第58卷 第1期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol. 58 No. 1
2020年1月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　Jan 2020

doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2019178

带时滞非经典扩散方程依赖于时间的拉回吸引子

王芳平，马巧珍
(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘要：先运用Faedo-Galerkin方法证明带时滞的非经典扩散方程弱解的适定性，再运用收缩函数的方法给出拉回D-渐近紧性，从而证明了依赖于时间的拉回吸引子的存在性.

关键词：非经典扩散方程；依赖于时间的拉回吸引子；拉回吸收集；拉回D-渐近紧
中图分类号：O175.29　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1671-5489(2020)01-0015-09

Time-Dependent Pullback Attractors for Nonclassical Diffusion Equations with Time Delays

WANG Fangping, MA Qiaozhen
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

Abstract: We first proved the well-posedness of weak solutions for the nonclassical diffusion equations with time delays by using the Faedo-Galerkin method, and then we gave the pullback D-asymptotic compactness by using the contraction function method, which proved the existence of time-dependent pullback attractor.

Keywords: nonclassical diffusion equation; time-dependent pullback attractor; pullback absorbing set; pullback D-asymptotic compactness

0 引　言

设$\Omega\subset\mathbb{R}^n(n\geqslant 3)$是具有适当光滑边界$\partial\Omega$的有界区域，本文考虑如下带时滞的非经典扩散方程解的渐近行为：

$$\begin{cases}\partial_t u-\varepsilon(t)\partial_t\Delta u-\Delta u=f(u)+g(t,u_t)+k(t), & (x,t)\in\Omega\times[\tau,\infty),\\ u(x,t)=0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t\geqslant\tau, \\ u(x,\tau+\theta)=\phi(x,\theta), \quad x\in\Omega, \quad \theta\in[-h,0],\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\tau\in\mathbb{R}$；g是一个算子；k是依赖于时间的外力项；$\phi\in C([-h,0];H_\tau)$是初始值，$h(>0)$是时滞效果的长度；并且对每个$t\geqslant\tau$，用u_t表示定义在$[-h,0]$上的函数$u_t(\theta)=u(t+\theta)$，$\theta\in[-h,0]$.

用C_X表示具有最大值范数的Banach空间$C([-h,0];X)$. 对$\forall u\in C_X$，范数定义为$\|u\|_{C_X}=\max\limits_{t\in[-h,0]}\|u(t)\|_X$. 对算子$g(\cdot,\cdot)$，假设$g$：$\mathbb{R}\times C_{L^2}\to L^2(\Omega)$，且满足下列条件：

(H$_1$) 对所有的$\xi\in C_{L^2}$，函数$\mathbb{R}\ni t\mapsto g(t,\cdot)\in L^2$是可测的；

收稿日期：2019-05-08.

第一作者简介：王芳平(1993—)，女，汉族，硕士研究生，从事无穷维动力系统的研究，E-mail: 1012963981@qq.com. **通信作者简介：**马巧珍(1972—)，女，回族，博士，教授，从事应用微分方程与无穷维动力系统的研究，E-mail: maqzh@nwnu.edu.cn.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：11561064；11361053).

(H_2) 对所有的 $t\in\mathbb{R}$，$g(t,0)=0$；

(H_3) 存在 $L_g>0$，使得对所有的 $t\in\mathbb{R}$ 和 $\xi,\eta\in C_{L^2}$，不等式 $\|g(t,\xi)-g(t,\eta)\|_2\leqslant L_g\|\xi-\eta\|_{C_{L^2}}$ 成立.

$\varepsilon(t)\in C^1(\mathbb{R})$是关于 t 的有界减函数，且满足下列条件：

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=0. \tag{2}$$

特别地，由条件(2)可知，存在 $L>0$，使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}[|\varepsilon(t)|+|\varepsilon'(t)|]\leqslant L. \tag{3}$$

时间依赖吸引子的概念由文献[1-2]提出，例如，当波方程

$$\varepsilon(t)u_{tt}+\alpha u_t-\Delta u+f(u)=g(x) \tag{4}$$

中的系数 ε 依赖于时间 t 时，即使外力项不依赖于 t，系统仍是非自治的，且其能量泛函也依赖于时间 t，即

$$E(t)=\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\varepsilon(t)\int_\Omega|u_t|^2\mathrm{d}x,$$

当 $t\to\infty$，$\varepsilon(t)\to0$ 时，系统的耗散性显然发生了改变，并且在古典理论下得不到其耗散性.

当 $\varepsilon(t)$ 为一个不依赖于时间 t 的常数时，关于非经典扩散方程的研究已有很多结果：文献[3]研究了当非线性项次临界增长，外力项 $k(x,t)$ 恒为 $k(x)$ 且 $k(\cdot)\in L^2(\Omega)$时，非经典扩散方程在 $H_0^1(\Omega)$中全局吸引子的存在性；当外力项 $k\in L_b^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$，非线性项满足临界条件时，文献[4]用算子分解及渐近正则性估计的方法，得到了具有衰退记忆的非自治非经典扩散方程一致吸引子的存在性；当外力项 g 分别属于 $L^2(\Omega)$和 $H^{-1}(\Omega)$时，文献[5]得到了具有衰退记忆的自治非经典扩散方程在弱拓扑空间和强拓扑空间全局吸引子的存在性和正则性；文献[6]得到了当外力项 $k\in L_b^2(\mathbb{R};H_0^1(\Omega))$，非线性项满足临界条件时，具有衰退记忆的自治非经典扩散方程的强吸引子；文献[7]研究了带时滞的非经典扩散方程解的存在唯一性及解的渐近性态；文献[8]得到了当非线性项 f 分别满足临界和多项式增长条件时，带时滞的非经典扩散方程拉回吸引子的存在性；当非线性项 f 满足多项式增长条件，外力项 $k\in H^{-1}(\mathbb{R})$时，文献[9]用渐近压缩半群法证明了全局吸引子在 $H^1(\mathbb{R})$中的存在性.

