DOI:10.16783/j.cnki.nwnuz.2013.04.001

强 n-Gorenstein C-投射模和内射模

刘仲奎，刘妍平
（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州　730070）

摘要：研究了强 n-Gorenstein C-投射模和强 n-Gorenstein C-内射模的性质，证明了对 Bass 类中的任意模 M 和非负整数 n，模 M 的 Gorenstein C-投射维数不超过 n 当且仅当 M 是某个强 n-Gorenstein C-投射模的直和因子.

关键词：Gorenstein C-投射维数；Gorenstein C-内射维数；强 n-Gorenstein C-投射模；强 n-Gorenstein C-内射模
中图分类号：O 153.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001-988X（2013）04-0001-05

Strongly n-Gorenstein C-projective and injective modules

LIU Zhong-kui，LIU Yan-ping
（College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，Gansu，China）

Abstract：Some properties of strongly n-Gorenstein C-projective and injective modules are investigated. For arbitrary module $M \in B_C(R)$ and nonnegative integral number n，the Gorenstein C-projective dimension of M is not larger than n if and only if M is direct summand of a strongly n-Gorenstein C-projective module.

Key words：Gorenstein C-projective dimensions；Gorenstein C-injective dimensions；strongly n-Gorenstein C-projective modules；strongly n-Gorenstein C-injective modules

0　引言

本文中的环均指有单位元的交换 R 环，模均指酉模. 当 R 是左右 Noether 环时，Auslander 与 Bridger[1] 对 R 上的任意有限生成模 M 引入了 G-维数 $G\text{-}\dim_R(M)$. Enochs 和 Jenda[2,3] 使用不同方法对任意环上的任意模引入了 Gorenstein 投射维数，推广了 Auslander 与 Bridger 的结论. 随后，Gorenstein 内射维数与 Gorenstein 平坦维数的概念也被 Enochs[3-5]、Christensen[6,7] 等相继引入，他们证明了这些维数与经典的同调维数具有许多类似的性质. 文献[8,9]研究了 Gorenstein 投射、内射和平坦模的一种特殊情形，即强 Gorenstein 投射、内射和平坦模.

在 Enochs 和 Jenda 给出的 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的定义中，投射模类和内射模类分别发挥着重要作用. 而利用半对偶模研究同调维数是近几年比较活跃的研究方向[6,10,11]. 利用半对偶模 C，将 Gorenstein 投射模定义中的投射模类替换为 C-投射模类，可以定义 Gorenstein C-投射模. 类似地，用 C-内射模类和 C-平坦模类分别替换内射模和 Gorenstein 平坦模定义中的内射模类和平坦模类，可以定义 Gorenstein C-内射模和 Gorenstein C-平坦模. 相应地可以定义模的 Gorenstein C-投射维数等. 为了研究 Gorenstein C-投射维数，本文引入强 n-Gorenstein C-投射模的概念，并证明了对 Bass 类中的任意模 M 和非负整数 n，M 的 Gorenstein C-投射维数不超过 n 当且仅当 M 是某个强 n-Gorenstein C-投射模的直和因子.

1　预备知识

本文所涉及的概念见文献[8,11,12]. 以下称

收稿日期：2012-06-27；**修改稿收到日期**：2012-12-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10961021)
作者简介：刘仲奎（1963—），男，甘肃通渭人，教授，博士研究生导师. 主要研究方向为同调代数与环理论.
E-mail：liuzk@nwnu.edu.cn；xbsdlyp@163.com

形如 $C\otimes_R P$（$\mathrm{Hom}_R(C,I)$）的模为 C-投射模（C-内射模），其中 P 是投射模（I 是内射模）. R-模 M 的 C-投射维数记作 $P_C\text{-pd}_R(M)$.

定义 1[13]　称 R-模 M 是 Gorenstein C-投射模，如果存在 R-模的正合序列

$$X=\cdots\longrightarrow C\otimes_R P_1\longrightarrow C\otimes_R P_0\longrightarrow C\otimes_R P^0\longrightarrow C\otimes_R P^1\longrightarrow\cdots,$$

使得以下三条成立：

（1）$M\cong\mathrm{Coker}(C\otimes_R P_1\longrightarrow C\otimes_R P_0)$；

（2）所有的 P_i 和 P^i 是投射模；

（3）对任意投射 R-模 Q，$\mathrm{Hom}_R(X,C\otimes_R Q)$ 是正合的.

