doi：10.3969/j.issn.0490－6756.2019.06.005

一类非线性二阶边值问题正解的存在性与多解性

马满堂，贾凯军
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文考虑非线性二阶边值问题

$$\begin{cases} q(t)u'(t))'+f(u'(t))=0, t\in(0,1), \\ q(0)u'(0)=0, cu(1)+dq(1)u'(1)=0 \end{cases}$$

正解的存在性及多解性，其中 $f:(-\infty,0]\to[0,\infty)$，$q:[0,1]\to(0,\infty)$ 为连续函数，$c>0$，$d\geqslant 0$ 为常数.当非线性项 f 满足超线性增长或次线性增长的条件时，本文证明该问题至少存在一个正解.当非线性项 f 满足 $f_0:=\lim\limits_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s}=f_\infty:=\lim\limits_{s\to-\infty}\frac{f(s)}{s}=0$ 或 $f_0:=\lim\limits_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s}=f_\infty:=\lim\limits_{s\to-\infty}\frac{f(s)}{s}=\infty$ 的条件时，本文证明该问题至少存在两个正解. 主要结果的证明基于锥上的不动点定理.

关键词：正解；存在性；多解性；锥；不动点指数
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490－675(2019)06－1014－05

Existence and multiplicity of positive solutions for a class of second-order boundary value problems

MA Man-Tang，*JIA Kai-Jun*
(College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China)

Abstract：In this paper，existence and multiplicity of positive solutions of the nonlinear second-order boundary value problems

$$\begin{cases} (q(t)u'(t))'+f(u'(t))=0, t\in(0,1), \\ q(0)u'(0)=0, cu(1)+dq(1)u'(1)=0 \end{cases}$$

are considered，where $f:(-\infty,0]\to[0,\infty)$，$q:[0,1]\to(0,\infty)$ are continuous functions，$c>0$，$d\geqslant 0$ are constants. When the nonlinear term f satisfies superlinear growth condition or sublinear growth condition，we show that there exists at least one positive solution to the problem. When the nonlinear term f satisfies $f_0:=\lim\limits_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s}=f_\infty:=\lim\limits_{s\to-\infty}\frac{f(s)}{s}=0$ or $f_0:=\lim\limits_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s}=f_\infty:=\lim\limits_{s\to-\infty}\frac{f(s)}{s}=\infty$，we show that there are at least two positive solutions to the problem. The proof is based on the fixed point theorem on cones.

Keywords：Positive solution；Existence；Multiplicity；Cone；Fixed point index
(2010 MSC 26A33)

收稿日期：2018-10-24
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：马满堂(1995－)，男，甘肃张家川人，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：mantangma@163.com
通讯作者：贾凯军.E-mail：jiakaijun_nwnu@163.com

1 引　言

近年来，对二阶常微分方程边值问题的研究十分活跃，其正解的存在性引起了许多学者的关注，并已取得了一些深刻的结果[1-9]．例如，1994 年，Erbe 等[1]研究了非线性二阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \gamma u(1)+\delta u'(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$，$a\in C([0,1],[0,\infty))$ 且在 $(0,1)$ 的任一子区间内不恒为零，$\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$ 为常数且 $\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta>0$．通过构造锥

$$K_1=\{u\in C[0,1]: u(t)\geqslant 0, \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} u(t)\geqslant M_1\ \|u\|_1\},$$

其中

$$\|u\|_1=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|,$$

$$M_1=\min\left\{\frac{\gamma+4\delta}{4(\gamma+\delta)},\frac{\alpha+4\beta}{4(\alpha+\beta)}\right\},$$

并运用 Green 函数的性质及锥拉伸与压缩不动点定理，文献[1]建立了如下结果．

定理 A　若 f 满足下列条件之一：

(i) $f^0=0$ 且 $f^\infty=\infty$；

(ii) $f^0=\infty$ 且 $f^\infty=0$，

则问题（1）至少存在一个正解，这里 $f^0=\lim\limits_{s\to 0}\frac{f(s)}{s}$，$f^\infty=\lim\limits_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}$．

2009 年，Zou 等[2]研究了非线性二阶 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} u''+f(t,u,u')=0, t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性，其中 $f\in C([0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R},[0,\infty))$．该文首先构造了锥

$$K_2=\{u\in C[0,1]: u(t)\geqslant 0, u \text{ 在}[0,1]\text{上是凸的}, u(0)=u(1)=0\},$$

然后运用锥上的不动点理论获得了问题(2)正解的存在性结论．

2016 年，Sreedhar 等[3]研究了非线性二阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} -u''+k^2u=f(t,u), t\in(0,1), \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \gamma u(1)+\delta u'(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