目前，关于偏微分方程时间依赖吸引子的存在性和正则性研究得到广泛关注，如文献[2,10]系统地研究了波方程时间依赖吸引子的存在性、渐近性及渐近结构；文献[11-12]关于 Plate 方程分别得到了时间依赖全局吸引子和强拉回吸引子的存在性；文献[13]获得了具有低正则性外力项的非经典扩散方程时间依赖全局吸引子的存在性及正则性结果；文献[14]研究了非经典扩散方程时间依赖全局吸引子的存在性及其正则性. 本文运用算子分解的方法并结合文献[8]的研究，给出在非线性项满足多项式增长条件时依赖于时间的拉回吸引子的存在性.

1 预备知识

用$(\cdot,\cdot)$和$\|\cdot\|$分别表示 $L^2(\Omega)$中的内积和范数，记 $H=L^2(\Omega)$. 对于 $0\leqslant\sigma\leqslant2$，定义由 A 生成的空间族 $H_\sigma=\mathrm{dom}(A^{\sigma/2})$，并赋予如下内积和范数：

$$(w,v)_\sigma=\langle A^{\sigma/2}w,A^{\sigma/2}v\rangle,\qquad \|w\|_\sigma=\|A^{\sigma/2}w\|.$$

特别地有紧嵌入 $H_{\sigma+1}\hookrightarrow\hookrightarrow H_\sigma$. 对 $t\in\mathbb{R}$ 及 $0\leqslant\sigma\leqslant2$，引入依赖于时间的空间 $\mathrm{H}_t^\sigma=H_{\sigma+1}$，对应依赖于时间的范数为

$$\|u\|_{\mathrm{H}_t^\sigma}^2=\|u\|_\sigma^2+\varepsilon(t)\|u\|_{\sigma+1}^2.$$

当 $\sigma=0$ 时，通常记 $\mathrm{H}_t^0=\mathrm{H}_t$，对应的范数为 $\|u\|_{\mathrm{H}_t}^2=\|u\|^2+\varepsilon(t)\|u\|_1^2$. 而对空间 C_X，当 $X=\mathrm{H}_t$ 时，空间 C_{H_t} 的依赖于时间的范数为

$$\|u\|_{C_{\mathrm{H}_t}}^2=\|u\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\varepsilon(t)\|u\|_{C_{H_1}}^2.$$

由紧嵌入 $H_{\sigma+1}\hookrightarrow\hookrightarrow H_\sigma$，显然当 $0\leqslant\sigma\leqslant2$ 时，有 $\mathrm{H}_t^\sigma\hookrightarrow\hookrightarrow\mathrm{H}_t$. Poincaré 不等式：

$$\lambda_1\|v\|^2\leqslant\|\nabla v\|^2,\qquad\forall v\in H_1,$$

其中 λ_1 是 $-\Delta$ 算子在 Dirichlet 边界条件下的的第一特征值.

设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是度量空间 X 上的过程(双参数半群)，即连续映射族 $\{U(t,\tau);-\infty<\tau\leqslant t<+\infty\}$，其中 $U(t,\tau):X\to X$，使得对 $\forall x\in X$，$U(t,\tau)x=x$，且对所有的 $\tau\leqslant r\leqslant t$，有 $U(t,\tau)=U(t,r)U(r,\tau)$. 设 D 是参数集合 $\hat{\mathrm{D}}=\{\mathrm{D}(t);t\in\mathbb{R}\}\subset\mathrm{P}(X)$ 的非空类，其中 $\mathrm{P}(X)$ 表示 X 的所有非空子集族.

定义 1(**拉回 D -渐近紧**)[8]　如果对 $\forall t\in\mathbb{R}$，$\hat{D}\in\mathrm{D}$，$\tau_n\to-\infty$，$x_n\in D(\tau_n)$，$\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中是准紧的，则称过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是拉回 D 渐近紧的.

定义 2(**拉回 D -吸收集**)[8]　如果对 $\forall t\in\mathbb{R}$，$\hat{D}\in\mathrm{D}$，存在 $\tau_0=\tau_0(t,D)<t$，使得对所有的 $\tau\leqslant\tau_0(t,D)$，均有 $U(t,\tau)D(\tau)\subset B(t)$，则称 $\hat{B}\in\mathrm{D}$ 是拉回 D 吸收的.

引理 1[8]　对过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$，如果其满足下列条件，则 $\hat{\mathrm{A}}=\{\mathrm{A}(t);t\in\mathbb{R}\}\subset\mathrm{P}(X)$ 在 X 中是拉回 D -吸引子：

1) 对所有的 $t\in\mathbb{R}$，$\mathrm{A}(t)$ 在 X 中是紧的；

2) 在 X 中 A 是拉回 D 吸引的，即对所有的 $\hat{D}\in\mathrm{D}$，$t\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{\tau\to-\infty}\mathrm{dist}_X(U(t,\tau)D(\tau),\mathrm{A}(t))=0$；

3) $\hat{\mathrm{A}}$ 对 $-\infty<\tau\leqslant t<+\infty$ 是不变的，即 $U(t,\tau)\mathrm{A}(\tau)=\mathrm{A}(t)$.

定义 3(**收缩函数**)[9]　设 X 为 Banach 空间，B 为 X 中的有界集，如果对于任意的序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B$，存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{l\to\infty}\psi(x_{n_k},x_{n_l})=0$，则定义于 $X\times X$ 上的函数 $\psi(\cdot,\cdot)$ 称为 $B\times B$ 上的收缩函数. 用 $\mathrm{Contr}(B)$ 表示定义于 $B\times B$ 上的收缩函数全体.

定理 1[9]　设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是 Banach 空间 X 上的过程，且有一个拉回 D -吸收集 $\hat{B}=\{B(t);t\in\mathbb{R}\}$. 此外，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $T=T(t,\hat{B},\varepsilon)=t-\tau$，$\psi_{t,T}(\cdot,\cdot)\in\mathrm{Contr}(B)$，使得对所有的 $x,y\in B(\tau)$，均有

$$\|U(t,t-T)x-U(t,t-T)y\|_X\leqslant\varepsilon+\psi_{t,T}(x,y),$$

其中 $\psi_{t,T}$ 依赖于 t 和 T. 则 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 X 中是拉回 D -渐近紧的.