定义 2[13]　称 R-模 M 是强 Gorenstein C-投射模，如果存在 C-投射模的正合序列

$$S=\cdots\xrightarrow{f}C\otimes_R P\xrightarrow{f}C\otimes_R P\xrightarrow{f}C\otimes_R P\xrightarrow{f}C\otimes_R P\xrightarrow{f}\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(f)$，且对任意投射 R-模 Q，$\mathrm{Hom}_R(S,C\otimes_R Q)$ 是正合的.

定义 3[13]　定义 R-模 M 的 Gorenstein C-投射维数 $G_C\text{-pd}_R(M)=\inf\{n\mid$ 存在 R-模的正合序列 $0\longrightarrow G_n\longrightarrow G_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow G_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$，其中 G_i 是 Gorenstein C-投射 R-模$\}$.

Gorenstein C-内射模、强 Gorenstein C-内射模和 R-模 M 的 Gorenstein C-内射维数的定义可以对偶地给出.

2　Gorenstein C-投射维数的刻画

为了研究 Gorenstein C-同调维数，本文引入强 n-Gorenstein C-投射模和内射模的概念.

定义 4　设 n 是任意正整数.

（1）称左 R-模 M 是强 n-Gorenstein C-投射模，如果存在左 R-模的短正合序列

$$0\longrightarrow M\longrightarrow P\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中 $P_C\text{-pd}_R(P)\leqslant n$，并且对任意 C-投射模 Q，都有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,Q)=0$.

（2）称左 R-模 M 是强 n-Gorenstein C-内射模，如果存在左 R-模的短正合序列

$$0\longrightarrow M\longrightarrow I\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中 $I_C\text{-id}_R(I)\leqslant n$，并且对任意 C-内射模 E，都有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(E,M)=0$.

显然，强 0-Gorenstein C-投射模是强 Gorenstein C-投射模.

引理 1[13]　任意左 R-模 M 是强 Gorenstein C-投射模，如果存在左 R-模的短正合序列

$$0\longrightarrow M\longrightarrow C\otimes_R P\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中 P 是投射模，并且对任意 P_C-投射维数有限的 R-模 Q 和任意的 $i\geqslant 1$，都有 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(E,Q)=0$.

定义 5[11]　相对于半对偶模 C 的 Bass 类 $B_C(R)$ 是由满足以下条件的所有 R-模 N 构成的：

（a）对任意的 $i\geqslant 1$，$\mathrm{Ext}_R^i(C,M)=0=\mathrm{Tor}_i^R(C,\mathrm{Hom}_R(C,N))$；

（b）自然赋值映射 $C\otimes_R\mathrm{Hom}_R(C,N)\longrightarrow N$ 是同构.

引理 2　设 n 是一个非负整数，$M\in B_C(R)$，$G_C\text{-pd}_R(M)=n$. 则 M 有一个满的 Gorenstein C-投射预覆盖 φ：$G\longrightarrow M$，且 $P_C\text{-pd}_R(\mathrm{Ker}\varphi)\leqslant n-1$（若 $n=0$，则 $\mathrm{Ker}\varphi=0$）.

证明　因为 $M\in B_C(R)$，由文献[11]知，存在 R-模的正合序列：

$$0\longrightarrow K_n\longrightarrow C\otimes_R H_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C\otimes_R H_0\longrightarrow M\longrightarrow 0,$$

其中 $H_0,\cdots,H_{n-1}$ 是投射模，K_n 是 Gorenstein C-投射模. 对模 K_n，存在 R-模的正合序列：

$$0\longrightarrow K_n\longrightarrow C\otimes_R Q_0\longrightarrow\cdots\longrightarrow C\otimes_R Q_{n-1}\longrightarrow G\longrightarrow 0,$$

其中 $Q_0,\cdots,Q_{n-1}$ 是投射模，G 是 Gorenstein C-投射模，且对任意投射 R-模 Q，$\mathrm{Hom}_R(-,C\otimes_R Q)$ 保持此序列的正合性. 从而有以下交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & C\otimes_R Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C\otimes_R Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r] & C\otimes_R H_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C\otimes_R H_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由映射锥定理[5]知有正合复形

$$0\longrightarrow C\otimes_R Q_0\longrightarrow C\otimes_R(H_{n-1}\oplus Q_1)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(C\otimes_R H_0)\oplus G\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