正解的存在性，其中 k,β,δ 是正常数，α,γ 是非负常数，$f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$．他们通过构造锥

$$K_3=\{u\in C[0,1]: u(t)\geqslant 0, \min_{0\leqslant t\leqslant 1} u(t)\geqslant M_2\ \|u\|_2, t\in[0,1]\},$$

其中 $\|u\|_2=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$，

$$M_2=\min\left\{\frac{\beta k}{\alpha\sinh k+\beta k\cosh k},\frac{\delta k}{\gamma\sinh k+\delta k\cosh k}\right\},$$

然后运用 Avery-Henderson 不动点理论获得了问题(3)多个正解的存在性结论．

值得注意的是，文献[1-3]都是通过在 Banach 空间 $C[0,1]$ 中构造合适的锥，运用锥上的不动点定理获得相应问题正解的存在性或多解性结论．一个有趣的问题是：当非线性项 f 含有一阶导数项时，能否在空间 $C^1[0,1]$ 中构造一个恰当的锥，进而运用锥上的不动点理论获得相应问题正解的存在性结论呢？基于以上工作，本文将考察非线性二阶边值问题

$$\begin{cases} (q(t)u'(t))'+f(u'(t))=0, t\in(0,1), \\ q(0)u'(0)=0, cu(1)+dq(1)u'(1)=0 \end{cases} \tag{4}$$

正解的存在性及多解性，其中 $f:(-\infty,0]\to[0,\infty)$，$q:[0,1]\to(0,\infty)$ 均为连续函数，$c>0$，$d\geqslant 0$ 均为常数．为了方便，记

$$f_0:=\lim_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s},\ f_\infty:=\lim_{s\to-\infty}\frac{f(s)}{s}.$$

设 $X=C^1[0,1]$，按范数 $\|u\|_\infty=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u'(t)|$ 构成 Banach 空间．定义锥

$$K=\{u\in C^1[0,1]: u'\leqslant 0, u \text{ 在}[0,1]\text{上凸}, q(0)u'(0)=0, cu(1)+dq(1)u'(1)=0\}.$$

容易验证锥 K 中的元素 u 满足

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}}|u'(t)|\geqslant\sigma\ \|u\|_\infty \tag{5}$$

其中 $\sigma=\frac{u'(1/4)}{u'(1)}$．本文假定：

(H1) $f:(-\infty,0]\to[0,\infty)$，$q:[0,1]\to(0,\infty)$ 均为连续函数，$c>0$，$d\geqslant 0$ 均为常数；

(H2) 存在 $m<0$，使得当 $m\leqslant s\leqslant 0$ 时，$f(s)\leqslant\eta m$，其中 $\eta=-\frac{1}{\|1/q\|_\infty t}$，$0\leqslant t\leqslant 1$；

(H3) 存在 $m<0$，使得 $f(s)\geqslant -2m\ \|q\|_\infty$．

本文的主要结果如下．

定理 1.1　假设(H1)成立．若 f 满足下列条件之一：

(i) $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$(超线性)；

(ii) $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=0$(次线性)，

则问题(4)至少存在一个正解．

定理 1.2　假定(H1)，(H2)成立，且 $f_0=f_\infty=$

∞.则问题(4)至少存在两个正解 u_1, u_2,且满足 $0< |u_1| < -m < |u_2|$.

定理1.3 假定(H1),(H3)成立,且 $f_0 = f_\infty = 0$.则问题(4)至少存在两个正解 u_1, u_2,且满足 $0< |u_1| < -m < |u_2|$.

注1 若问题(4)结合 Sturm-Liouville 或 Dirichlet 边界条件,那么 u' 既有正又有负,则所得问题对应的等价积分算子不具有保锥性,因而不能用锥上的不动点理论来研究该问题正解的存在性及多解性.但是,若结合 Robin 边界条件则不会出现这种问题.因此本文所考虑的问题是对文献[1-3]的一个重要补充.

2 预备知识

引理2.1 u 是问题(4)的解当且仅当 u 是算子方程

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(u'(s))\mathrm{d}s := Au(t),\quad t\in[0,1] \tag{6}$$

的解,其中 $G(t,s)$ 为线性边值问题

$$\begin{cases} (q(t)u'(t))' = 0, t\in(0,1), \\ q(0)u'(0) = 0, cu(1) + dq(1)u'(1) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数,

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{d}{c} + \displaystyle\int_t^1 \frac{1}{q(\tau)}\mathrm{d}\tau, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \dfrac{d}{c} + \displaystyle\int_s^1 \frac{1}{q(\tau)}\mathrm{d}\tau, 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

引理2.2 $A(K)\subset K$,且 A 是全连续算子.