定理 2[9]　设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是 Banach 空间 X 上的过程，且有一个拉回 D -吸收集 $\hat{B}=\{B(t);t\in\mathbb{R}\}$. 此外，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $T=T(t,\hat{B},\varepsilon)=t-\tau$，$\psi_{t,T}(\cdot,\cdot)\in\mathrm{Contr}(B)$，使得对所有的 $x,y\in B(\tau)$，均有

$$\|U(t,t-T)x-U(t,t-T)y\|_X\leqslant\varepsilon+\psi_{t,T}(x,y),$$

其中 $\psi_{t,T}$ 依赖于 t 和 T. 则 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 X 中是拉回 D -渐近紧的.

定理 3[9]　设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是 Banach 空间 X 上的一个过程. 若其满足下列条件：

1) $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 X 中有拉回 D -吸收集 $\hat{B}_0$；

2) $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 $\hat{B}_0$ 中是拉回 D -渐近紧的.

则 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 X 中拥有拉回 D -吸引子.

2　解的适定性

假设外力项 $k(\cdot)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$，非线性项 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，且对一些正常数 c_0,c_1,c_2 和所有的 $u,v\in\mathbb{R}$，满足

$$(f(u)-f(v))(u-v)\leqslant l(u-v)^2,\tag{5}$$

$$-c_0-c_1|u|^p\leqslant f(u)u\leqslant c_0-c_2|u|^p,\qquad\forall p\geqslant 2.\tag{6}$$

令 $F(u)=\int_0^u f(r)\mathrm{d}r$，则由式(6)知，存在常数 $\tilde{c}_i>0(i=0,1,2)$，使得对 $\forall u\in\mathbb{R}$，有

$$-\tilde{c}_0-\tilde{c}_1|u|^p\leqslant F(u)\leqslant\tilde{c}_0-\tilde{c}_2|u|^p.\tag{7}$$

定义 4　对所有的 $T>\tau$，方程(1)的弱解是函数 $u\in C([\tau-h,T;\mathrm{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_1)\cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$，其中对所有的 $t\in[\tau-h,\tau]$，$u(t)=\phi_0(t-\tau)$，且对所有 $\varphi\in\mathrm{H}_t$，在 $[\tau,+\infty)$ 上满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(u(t),\varphi)+\varepsilon(t)(\nabla u,\nabla\varphi)]+(1-\varepsilon'(t))(\nabla u,\nabla\varphi)=(f(u(t)),\varphi)+(g(t,u_t),\varphi)+(k(t),\varphi).$$

注 1　如果 $u(t)$ 是方程(1)的弱解，则对所有 $\tau\leqslant s\leqslant t$，其满足能量方程

$$\|u(t)\|_{C_{H_t}}^2+2\int_s^t(1-\varepsilon'(r))\|\nabla u(r)\|^2\mathrm{d}r=$$
$$\|u(s)\|_{C_{H_\tau}}^2+2\int_s^t[(f(u(r)),u(r))+(g(r,u_r),u(r))+(k(r),u(r))]\mathrm{d}r.$$

定理4 假设 f 满足式(5),(6), $g(\cdot,\cdot)$满足假设$(H_1)\sim(H_3)$, $k(\cdot)\in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$,给定 $\phi\in C_{H_\tau}$,则对 $\forall\tau\in\mathbb{R}$, $T>\tau$,方程(1)至少存在一个弱解 $u(\cdot)=u(\cdot;\tau,\phi)$,且满足 $u(t)\in C([\tau-h,\tau];\mathrm{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_1)\cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$.

证明:设$\{\omega_j\}_{j\geqslant1}\subset H_1\cap L^p(\Omega)$是$L^2(\Omega)$的 Hilbert 基,使得$\{\omega_j\}_{j\geqslant1}$在 $H_1\cap L^p(\Omega)$中是稠密的.

首先断言:设 $k(\cdot)\in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$, $n\in\mathbb{N}$固定, $\phi\in C([-h,0];\mathrm{span}\{\omega_j\}_{j=1}^n)$(特别地 $\phi(0)\in \mathrm{H}_\tau\cap L^p(\Omega)$),则方程(1)在 $L^\infty(\tau,t;\mathrm{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_1)\cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$中至少存在一个弱解 $\tilde{u}$.

为了证明存在性,对$\forall m\geqslant n$,几乎处处 $t>\tau$, $1\leqslant j\leqslant m$,设 $\tilde{u}^m(t,x)=\sum_{j=1}^m\nu_{mj}(t)\omega_j(x)$,且满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\tilde{u}^m(t),\omega_j)+\varepsilon(t)((\tilde{u}^m(t),\omega_j))]+(1-\varepsilon'(t)((\tilde{u}^m(t),\omega_j))=\\ \qquad (f(\tilde{u}^m(t)+g(t,\tilde{u}_t{}^m)+k(t),\omega_j),\\ \tilde{u}^m(\tau)=\phi.\end{cases}\tag{8}$$

下面分三步证明.

1) 先验估计. 由式(6)、假设$(H_1)\sim(H_3)$及 Hölder 和 Young 不等式,将方程(8)两边乘以 $\nu_{mj}(t)$后再从1到 m 求和,使得对所有的 $t\geqslant\tau$,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\tilde{u}^m(t)\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla\tilde{u}^m(t)\|^2]+(1-\varepsilon'(t))\|\nabla\tilde{u}^m(t)\|^2=$$
$$(f(\tilde{u}^m(t)),\tilde{u}^m(t))+(g(t,\tilde{u}_t{}^m),\tilde{u}^m(t))+(k(t),\tilde{u}^m(t))\leqslant$$
$$C_0|\Omega|-C_2\|\tilde{u}^m(t)\|_p^p+L_g\|\tilde{u}_t^m\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{1}{2\lambda_1}\|k(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\tilde{u}^m(t)\|^2.$$

进而对几乎处处的 $t\geqslant\tau$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\tilde{u}^m(t)\|_{H_t}^2+(1-2\varepsilon'(t))\|\nabla\tilde{u}^m(t)\|^2+2C_2\|\tilde{u}^m(t)\|_p^p\leqslant$$
$$2C_0|\Omega|+2L_g\|\tilde{u}_t^m\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{1}{\lambda_1}\|k(t)\|^2.$$