记 $G_0=(C\otimes_R H_0)\oplus G$，$P_i=H_i\oplus Q_{n-i}$，$1\leqslant i\leqslant n-1$，$P_n=Q_0$，其中 P_i 是投射的. G_0 是 Gorenstein C-投射模，因此 φ：$G_0\longrightarrow M$ 的核 $K=\mathrm{Ker}\varphi$ 满足 $P_C\text{-pd}_R(K)\leqslant n-1$. 又因为 $G_C\text{-pd}_R(M)=n$，所以 $P_C\text{-pd}_R(K)=n-1$. 因为 K 的 P_C-投射维数有限，所以对任意 Gorenstein C-投射模 Q'，有 $\mathrm{Ext}_R^1(Q',K)=0$. 因此同态

$$\mathrm{Hom}_R(Q',\varphi):\mathrm{Hom}_R(Q',G_0)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Q',M)$$

是满的. 故 $\varphi:G_0\longrightarrow M$ 是 M 的 Gorenstein C-投射预覆盖. 】

引理 3　设 n 是一个非负整数，$M\in B_C(R)$，M 是强 n-Gorenstein C-投射模，则

（1）若 $0\longrightarrow N\longrightarrow P_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow M\longrightarrow 0$ 是正合序列，其中每个 P_i 都是 C-投射的，则 N 是强 n-Gorenstein C-投射的，且 $G_C\text{-pd}_R(M)\leqslant n$.

（2）若 $0\longrightarrow M\longrightarrow P\longrightarrow M\longrightarrow 0$ 是短正合序列，其中 $P_C\text{-pd}_R(P)<\infty$，则 $G_C\text{-pd}_R(M)=P_C\text{-pd}_R(P)$，且当 $k=P_C\text{-pd}_R(P)$ 时，M 是强 k-Gorenstein C-投射模.

证明　（1）若 $n=0$，由引理 1 知结论成立. 否则，因为 M 是强 n-Gorenstein C-投射模，所以存在短正合序列

$$0\longrightarrow M\longrightarrow P\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中 $P_C\text{-pd}_R(P)\leqslant n$. 考虑 M 的长度为 n 的 C-投射分解

$$0\longrightarrow N\longrightarrow P_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

则有正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & P_n\oplus P_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1\oplus P_1 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0
\end{array}$$

因为 $P_C\text{-pd}_R(P)\leqslant n$，所以 Q 是 C-投射的. 对任意 C-投射模 K，$\mathrm{Ext}_R^1(N,K)=\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,K)=0$. 因此由引理 1 得 N 是强 Gorenstein C-投射模，所以 $G_C\text{-pd}_R(M)\leqslant n$.

（2）对短正合序列 $0\longrightarrow M\longrightarrow P\longrightarrow M\longrightarrow 0$，由（1）知 $G_c\text{-pd}_R(M)<\infty$. 所以 $k=P_c\text{-pd}_R(P)=G_c\text{-pd}_R(P)=\max\{G_c\text{-pd}_R(M),G_c\text{-pd}_R(M)\}=G_c\text{-pd}_R(M)$. 故对任意 C-投射模 K，$\mathrm{Ext}_R^{k+1}(M,K)=0$，则 M 是强 k-Gorenstein C-投射模. 】

注 1　将引理 3（2）的条件 $M\in B_C(R)$ 改为 M 的 Gorenstein C-投射维数有限时结论仍成立.

定理 1　设 $M\in B_C(R)$. 则对任意非负整数 n，$G_C\text{-pd}_R(M)\leqslant n$ 当且仅当 M 是某个强 n-Gorenstein C-投射模的直和因子.

证明　若 $n=0$，则结论成立.

假设 $G_C\text{-pd}_R(M)\leqslant n$，则由引理 2 知，存在正合序列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow G\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中 G 是 Gorenstein C-投射模，$P_C\text{-pd}_R(K)\leqslant n-1$. 根据 Gorenstein C-投射模的定义，存在短正合序列 $0\longrightarrow G\longrightarrow P\longrightarrow G^0\longrightarrow 0$，其中 P 是 C-投射模，G^0 是 Gorenstein C-投射模. 考虑 $G\longrightarrow P$ 与 $G\longrightarrow M$ 的推出图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & K & = & K & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & P & \longrightarrow & G^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & D & \longrightarrow & G^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

由正合序列 $0\longrightarrow K\longrightarrow P\longrightarrow D\longrightarrow 0$ 可知，$P_C\text{-pd}_R(D)\leqslant P_C\text{-pd}_R(K)+1\leqslant n$.