证明 对任意的 $u\in K$,易见

$$(Au)'(t) = -\int_0^t \frac{1}{q(t)} f(u'(s))\mathrm{d}s \leqslant 0,\quad t\in[0,1],$$

且

$$(Au)''(t) = -\left(\int_0^t \frac{1}{q'(t)} f(u'(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{q(t)} f(u'(t))\right) \leqslant 0,\ t\in[0,1].$$

由 $(Au)''\leqslant 0$ 可知 Au 在 $[0,1]$ 上是上凸的.简单计算容易验证 $q(0)Au'(0) = 0$, $cAu(1) + dq(1)Au'(1) = 0$.故 $A(K)\subset K$.由 f 的连续性及 Arzela-Ascoli 定理可知 $A: K\to K$ 是全连续算子.

引理2.3[10] 设 X 是 Banach 空间,$K\subset X$ 是 X 中的一个锥,Ω_1, Ω_2 是 X 的开子集,$0\in\Omega_1$,$\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$.若全连续算子 $A: K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 满足

(i) $\|Au\|\leqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Au\|\geqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2$,

或

(ii) $\|Au\|\geqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Au\|\leqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2$,

则 A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上有一个不动点.

引理2.4[11] 设 X 为 Banach 空间,$K\subset X$ 是 X 中的一个锥.定义 $K_P = \{x\in K: \|x\|\leqslant p\}$,$p>0$.假设 $A: K_p\to K$ 是紧映射,且使得 $Ax\neq x$, $x\in\partial K_p = \{x\in K: \|x\| = p\}$.则

(i) 若 $\|x\|\leqslant\|Ax\|, x\in\partial K_p$,则 $i(A, K_p, K) = 0$;

(ii) 若 $\|x\|\geqslant\|Ax\|, x\in\partial K_p$,则 $i(A, K_p, K) = 1$.

3 主要结果的证明

定理1.1的证明 (i) 超线性情形.此时 $f_0 = 0$ 且 $f_\infty = \infty$.因为 $f_0 = 0$,故取 $H_1 < 0$,使得对任意的 $H_1\leqslant u'\leqslant 0$ 有 $f(u')\leqslant\eta u'$,其中 $\eta<0$ 满足

$$-\eta\,\|1/q\|_\infty t\leqslant 1,\ t\in[0,1].$$

若 $u\in K$, $\|u'\|_\infty = -H_1$,则

$$|u'(t)| = \left|\frac{1}{-q(t)}\int_0^t f(u'(s))\mathrm{d}s\right| \leqslant \|1/q\|_\infty |\eta| \int_0^t |u'(s)|\mathrm{d}s \leqslant \|1/q\|_\infty \|u\|_\infty |\eta| t \leqslant \|u\|_\infty.$$

记

$$\Omega_1 := \{u\in X: \|u\|_\infty \leqslant -H_1\}.$$

则 $\|Au\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty, u\in K\cap\partial\Omega_1$.又因为 $f_\infty = \infty$,故存在 $\hat{H}_2 < 0$,使得对任意的 $u'\leqslant\hat{H}_2$ 有

$$f(u')\geqslant -\frac{4\,\|q\|_\infty}{\sigma}u'.$$

记

$$H_2 := \min\{2H_1, 2\hat{H}_2\},$$
$$\Omega_2 := \{u\in X: \|u\|_\infty < -H_2\}.$$

则

$$|u'(1/2)| = \left|\frac{1}{-q(1/2)}\int_0^{1/2} f(u'(s))\mathrm{d}s\right| \geqslant \left|\frac{1}{\|q\|_\infty}\int_0^{1/2} f(u'(s))\mathrm{d}s\right| \geqslant \frac{4}{\|q\|_\infty}\left|-\frac{1}{\sigma}\int_{1/4}^{1/2} u'(s)\mathrm{d}s\right| \geqslant \|u\|_\infty.$$

故 $\|Au\|_\infty\geqslant\|u\|_\infty, u\in K\cap\partial\Omega_2$.由引理2.3可得算子 A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上有一个不动点,并有 $-H_1\leqslant\|u\|_\infty\leqslant -H_2$.进而由 $G(t,s)>0$ 得 $u(t)>0$, t

$\in(0,1)$.即问题(4)存在一个正解.