特别地,对所有的 $t\geqslant\tau$,用 $t+\theta$ 代替 t,其中 $\theta\in[-h,0]$,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\tilde{u}_t^m\|_{C_{H_t}}^2+(1-2\varepsilon'(t))\|\nabla\tilde{u}^m(t)\|^2+2C_2\|\tilde{u}^m(t)\|_p^p\leqslant$$
$$2C_0|\Omega|+2L_g\|\tilde{u}_t^m\|_{C_{H_t}}^2+\frac{1}{\lambda_1}\|k(t)\|^2.\tag{9}$$

对所有的 $t\geqslant\tau$,在$[\tau,t]$上对式(9)积分得

$$\|\tilde{u}_t^m\|_{C_{H_t}}^2\leqslant\|\phi\|_{C_{H_\tau}}^2+2C_0|\Omega|(t-\tau)+2L_g\int_\tau^t\|\tilde{u}_s^m\|_{C_{H_t}}^2\mathrm{d}s+\frac{1}{\lambda_1}\int_\tau^t\|k(s)\|^2\mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 引理知,对所有的 $t\geqslant\tau$, $m\geqslant n$,有

$$\|\tilde{u}_t^m\|_{C_{H_t}}^2\leqslant\|\phi\|_{C_{H_\tau}}^2\mathrm{e}^{2L_g(t-\tau)}+2C_0|\Omega|(t-\tau)\mathrm{e}^{2L_g(t-\tau)}+\frac{1}{\lambda_1}\mathrm{e}^{2L_g(t-\tau)}\int_\tau^t\|k(s)\|^2\mathrm{d}s.\tag{10}$$

由式(9),(10)知,对所有的 $t\geqslant\tau$, $\{\tilde{u}^m\}_{m\geqslant n}$在 $C([\tau,T];\mathrm{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_1)\cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$上有界. 于是,可知对所有的 $t\geqslant\tau$, $\{f(\tilde{u}^m)\}_{m\geqslant n}$在 $L^q(\tau,T;L^q(\Omega))$上有界,其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$. 从而存在函数 $\tilde{u}(t)\in L^\infty(\tau,T;\mathrm{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_1)\cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$和 $\tilde{\mathrm{X}}\in L^q(\tau,T;L^q(\Omega))$,使得对所有的 $t\geqslant\tau$,在 $L^\infty(\tau,T;\mathrm{H}_t)$中, $\tilde{u}^m\xrightarrow{w^*}\tilde{u}(t)$;在 $L^2(\tau,T;H_1)$中, $\tilde{u}^m\xrightarrow{w}\tilde{u}(t)$;在 $L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$中, $\tilde{u}^m\xrightarrow{w}\tilde{u}(t)$;在 $L^q(\tau,T;L^q(\Omega))$中, $f(\tilde{u}^m)\xrightarrow{w}\tilde{\mathrm{X}}$.

2）对时间导数的一致估计．用 $\nu'_{mj}(t)$ 乘式(8)的每项，并对 j 从 1 到 m 求和，对几乎处处 $t\geqslant\tau$，有

$$\|(\tilde{u}^m)'(t)\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon(t)\|(\nabla\tilde{u}^m)'(t)\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\tilde{u}^m(t)\|^2=$$
$$(f(\tilde{u}^m(t)),(\tilde{u}^m)'(t))+(g(t,\tilde{u}^m_t),(\tilde{u}^m)'(t))+(k(t),(\tilde{u}^m)'(t)).$$

此外，由假设$(H_1)\sim(H_3)$及 Hölder 和 Young 不等式，使得对 $t\geqslant\tau$，有

$$\|(\tilde{u}^m)'(t)\|^2+\varepsilon(t)\|(\nabla\tilde{u}^m)'(t)\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\tilde{u}^m(t)\|^2\leqslant$$
$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega F(\tilde{u}^m(t))\mathrm{d}x+\|k(t)\|^2+L_g^2\|\tilde{u}^m_t\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}.\tag{11}$$

在$[\tau,t]$上对式(11)积分，并由式(7)可知，对所有的 $t\geqslant\tau$，$\forall\, m\geqslant n$，有

$$\|\nabla\tilde{u}^m(t)\|^2+\int_\tau^t\|(\tilde{u}^m)'(s)\|^2\mathrm{d}s+\int_\tau^t\varepsilon(s)\|(\nabla\tilde{u}^m)'(s)\|^2\mathrm{d}s+2\tilde{c}_2\|\tilde{u}^m(t)\|_p^p\leqslant$$
$$\|\nabla\tilde{u}^m(\tau)\|^2+4\tilde{c}_0|\Omega|+2\tilde{c}_1\|\tilde{u}^m(\tau)\|_p^p+$$
$$\int_\tau^t\|k(s)\|^2\mathrm{d}s+L_g^2\int_\tau^t\|\tilde{u}^m_s\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{d}s.\tag{12}$$

因为对所有的 $m\geqslant n$，$\tilde{u}^m_\tau=\phi$，特别地，$\tilde{u}^m(\tau)=\phi_0\in \mathrm{H}_\tau\cap L^P$，所以由式(10)，(16)知，对所有的 $t\geqslant\tau$，$\{\tilde{u}^m(t)\}_{m\geqslant n}$在 $L^\infty(\tau,T;\mathrm{H}_t\cap L^p(\Omega))$上有界，$\{(\tilde{u}^m)'(t)\}_{m\geqslant n}$在 $L^2(\tau,T;\mathrm{H}_t)$上有界．从而提高了所得 $\tilde{u}$ 的正则性．实际上，对所有的 $T>\tau$，$\tilde{u}\in L^\infty(\tau,T;\mathrm{H}_t\cap L^p(\Omega))$，且 $\tilde{u}'\in L^2(\tau,T;\mathrm{H}_t)$．取定 T(任意值)$>\tau$，对所有的 $t_1,t_2\in[\tau,T]$，利用 $\{\tilde{u}^m(t)\}_{m\geqslant n}$ 在 $L^\infty(\tau,T;\mathrm{H}_t\cap L^p(\Omega))$上有界，$\{(\tilde{u}^m)'(t)\}_{m\geqslant n}$在 $L^2(\tau,T;\mathrm{H}_t)$上有界，得

$$\|\tilde{u}^m(t_2)-\tilde{u}^m(t_1)\|^2_{\mathrm{H}_t}=\|\tilde{u}^m(t_2)-\tilde{u}^m(t_1)\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla\tilde{u}^m(t_2)-\nabla\tilde{u}^m(t_1)\|^2\leqslant$$
$$C\|(\tilde{u}^m)'\|^2_{L^2(\tau,T;\mathrm{H}_t)}|t_2-t_1|.\tag{13}$$