现在，考虑 M 的 Gorenstein C-投射分解

$$0\longrightarrow G_n\longrightarrow P_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

中每个 P_i 是 C-投射模，G_n 是 Gorenstein C-投射模. 由上序列可得短正合序列

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 & \longrightarrow & G_n & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & G_{n-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

故所有 $G_C\text{-pd}_R(G_i)\leqslant n-i\leqslant n$.

考虑 G_n 的 C-投射分解 $\cdots\longrightarrow P_{n+2}\longrightarrow P_{n+1}\longrightarrow P_n\longrightarrow 0$，对任意 $i\geqslant n$，由上正合序列，得到短正合序列 $0\longrightarrow G_{i+1}\longrightarrow P_{i+1}\longrightarrow G_i\longrightarrow 0$. 显然对所有 $i\geqslant n$，G_i 是 Gorenstein C-投射模.

另一方面，因为 G^0 是 Gorenstein C-投射模，则有 G^0 的右 C-投射分解 $0\longrightarrow G^0\longrightarrow P^1\longrightarrow P^2\longrightarrow\cdots$，使得对任意 $i\geqslant 1$，$G^i=\mathrm{Im}(P^i\longrightarrow P^{i+1})$ 是 Gorenstein C-投射模. 由上序列，对任意 $i\geqslant 0$，$0\longrightarrow G^i\longrightarrow P^{i+1}\longrightarrow G^{i+1}\longrightarrow 0$ 是正合的，所以

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 & \longrightarrow & G^1 & \longrightarrow & P^2 & \longrightarrow & G^2 & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & G^0 & \longrightarrow & P^1 & \longrightarrow & G^1 & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & D & \longrightarrow & G^0 & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

将上述正合序列作直和，有短正合序列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

其中 $N=\bigoplus_{i\geqslant 1}G_i\bigoplus M\bigoplus_{i\geqslant 0}G^i$，$Q=\bigoplus_{i\geqslant 1}P_i\bigoplus D\bigoplus_{i\geqslant 1}P^i$. 显然

$$P_C\text{-pd}_R(Q)\leqslant P_C\text{-pd}_R(D)\leqslant n,$$

$$G_C\text{-pd}_R(N)=\sup\{G_C\text{-pd}_R(G_i),\ G_C\text{-pd}_R(G^i),G_C\text{-pd}_R(M)\}\leqslant n.$$

所以 N 是强 n-Gorenstein C-投射模且 M 是 N 的直和因子. 】

注 2 特别地，取 $C=R$，则强 n-Gorenstein C-投射模类与强 n-Gorenstein 投射模类一致.

推论 1 设 M 是一个模. 则对任意非负整数 n，M 的 Gorenstein 投射维数不超过 n，当且仅当 M 是某个强 n-Gorenstein 投射模的直和因子.

3 强 n-Gorenstein C-投射模的性质

强 n-Gorenstein C-投射模的性质对于刻画模的 Gorenstein C-投射维数有很重要的作用，本节研究强 n-Gorenstein C-投射模的性质.

命题 1 (1) $(M_i)_{i\in I}$ 是一族强 n-Gorenstein C-投射模，则 $\bigoplus_{i\in I}M_i$ 也是强 n-Gorenstein C-投射模.

(2) $(M_i)_{i\in I}$ 是一族强 n-Gorenstein C-内射模，则 $\prod_{i\in I}M_i$ 也是强 n-Gorenstein C-内射模.

证明 (1) 因为每个 M_i 都是强 n-Gorenstein C-投射模，则对任意 $i\in I$，存在正合序列 $0\longrightarrow M_i\longrightarrow P_i\longrightarrow M_i\longrightarrow 0$，其中 $P_C\text{-pd}_R(P_i)\leqslant n$，并且对任意 C-投射模 Q，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,Q)=0$. 考虑正合序列

$$0\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}M_i\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}P_i\longrightarrow\bigoplus_{i\in I}M_i\longrightarrow 0$$

因为 $P_C\text{-pd}_R(\bigoplus_{i\in I}P_i)\leqslant\sup\{P_C\text{-pd}_R(P_i)\mid i\in I\}$，且对任意 C-投射模 Q，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(\bigoplus_{i\in I}M_i,Q)=\prod\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M_i,Q)=0$. 因此，$\bigoplus_{i\in I}M_i$ 也是强 n-Gorenstein C-投射模.