(ii) 次线性情形. 此时 $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=0$.因为 $f_0=\infty$,故取 $H_1<0$,使得对任意 $H_1\leqslant u'\leqslant 0$,有 $f(u')\geqslant\hat{\eta}u'$,其中 $\hat{\eta}\leqslant-\frac{4\ \|q\|_\infty}{\sigma}$.则对任意 $u\in K$,$\|u\|_\infty=-H_1$ 有

$$|u'(1/2)|=\left|\frac{1}{-q(1/2)}\int_0^{1/2}f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{1}{4}\left|\hat{\eta}\ \frac{1}{\|q\|_\infty}u'\right|\geqslant\|u\|_\infty.$$

记 $\Omega_1:=\{u\in X:\|u\|_\infty<-H_1\}$.则 $\|Au\|_\infty\geqslant\|u\|_\infty,u\in K\cap\partial\Omega_1$.又因为 $f_\infty=0$,故存在 $\hat{H}_2<0$,使得对任意的 $u'<\hat{H}_2$ 有 $f(u')\leqslant\lambda u'$,其中 $\lambda<0$ 满足 $-t\lambda\ \|1/q\|_\infty\leqslant 1$.考虑以下两种情形:

(i) f 有界. 存在 M,对任意的 $u'\in(-\infty,0)$ 有 $f(u')\leqslant M$.取

$$H_2=\min\left\{2H_1,-tM\left\|\frac{1}{q}\right\|_\infty\right\},$$

使得对 $u\in K$,$\|u\|_\infty=-H_2$ 有

$$|u'(t)|\leqslant\|1/q\|_\infty\left|\int_0^t f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\|1/q\|_\infty\ |Mt|=\|u\|_\infty.$$

所以 $\|Au\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty$.

(ii) f 无界. 取

$$H_2<\min\{2H_1,\hat{H}_2\},$$

使得 $f(u')\leqslant\|q\|_\infty f(H_2)$,$H_2\leqslant u'<0$.则对 $u\in K$,$\|u\|_\infty=-H_2$ 有

$$|u'(t)|=\left|\frac{1}{-q(t)}\int_0^t f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\|1/q\|_\infty\left|\int_0^t f(H_2)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\|1/q\|_\infty\left|-\lambda H_2\int_0^t\mathrm{d}s\right|\leqslant|H_2|=\|u\|_\infty.$$

无论何种情况,只要令 $\Omega_2=\{u\in K:\|u\|_\infty<-H_2\}$ 就有 $\|Au\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty,u\in K\cap\partial\Omega_2$.则由引理 2.3 可得算子 A 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上有一个不动点,并有 $-H_1\leqslant\|u\|_\infty\leqslant-H_2$.进而由 $G(t,s)>0$ 得 $u(t)>0,t\in(0,1)$.即问题(4)存在一个正解.证毕.

定理 1.2 的证明　令

$$M<-\frac{4\ \|q\|_\infty}{\sigma}\tag{7}$$

由 $f_0=f_\infty=\infty$ 与(5)式,存在 $r<0,r>m$ 且 $r\leqslant u'\leqslant 0$ 满足 $f(u')\geqslant Mu'$.事实上,我们有

$$\|Au\|_\infty\geqslant|u'(1/2)|=$$
$$\left|\frac{1}{-q(1/2)}\int_0^{1/2}f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{1}{\|q\|_\infty}M\left|\int_{1/4}^{3/4}u'(s)\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{\sigma}{4\ \|q\|_\infty}\|u\|_\infty\ |M|\geqslant\|u\|_\infty.$$

因此,由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|r|},K)=0\tag{8}$$

对同样满足(7)式的 M,由 $f_0=f_\infty=\infty$ 知存在 $R_1<0$,使得 $f(u')\geqslant Mu$,$u'\leqslant R_1$.令 $R<\min\{m,2R_1\}$.对 $u'\in\partial K_R$,有

$$\|Au\|_\infty\geqslant|u'(1/2)|=$$
$$\left|\frac{1}{-q(1/2)}\int_0^{1/2}f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{1}{\|q\|_\infty}M\left|\int_{1/4}^{3/4}u'(s)\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{\sigma}{4\ \|q\|_\infty}\|u\|_\infty\ |M|\geqslant\|u\|_\infty.$$

因而由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|R|},K)=0\tag{9}$$

另一方面,由(H2)可得,对 $u'\in\partial K_m$,有

$$\|Au\|_\infty=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\frac{1}{-q(t)}\int_0^t f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$|\eta|\ \|1/q\|_\infty\int_0^t\|u\|_\infty ds=\|u\|_\infty.$$

因而由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|m|},K)=1\tag{10}$$

由式(8)~(10)得 $i(A,K_{|R|}\backslash K_{|m|},K)=1$,$i(A,K_{|m|}\backslash K_{|r|},K)=-1$.因此,$A$ 在 $K_{|R|}\backslash K_{|m|}$ 上有一个不动点 u_1,在 $K_{|m|}\backslash K_{|r|}$ 上有一个不动点 u_2,这都是边值问题(4)的解,且 $u_1(t)>0,u_2(t)>0,0<|u_1|<-m<|u_2|,t\in(0,1)$.证毕.