于是，由 Ascoli-Arzelà 定理知，存在子序列，使得对所有 $T>\tau$，在 $\Omega\times(\tau,\infty)$上，几乎处处有 $\tilde{u}^m\to\tilde{u}$．因为 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，所以在 $\Omega\times(\tau,\infty)$上几乎处处 $f(\tilde{u}^m)\to f(\tilde{u})$．综上并由文献[15]中定理 1.3 得 $\tilde{\mathrm{X}}=f(\tilde{u})$．由满足方程的 $\tilde{u}^m$ 的极限及 $\mathrm{span}\{\omega_j\}_{j\geqslant1}$在 $\mathrm{H}_t\cap L^p(\Omega)$中是稠密的知，$\tilde{u}$ 是方程(1)的弱解．

3）由稠密性证明一般情形．对每个 $n\in\mathbb{N}$，定义 $\phi^n=\sum_{j=1}^n\phi(\theta,\omega_j)\omega_j$，$\theta\in[-h,0]$(由于$\{\omega_j\}_{j\geqslant1}$是 $L^2(\Omega)$的 Hilbert 基，可知在 C_{H_t} 中 $\phi^n\to\phi$)．初值 $u^n_\tau=\phi^n$，且 $k^n\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$的方程(1)的解用 u^n 表示．

首先，对每个满足能量方程的 u^n，$\forall\, t\geqslant\tau$，有

$$\|u^n(t)\|^2_{\mathrm{H}_t}+2\int_\tau^t(1-\varepsilon'(s))\|\nabla u^n(s)\|^2\mathrm{d}s=\|u^m(\tau)\|^2_{\mathrm{H}_\tau}+$$
$$2\int_\tau^t(f(u^n(s))+g(s,u^n_s)+k^n(t),u^n(s))\mathrm{d}s.$$

与 1)类似，对所有的 $T\geqslant\tau$，u^n 在$C([\tau-h,T];\mathrm{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_1)\cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$上有界．因而，对所有的 $t\geqslant\tau$，$\{f(u^n)\}$在 $L^q(\tau,T;L^q(\Omega))$上有界．于是存在函数 $u\in L^\infty(\tau-h,T;\mathrm{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_1)\cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$和函数 $\mathrm{X}\in L^q(\tau,T;L^q(\Omega))$，使得对所有的 $t\geqslant\tau$，在 $L^\infty(\tau-h,T;\mathrm{H}_t)$中，$u^n\xrightarrow{w^*}u$；在 $L^2(\tau,T;H_1)$中，$u^n\xrightarrow{w}u$；在 $L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$中，$u^n\xrightarrow{w}u$；在 $L^q(\tau,T;L^q(\Omega))$中，$f(u^n)\xrightarrow{w}\mathrm{X}$．

此外，可改进上述收敛．考虑 u^n 和 u^m 的差，并由 u^n-u^m 满足的能量方程，可得对$\forall\, t\geqslant\tau$，有

$$\|u^n(t)-u^m(t)\|^2_{\mathrm{H}_t}+2\int_\tau^t(1-\varepsilon'(s))\|\nabla u^n(s)-\nabla u^m(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\|u^n(\tau)-u^m(\tau)\|^2_{\mathrm{H}_\tau}+2(l+L_g+1)\int_\tau^t\|u^n_s-u^m_s\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{d}s+$$
$$\int_\tau^t\|k^n(s)-k^m(s)\|^2\mathrm{d}s.\tag{14}$$

用 $t+\theta$ 代替 t，其中 $\theta\in[-h,0]$，并由式(3)知，对所有 $t\geqslant\tau$，有

$$\| u_t^n-u_t^m \|_{C_{\mathrm{H}_t}}^2 \leqslant \| \phi^n-\phi^m \|_{C_{\mathrm{H}_\tau}}^2 +2(l+L_g+1)\int_\tau^t \| u_s^n-u_s^m \|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 \mathrm{d}s+ \int_\tau^t \| k^n(s)-k^m(s) \|^2 \mathrm{d}s. \tag{15}$$

对式(15)运用 Gronwall 引理得

$$\| u_t^n-u_t^m \|_{C_{\mathrm{H}_t}}^2 \leqslant \| \phi^n-\phi^m \|_{C_{\mathrm{H}_\tau}}^2 \mathrm{e}^{2(l+L_g+1)(t-\tau)} + \mathrm{e}^{2(l+L_g+1)(t-\tau)}\int_\tau^t \| k^n(s)-k^m(s) \|^2 \mathrm{d}s.$$

将其代入式(14)知，对所有的 $T\geqslant\tau$，$\{u^n\}$ 在 $C([\tau-h,T];\mathrm{H}_t)\cap L^2(\tau,T;H_1)$ 上是 Cauchy 列，于是得到一个序列，使得在 $\Omega\times(\tau,\infty)$ 上 $u^n\rightarrow u$. 综上并由文献[15]中定理1.3得 $\mathrm{X}=f(u)$，由满足方程的 u^n 的极限知 u 是方程(1)的弱解. 证毕.

定理5 在定理4的假设下，方程(1)的弱解是唯一的. 此外，对 $\forall\, t\geqslant\tau$，关于不同初值的两个解，下列 Lipschitz 连续成立：

$$\| \omega_t \|_{C_{\mathrm{H}_t}}^2 \leqslant \| \omega_\tau \|_{C_{\mathrm{H}_\tau}}^2 \mathrm{e}^{2C(t-\tau)}, \tag{16}$$

其中：$\omega(t):=u^1(t)-u^2(t)$；常数 $C=C(l,L_g)$.