(2) 证明类似(1). 】

定理 2 对任意的模 $M\in B_C(R)$ 和正整数 n，下列条件等价：

(1) M 是强 n-Gorenstein C-投射模；

(2) 存在正合序列 $0\longrightarrow M\longrightarrow Q\longrightarrow M\longrightarrow 0$，其中 $P_C\text{-pd}_R(Q)\leqslant n$，并且对所有的 $i>n$ 和 P_C-投射维数有限的模 P，$\mathrm{Ext}_R^i(M,P)=0$；

(3) 存在正合序列 $0\longrightarrow M\longrightarrow Q\longrightarrow M\longrightarrow 0$，其中 $P_C\text{-pd}_R(Q)<\infty$，且对所有的 $i>n$ 和 C-投射模 P，都有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,P)=0$.

证明 (1)⇒(2). 根据强 n-Gorenstein C-投射模的定义，只须证明对任意 $i>n$ 和任意的 P_C-投射维数有限的模 P，都有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,P)=0$. 根据引理 2 得 $G_C\text{-pd}_R(M)\leqslant n$，再由文献[13]可得(2).

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(3). 对任意的 $i>n$ 和任意的 C-投射模 P，都有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,P)=0$. 对任意的 $i>n$，由 $0\longrightarrow M\longrightarrow Q\longrightarrow M\longrightarrow 0$ 得到

$$\cdots\longrightarrow 0=\mathrm{Ext}_R^i(M,P)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^i(Q,P)\longrightarrow\mathrm{Ext}_R^i(M,P)=0\longrightarrow\cdots$$

因此 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,P)=0$. 另一方面，$G_C\text{-pd}_R(Q)=P_C\text{-pd}_R(Q)<\infty$. $G_C\text{-pd}_R(Q)=P_C\text{-pd}_R(Q)\leqslant n$，根据强 n-Gorenstein C-投射模的定义，M 是强 n-Gorenstein C-投射模. 】

命题 2 设 $M\in B_C(R)$，且 M 是强 n-Gorenstein C-投射模($n\geqslant 1$)，则有满同态 $\varphi: N\longrightarrow M$，其中 N 是强 Gorenstein C-投射模，$K=\mathrm{Ker}\varphi$ 满足 $P_C\text{-pd}_R(K)=G_C\text{-pd}_R(M)\leqslant n-1$.

证明 类似引理 2 的证明. 】

类似文献[9]中的方法，可以得到 Gorenstein C-投射模类是 C-投射可解类，而强 Gorenstein C-投射模类不是 C-投射可解类. 事实上，假设强 Gorenstein C-投射模类是 C-投射可解的. 设 M 是 Gorenstein C-投射模，但不是强 Gorenstein C-投射模(这样的模的例子可见文献[8])，则由文献[13]可知，存在一个 Gorenstein C-投射模 N，使得 $M\bigoplus N$ 为强 Gorenstein C-投射模. 令 $L=M\bigoplus N\bigoplus M\bigoplus N\bigoplus\cdots$，则 L 是强 Gorenstein C-投射模.

考虑正合列

$$0\longrightarrow M\longrightarrow M\oplus N\oplus L\longrightarrow N\oplus L\longrightarrow 0$$

由于 $M\bigoplus N\bigoplus L\cong L, N\bigoplus L\cong L$，所以 $0\longrightarrow M\longrightarrow L\longrightarrow L\longrightarrow 0$ 正合. 故 M 是强 Gorenstein C-投射模，与假设矛盾. 】

命题 3 设 $0\longrightarrow N\xrightarrow{\alpha}P\xrightarrow{\beta}N'\longrightarrow 0$ 是 R-模正合序列，其中 $P_C\text{-pd}_R(P)=n<\infty$. 若 N 是强 Gorenstein C-投射模，则 N' 是强 $(n+1)$-Gorenstein C-投射模.

证明 因为 N 是强 Gorenstein C-投射模，所以存在左 R-模的短正合序列

$$0\longrightarrow N\xrightarrow{\vartheta}Q\xrightarrow{\gamma}N\longrightarrow 0$$

其中 Q 是 C-投射模，且对任意 P_C-投射维数有限的 R-模 K，有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,K)=0$. 因为 $P_C\text{-pd}_R(P)<\infty$，则存在正合序列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(N,P)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\gamma,P)}\mathrm{Hom}_R(Q,P)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\vartheta,P)}\mathrm{Hom}_R(N,P)\longrightarrow 0$$

因此对 $\alpha: N \longrightarrow P$ 有同态 $\lambda: Q \longrightarrow P$，使得 $\alpha=\lambda\circ\vartheta$. 则下图可换

