(t_m,x_m),m=1,2,\cdots,\varepsilon\leqslant\|x_m\|<a$, $t_m\to\infty(m\to\infty)$, $m\to\infty$ 时 $U(t_m,x_m)\to 0$.

设 $m_0\in N$,对 $m>m_0$,有 $t_m>\tau(\varepsilon)+1,U(t_m,x_m)<\gamma(\varepsilon)e^{-(\tau(\varepsilon)+1)}$,则存在 $\varphi\in A_a(t_m,x_m)$,使

$$e_1\mathrm{Var}_{t_0}^{t_m}\left(\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t\right)<\gamma(\varepsilon)e^{-(\tau(\varepsilon)+1)},\tag{10}$$

设 $t_0=t_m-(\tau(\varepsilon)+1)$,则 $t_0>0,t_m=t_0+(\tau(\varepsilon)+1)>t_0+\tau(\varepsilon)$. 由式(10) 及引理 1,有

$$e^{-(\tau(\varepsilon)+1)}\mathrm{Var}_{t_0}^{t_m}\left(\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t\right)<e_1\mathrm{Var}_{t_0}^{t_m}\left(\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t\right)<\gamma(\varepsilon)e^{-(\tau(\varepsilon)+1)}.$$

因此

$$\mathrm{Var}_{t_0}^{t_m}\left(\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t\right)<\gamma(\varepsilon),\tag{11}$$

对 $\sigma\in[t_0,t_m]$,定义

$$p(\sigma)=\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t,$$

则函数 p 左连续. 由式(11) 知,$\mathrm{Var}_{t_0}^{t_m}p<\gamma(\varepsilon)$ 且

$$\varphi(\sigma)=\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t+\varphi(\sigma)-\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t=\int_0^{\sigma}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t+p(\sigma),$$

所以

$$\varphi(s)-\varphi(t_0)=\int_{t_0}^{s}f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t+p(s)-p(t_0)=\int_{t_0}^{s}[f(t,\varphi(t))+g(t,\varphi(t))]\,\mathrm{d}t.$$

由于 $\varphi\in A_a(t_m,x_m)$,有 $\varphi(t_i^+)-\varphi(t_i)=I_i(\varphi(t_i))$,因此,$\varphi$ 为系统(4) 的满足 $\|\varphi(t_0)\|\leqslant 2a=\delta_0$, $\|\varphi(t_i^+)-\varphi(t_i^-)\|\leqslant 2a=\delta_0,i=0,1,\cdots,k$ 的解,由扰动下变差吸引的定义知,对任意的 $t>t_0+\tau(\varepsilon)$,有 $\|\varphi(t)\|<\varepsilon$,则 $t=t_m>t_0+\tau(\varepsilon)$,有 $\|\varphi(t_m)\|=\|x_m\|<\varepsilon$. 这与假设 $\varepsilon\leqslant\|x_m\|<a$ 矛盾,所以函数 U 正定.

参考文献:

[1] 李宝麟,吴卫红. 一类固定时刻脉冲微分系统的有界变差解 [J]. 西北师范大学学报,2009,45(4):1-5.

[2] 吴卫红. 一类固定时刻脉冲微分系统的变差稳定性 [D]. 兰州: 西北师范大学,2009.

[3] Schwabik S. Generalized Ordinary Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific,1992.

[4] 尚德泉. 一类不连续系统的变差稳定性 [D]. 兰州: 西北师范大学,2006.

[5] 李宝麟,马学敏. 一类脉冲微分系统与 Kurzweil 广义微分方程的关系 [J]. 甘肃科学学报,2007,19(1):1-6.

[6] Wu Cunxing,Li Baolin,Stanley Lee E. Discontinuous System and Henstock-Kurzeeil Integrals [J]. J Math Anal Appl,1999,229(1):119-139.

[7] 吴从炘,李宝麟. 不连续系统的有界变差解 [J]. 数学研究,1998,31(4):417-427.

[8] 姜旭东,李宝麟. 一类固定时刻脉冲微分系统 Φ-有界变差解的唯一性 [J]. 甘肃科学学报,2010,22(2):123-128.

作者简介:

姜旭东 (1984-),男,山西省忻州人,西北师范大学 2008 级在读硕士研究生,主要研究方向为常微分方程拓扑动力系统.