证明：函数 $\omega(t)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t\omega-\varepsilon(t)\partial_t\Delta\omega-\Delta\omega=f(u^1)-f(u^2)+g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2), & (x,t)\in\Omega\times[\tau,\infty), \\ \omega(x,t)=0, \quad x\in\Omega, \quad t\geqslant\tau, \\ \omega(x,\tau+\theta)=\phi^1(x,\theta)-\phi^2(x,\theta), \quad x\in\Omega, \quad \theta\in[-h,0]. \end{cases} \tag{17}$$

用 ω 与式(17)做内积，并运用式(5)和假设(H_3)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \omega \|_{\mathrm{H}_t}^2 +(2-\varepsilon'(t))\| \nabla\omega \|^2 \leqslant 2l\| \omega \|^2 +2L_g\| \omega_t \|_{C_{L^2(\Omega)}}^2,$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \omega \|_{\mathrm{H}_t}^2 \leqslant C(\| \omega \|^2+\| \omega_t \|_{C_{L^2(\Omega)}}^2)$，其中 $C=C(l,L_g)$. 在$[\tau,t]$上积分并由式(3)得

$$\| \omega(t) \|_{\mathrm{H}_t}^2 \leqslant \| \omega(\tau) \|_{\mathrm{H}_\tau}^2 +C\int_\tau^t \| \omega(s) \|^2+\| \omega_s \|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 \mathrm{d}s.$$

特别地，用 $t+\theta$ 代替 t，其中 $\theta\in[-h,0]$，得

$$\| \omega_t \|_{C_{\mathrm{H}_t}}^2 \leqslant \| \omega_\tau \|_{C_{\mathrm{H}_\tau}}^2 +2C\int_\tau^t \| \omega_s \|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 \mathrm{d}s \leqslant \| \omega_\tau \|_{C_{\mathrm{H}_\tau}}^2 +2C\int_\tau^t \| \omega_s \|_{C_{\mathrm{H}_t}}^2 \mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 引理得式(16). 证毕.

对 $\forall\, t\geqslant\tau$，在空间 C_{H_t} 中定义解过程如下：

$$U(t,\tau): C_{\mathrm{H}_\tau}\rightarrow C_{\mathrm{H}_t}, \qquad U(t,\tau)\phi(\tau)=u(t), \tag{18}$$

其中 $\phi(\tau)\in C_{\mathrm{H}_\tau}$.

类似定理5的证明，有：

引理2 假设条件(2),(3)及(5)～(7)成立，则问题(1)生成的过程族 $U(t,\tau)$：$C_{\mathrm{H}_\tau}\rightarrow C_{\mathrm{H}_t}$，$t\geqslant\tau\in\mathbb{R}$，满足下列性质：对 $\forall\, t\geqslant\tau$，初值 $\phi^i(\tau)\in C_{\mathrm{H}_\tau}$，

$$\| U(t,\tau)\phi^1(\tau)-U(t,\tau)\phi^2(\tau) \|_{\mathrm{H}_t} \leqslant \mathrm{e}^{2C(t-\tau)}\| \phi^1(\tau)-\phi^2(\tau) \|_{\mathrm{H}_\tau},$$

其中 $C=C(l,L_g)$.

3 拉回吸引子

引理3 如果 f 满足式(5),(6)，$g(\cdot,\cdot)$ 满足假设(H_1)～(H_3)，$\varepsilon(t)$满足式(2),(3)，$k(\cdot)\in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$，$\tau\in\mathbb{R}$，并给定 $\phi\in C_{\mathrm{H}_\tau}$，则方程(1)的弱解满足：

$$\| u_t \|_{C_{\mathrm{H}_t}}^2 \leqslant\left(1+\frac{2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}}{\alpha_1}\right)\frac{2C_0|\Omega|}{\beta_1}\mathrm{e}^{\beta_1 h}+\left(1+\frac{2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}}{\beta_1-\alpha_1}\right)\| \phi \|_{C_{\mathrm{H}_\tau}}^2 \mathrm{e}^{\beta_1 h-\alpha_1(t-\tau)}+ \left(1+\frac{2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}}{\beta_1-\alpha_1}\right)\frac{1}{\lambda_1}\mathrm{e}^{\beta_1 h}\int_\tau^t \mathrm{e}^{-\alpha_1(t-s)}\| k(s) \|^2 \mathrm{d}s, \tag{19}$$

其中：$\alpha_1=\beta_1-2L_g e^{\beta_1 h}$；$\beta_1=\min\left\{\lambda_1,\dfrac{3}{4L}\right\}$.

证明：对方程(1)两边乘以 $u(t)$，并在 Ω 上积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H_t}^2+\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\right)\|\nabla u\|^2=(f(u),u)+(g(t,u_t),u)+(k(t),u).$$

由式(6)、假设(H_3)及 Hölder 不等式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H_t}^2+(2-\varepsilon'(t))\|\nabla u\|^2+2C_2\|u\|_p^p\leqslant$$
$$2C_0|\Omega|+2L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{1}{\lambda_1}\|k(t)\|^2+\frac{1}{4}\|\nabla u\|^2,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H_t}^2+\left(\frac{7}{4}-\varepsilon'(t)\right)\|\nabla u\|^2+2C_2\|u\|_p^p\leqslant 2C_0|\Omega|+2L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{1}{\lambda_1}\|k(t)\|^2.$$

由式(2),(3)得

$$\left(\frac{3}{4}-\varepsilon'(t)\right)\|\nabla u\|^2\geqslant\frac{3}{4}\|\nabla u\|^2\geqslant\frac{3\varepsilon(t)}{4L}\|\nabla u\|^2. \tag{20}$$

设 $\beta_1=\min\left\{\lambda_1,\dfrac{3}{4L}\right\}$，由式(20)得

$$\left(\frac{7}{4}-\varepsilon'(t)\right)\|\nabla u\|^2=\|\nabla u\|^2+\left(\frac{3}{4}-\varepsilon'(t)\right)\|\nabla u\|^2\geqslant\lambda_1\|u\|^2+\frac{3\varepsilon(t)}{4L}\|\nabla u\|^2\geqslant$$
$$\beta_1(\|u\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla u\|^2)=\beta_1\|u\|_{H_t}^2.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H_t}^2+\beta_1\|u\|_{H_t}^2\leqslant 2C_0|\Omega|+2L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{1}{\lambda_1}\|k(t)\|^2.$$

用 $t+\theta$ 代替 t，其中 $\theta\in[-h,0]$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|_{C_{H_t}}^2+\beta_1\|u_t\|_{C_{H_t}}^2\leqslant 2C_0|\Omega|+2L_g\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2+\frac{1}{\lambda_1}\|k(t)\|^2, \tag{21}$$