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Q \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r, "i"] & P\oplus P \arrow[r, "i"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中 $\varphi(q)=(\lambda(q),\alpha\circ\gamma(q))$ 定义了同态 $\varphi: Q \longrightarrow P\oplus P$，$i,j$ 分别表示通常意义下的自然单射和投射. 因此，根据蛇引理有正合序列

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow (P\oplus P)/\varphi(Q) \longrightarrow N' \longrightarrow 0$$

显然 $P_C\text{-pd}_R((P\oplus P)/\varphi(Q))\leqslant n+1$，$G_C\text{-pd}_R(N')\leqslant n+1$. 故$N'$是强$(n+1)$-Gorenstein C-投射模. 】

命题 4　设 $0\longrightarrow N\longrightarrow P\longrightarrow N'\longrightarrow 0$ 是R-模正合序列，其中 P 是C-投射R-模，$G_C\text{-pd}_R(N')=n<\infty$. 则

(1) 若 N'是强 Gorenstein C-投射模，则 N 也是.

(2) 若对任意 $n\geqslant 1$，N' 是强 n-Gorenstein C-投射模，则 N 是强$(n-1)$-Gorenstein C-投射模，且 $G_C\text{-pd}_R(N)=n-1$.

证明　(1) 显然.

(2) 因为 N'是强 n-Gorenstein C-投射模，则存在短正合序列 $0\longrightarrow N'\longrightarrow Q\longrightarrow N'\longrightarrow 0$，其中 $P_C\text{-pd}_R(Q)\leqslant n$. 因为 $G_C\text{-pd}_R(N')=n$，由引理 3，$P_C\text{-pd}_R(Q)=n$.

另一方面，有如下交换图：

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Q' \arrow[r] \arrow[d] & P\oplus P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

因为 P 是C-投射模，故 $P_C\text{-pd}_R(Q')=n-1$. 又因为 $G_C\text{-pd}_R(N')=n$，所以 $G_C\text{-pd}_R(N)=n-1$，则 N 是强$(n-1)$-Gorenstein C-投射模. 】

对偶地，可以得到强 n-Gorenstein C-内射模的相关结论.

称模 M 是强 n-Gorenstein C-平坦模，如果存在短正合序列

$$0\longrightarrow M\longrightarrow F\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中 $F_C\text{-fd}_R(F)\leqslant n$，并且对任意 C-内射模 I，都有 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(I,M)=0$.

命题 5　设 M 是 R-模，若 M 是强 n-Gorenstein C-平坦模，则 M 的示性模 M^+ 是强 n-Gorenstein C-内射模.

证明　$\mathrm{Ext}_R^n(N,M^+)\cong\mathrm{Tor}_n^R(N,M)^+$，结合文献[14]，易证. 】

参考文献：

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. *Stable Module Theory*[M]. Amer Math Soc, Vol 94, Providence Rbode Island, 1969.
[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. On Gorenstein injective modules[J]. *Comm Algebra*, 1993, **21**: 3489-3501.
[3] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. *Math Z*, 1995, **220**: 611-633.
[4] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein flat modules[J]. *Journal of Nanjing University-Math Biquarterly*, 1993, **1**: 1-9.
[5] ENOCHS E E, JENDA O M G. *Relative Homological Algebra* [M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2000.
[6] CHRISTENSEN L W. *Gorenstein Dimensions*[M]. Berlin: Springer Verlag, 2000.
[7] CHRISTENSEN L W, FRANKILD A, Holm H. On Gorenstein projective, injective and flat dimensions--a functorial description with applications [J]. *Journal Algebra*, 2006, **302**: 231-279.
[8] BENNIS D, MAHDOU N. Strongly Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. *Journal Pure and Applied Algebra*, 2007, **210**: 437-445.
[9] YANG Xiao-yan, LIU Zhong-kui. Strongly Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. *Journal Algebra*, 2008, **320**: 2659-2674.
[10] CHRISTENSEN L W. Semi-dualizing complexes and their Auslander categories[J]. *Trans Amer Math Soc*, 2001, **353**: 1839-1883.
[11] TAKAHASHI R, WHITE D. Homological aspects of semidualizing modules[J]. *Math Scand*, 2010, **106**(1): 5-22.
[12] HOLM H. Gorenstein homological dimensions [J]. *Journal Pure and Applied Algebra*, 2004, **189**: 167-193.
[13] 尚文亮. Gorenstein C-同调模及其维数[D]. 兰州：西北师范大学，2011.
[14] ROTMAN J J. *An Introduction to Homological Algebra*[M]. New York: Academic Press, 1979.

（责任编辑　马宇鸿）