定理 1.3 的证明　由于 $f_0=f_\infty=0$,可令 $\varepsilon<0$ 使得 $f(u')\leqslant M+\varepsilon u',u'\leqslant 0,t\in[0,1]$.那么

$$(Au)'(t)\leqslant\|1/q\|_\infty\int_0^t(M+\varepsilon u')\mathrm{d}s.$$

令 ε 足够大,$R<m$ 足够小,则有 $\|Au\|_\infty<\|u\|_\infty,u\in\partial K_{|R|}$.故由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|R|},K)=1\tag{11}$$

同样,对 $m<r<0$,有

$$i(A,K_{|r|},K)=1\tag{12}$$

另一方面,由(H3)可得,对 $u'\in\partial K_m$,有

$$\|Au\|_\infty\geqslant|u'(1/2)|=$$
$$\left|\frac{1}{-q(1/2)}\int_0^{1/2}f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\left|\frac{1}{\|q\|_\infty}\int_0^{1/2}2m\ \|q\|_\infty\ \mathrm{d}s\right|=|m|=\|u\|_\infty.$$

因而,由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|m|},K)=0\tag{13}$$

由式(11)～(13)得 $i(A, K_{|R|} \backslash K_{|m|}, K)=-1$. $i(A, K_{|m|} \backslash K_{|r|}, K)=1$.因此,$A$ 在 $K_{|R|} \backslash K_{|m|}$ 上有一个不动点 u_1,在 $K_{|m|} \backslash K_{|r|}$ 上有一个不动点 u_2,这都是边值问题(4)的解,且 $u_1(t)>0, u_2(t)>0, 0<|u_1|<-m<|u_2|, t\in(0,1)$.证毕.

4 应 用

考虑非线性二阶边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+f(u'(t))=0, t\in(0,1), \\ u'(0)=0, u(1)+u'(1)=0 \end{cases} \tag{14}$$

正解的存在性,其中 $q(t)\equiv 0, c=d=1, f(u')=(u')^2(2+\sin u')$. 易见条件(H1)满足,且简单计算可得

$$f_0:=\lim_{u'\to 0-}\frac{(u')^2(2+\sin u')}{u'}=0,$$

$$f_\infty:=\lim_{u'\to -\infty}\frac{(u')^2(2+\sin u')}{u'}=\infty.$$

故由定理1.1可知问题(14)至少存在一个正解.

参考文献:

[1] Erbe L H, Wang H Y. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations [J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120: 743.

[2] Zou Y M, Cui Y J. Positive solutions of second-order boundary value problems with dependence on the first order derivative [J]. Acta Math Appl Sin, 2009, 32: 106.

[3] Prasad K R, Wesen L T, Sreedhar N. Existence of positive solutions for second order undamped Sturm-Liouville boundary value problems [J]. Asian-Eur J Math, 2016, 9: 1650089.

[4] Li Y X. On the existence and nonexistence of positive solutions for nonlinear Sturm-Liouville boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 2005, 304: 74.

[5] Ma R Y. Multiplicity of positive solutions for second-order three-point boundary value problems [J]. Comput Math Appl-Theor, 2000, 40: 193.

[6] Dunninger D R, Wang H Y. Multiplicity of positive radial solutions for an elliptic system on an annulus [J]. Nonlinear Anal, 2000, 42: 803.

[7] Ma R Y, Chen R P. Existence of one-signed solutions of nonlinear four-point boundary value problems [J]. Czechoslovak Math J, 2012, 62: 593.

[8] Liu J, Feng H Y, Feng X F. Multiplicity of positive solutions for a singular second-order three-point boundary value problem with a parameter [J]. J App Math, 2014, 8: 10.

[9] Wang F, Zhang F, Wang F L. The existence and multiplicity of positive solutions for second-order periodic boundary value problems [J]. J Funct Spaces Appl, 2012, 6: 1115.

[10] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.

[11] Guo D J, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones [M]. New York: Academic Press, 1988.

引用本文格式:
中 文: 马满堂, 贾凯军. 一类非线性二阶边值问题正解的存在性与多解性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 1014.
英 文: Ma M T, Jia K J. Existence and multiplicity of positive solutions for a class of second-order boundary value problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 1014.