用 $e^{\beta_1 t}$乘式(21)，并在$[\tau,t]$上积分，对 $\forall\, t\geqslant\tau$，得

$$\|u_t\|_{C_{H_t}}^2 e^{\beta_1 t}\leqslant\|\phi\|_{C_{H_\tau}}^2 e^{\beta_1(h+\tau)}+2C_0|\Omega|e^{\beta_1 h}\int_\tau^t e^{\beta_1 s}\mathrm{d}s+$$
$$2L_g e^{\beta_1 h}\int_\tau^t e^{\beta_1 s}\|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{d}s+\frac{1}{\lambda_1}e^{\beta_1 h}\int_\tau^t e^{\beta_1 s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s, \tag{22}$$

则

$$\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 e^{\beta_1 t}\leqslant\|\phi\|_{C_{H_\tau}}^2 e^{\beta_1(h+\tau)}+2C_0|\Omega|e^{\beta_1 h}\int_\tau^t e^{\beta_1 s}\mathrm{d}s+$$
$$2L_g e^{\beta_1 h}\int_\tau^t e^{\beta_1 s}\|u_s\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2\mathrm{d}s+\frac{1}{\lambda_1}e^{\beta_1 h}\int_\tau^t e^{\beta_1 s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 引理，得

$$\|u_t\|_{C_{L^2(\Omega)}}^2 e^{\beta_1 t}\leqslant\|\phi\|_{C_{H_\tau}}^2 e^{\beta_1(h+\tau)}e^{2L_g e^{\beta_1 h}(t-\tau)}+\frac{2C_0|\Omega|}{\alpha_1}e^{\beta_1(h+t)}+$$
$$\frac{1}{\lambda_1}e^{\beta_1 h}e^{2L_g e^{\beta_1 h}t}\int_\tau^t e^{\alpha_1 s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s, \tag{23}$$

其中 $\beta_1-2L_g e^{\beta_1 h}=\alpha_1$. 将式(23)代入式(22)即完成证明.

为了得到拉回 D_{α_1} 吸收集，给出假设：

$$0<\beta_1-2L_g e^{\beta_1 h}=\alpha_1, \tag{24}$$

且对 $\forall\, t\in\mathbb{R}$，

$$\int_{-\infty}^t e^{\alpha_1 s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s<\infty. \tag{25}$$

定义5 对$\forall\alpha_1>0$，用D_{α_1}表示非空子集族类$\hat{D}=\{D(t);t\in\mathbb{R}\}\subset \mathrm{P}(C_{\mathrm{H}_t})$，使得

$$\lim_{\tau\to-\infty}(\mathrm{e}^{\alpha_1\tau}\sup_{u\in D(\tau)}\|u\|^2_{C_{\mathrm{H}_t}})=0.$$

定理6 在引理3的假设下，并设式(24),(25)成立，则族$\hat{D}_1=\{D_1(t);t\in\mathbb{R}\}$对过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是拉回$\mathrm{D}_{\alpha_1}$吸收的，其中$D_1(t)=\bar{B}_{C_{\mathrm{H}_t}}(0,\rho_1(t))$是$C_{\mathrm{H}_t}$中以0为圆心、$\rho_1(t)$为半径的闭球，且

$$\rho_1^2(t)\leqslant 1+\left(1+\frac{2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}}{\alpha_1}\right)\frac{2C_0|\Omega|}{\beta_1}\mathrm{e}^{\beta_1 h}+\left(1+\frac{2L_g\mathrm{e}^{\beta_1 h}}{\beta_1-\alpha_1}\right)\frac{1}{\lambda_1}\mathrm{e}^{\beta_1 h}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\alpha_1(t-s)}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{26}$$

此外$\hat{D}\in\mathrm{D}_{\alpha_1}$.

证明：由式(20)可知$\hat{D}$对由式(18)定义的过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是拉回$\mathrm{D}_{\alpha_1}$吸收的. 由式(26)，对$\forall t>0$，当$t\to-\infty$时，有$\mathrm{e}^{\alpha_1 t}\rho_1^2(t)\to 0$，则$\hat{D}\in\mathrm{D}_{\alpha_1}$.

同文献[8]，下面用收缩函数的方法证明由式(18)定义过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$的依赖于时间的拉回$\mathrm{D}_{\alpha_1}$吸引子的存在性.

引理4[8] 如果f满足式(5),(6)，$g(\cdot,\cdot)$满足假设(H_1)～(H_3)，$\varepsilon(t)$满足式(2),(3)，$k(\cdot)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$，$\tau\in\mathbb{R}$，并给定$\phi\in C_{\mathrm{H}_\tau}$，$\{u^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$是满足初值$u^n(\tau)\in C_{\mathrm{H}_\tau}$的方程(1)的一个解序列，则存在$\{u^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$的一个子序列在$L^2(\tau,T;L^2(\Omega))$上强收敛.

定理7 在引理3的假设下，设$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是式(18)定义的过程，则$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在$C_{\mathrm{H}_t}$中是拉回$\mathrm{D}_{\alpha_1}$-渐近紧的.

证明：设$u^i(t)$是关于初值$\phi^i(x,t)\in D_1(i=1,2,\theta\in[-h,0])$的解，即$u^i(t)$是下列方程的解：

$$\partial_t u-\varepsilon(t)\partial_t\Delta u-\Delta u=f(u)+g(t,u_t)+k(t),\qquad (x,t)\in\Omega\times[\tau,\infty),$$

初值

$$u^i(x,\tau+\theta)=\phi^i(x,\theta),\quad x\in\Omega,\quad \theta\in[-h,0].$$

为方便，记$\omega(t)=u^1(t)-u^2(t)$，则$\omega(t)$满足方程

$$\partial_t\omega-\varepsilon(t)\partial_t\Delta\omega-\Delta\omega=f(u^1)-f(u^2)+g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2),\qquad (x,t)\in\Omega\times[\tau,\infty), \tag{27}$$

其中初值

$$\omega(x,\tau+\theta)=\phi^1(x,\theta)-\phi^2(x,\theta),\quad x\in\Omega,\quad \theta\in[-h,0].$$

用$\omega(t)$乘式(27)，并在Ω上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\omega\|^2_{\mathrm{H}_t}+\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon'(t)\|\nabla\omega\|^2\right)=(f(u^1)-f(u^2),\omega)+(g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2),\omega).$$

由式(20)及Poincaré不等式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\omega\|^2_{\mathrm{H}_t}+\beta_1\|\nabla\omega\|^2\leqslant 2l\|\omega\|^2+2L_g\|u_t^1-u_t^2\|_{C_{L^2(\Omega)}}\|\omega\|.$$

由Gronwall引理知，对$\forall t\geqslant\tau$，有

$$\|\omega(t)\|^2_{\mathrm{H}_t}\leqslant\|\omega(\tau)\|^2_{\mathrm{H}_\tau}\mathrm{e}^{-\beta_1(t-\tau)}+2l\int_\tau^t\|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s+2L_g\mathrm{e}^{-\beta_1 t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta_1 s}\|u_s^1-u_s^2\|_{C_{L^2(\Omega)}}\|\omega(s)\|\mathrm{d}s.$$

运用Hölder不等式，并注意到$\alpha_1<\beta_1$，用$t+\theta$代替t，其中$\theta\in[-h,0]$，对$\forall t-h>\tau$，得

$$\|\omega_t\|^2_{C_{\mathrm{H}_t}}\leqslant\|\omega_\tau\|^2_{C_{\mathrm{H}_\tau}}\mathrm{e}^{-\beta_1(t-h-\tau)}+2l\int_\tau^t\|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s+$$
$$4L_g\mathrm{e}^{-\beta_1(t-h)}\left(\int_\tau^t\mathrm{e}^{2\beta_1 s}\|u_s^1-u_s^2\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_\tau^t\|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}.$$

令$T=t-\tau$，且

$$\psi_{t,T}(u^1,u^2)=2l\int_\tau^t\|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s+4L_g\mathrm{e}^{-\beta_1(t-h)}\times$$
$$\left(\int_\tau^t\mathrm{e}^{2\beta_1 s}\|u_s^1\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}+\|u_s^2\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_\tau^t\|\omega(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}.$$

结合定义3、引理4和式(19)知$\psi_{t,T}$是收缩函数，于是对$\forall\varepsilon>0$及取定的$t\in\mathbb{R}$，设$\tau=t-h-\dfrac{1}{\alpha_1}\ln\dfrac{\|\omega_\tau\|^2_{C_{\mathrm{H}_\tau}}}{\varepsilon}$，由定理1易得$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在$C_{\mathrm{H}_t}$中是拉回$\mathrm{D}_{\alpha_1}$-渐近紧的. 证毕.

由定理 7 可得：

定理 8　在定理 6 的假设下，设$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是式(18)定义的过程，则$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在$C_{H_t}$中拥有唯一的拉回 D_{α_1} 吸引子 A_1，即关于 C_{H_t} 的范数拉回吸引 C_{H_t} 中的每个有界子集 A_1 在 C_{H_t} 中是非空的、紧的、不变的.

参 考 文 献

[1] DI PLINIO F, DUANE G S, TEMAM R. Time-Dependent Attractor for the Oscillon Equation [J]. Discrete Contin Dynl Syst, 2012, 29(1): 141-167.

[2] CONTI M, PATA V, TEMAM R. Attractors for Processes on Time-Dependent Spaces, Applications to Wave Equations [J]. J Differential Equations, 2013, 255(6): 1254-1277.

[3] XIAO Y L. Attractors for a Nonclassical Diffusion Equation [J]. Acta Math Appl Sin (Engl Ser), 2002, 18(2): 273-276.

[4] WANG X, ZHONG C K. Attractors for the Non-autonomous Nonclassical Diffusion Equations with Fading Memory [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71(11): 5733-5746.

[5] WANG X, YANG L, ZHONG C K. Attractors for the Nonclassical Diffusion Equations with Fading Memory [J]. J Math Anal Appl, 2010, 362(2): 327-337.

[6] 汪璇，居文超，钟承奎. 具有衰退记忆的非自治非经典扩散方程的强吸引子 [J]. 数学年刊(A 辑)，2013，34(6)：671-688.（WANG X, JU W C, ZHONG C K. Strong Attractors for the Non-autonomous Nonclassical Diffusion Equations with Fading Memory [J]. Chinese Annals of Mathematics (Ser A), 2013, 34(6): 671-688.）

[7] CARABALLO T, MÁRQUEZ-DURÁN A M. Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior of Solutions for a Nonclassical Diffusion Equation with Delay [J]. Dyn Partial Differ Equ, 2013, 10(3): 267-281.

[8] ZHU K X, SUN C Y. Pullback Attractors for Nonclassical Diffusion Equations with Delays [J]. J Math Phys, 2015, 56(9): 092703-1-092703-20.

[9] XIE Y Q, LI Q S, ZHU K X. Attractors for Nonclassical Diffusion Equations with Arbitrary Polynomial Growth Nonlinearily [J]. Nonlinear Anal: Real World Appl, 2016, 31: 23-37.

[10] CONTI M, PATA V. Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces [J]. Nonlinear Anal: Real World Appl, 2014, 19: 1-10.

[11] 刘亭亭，马巧珍. Plate 方程时间依赖全局吸引子的存在性 [J]. 华东师范大学学报(自然科学版)，2016(2)：35-44.（LIU T T, MA Q Z. Existence of Time-Dependent Global Attractos for Plate Equations [J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2016(2): 35-44.）

[12] 刘亭亭，马巧珍. 非自治 Plate 方程时间依赖强拉回吸引子的存在性 [J]. 数学年刊(A 辑)，2017，38(2)：125-144.（LIU T T, MA Q Z. The Existence of Time-Dependent Strong Pullback Attractos for Non-autonomous Plate Equations [J]. Chinese Annals of Mathematics (Ser A), 2017, 38(2): 125-144.）

[13] MA Q Z, WANG X P, XU L. Existence and Regularity of Time-Dependent Global Attractos for the Nonclassical Reaction-Diffusion Equations with Lower Forcing Term [J/OL]. Bound Value Probl, 2016-01-13[2017-09-15]. doi: 10.1186/s13661-015-0513-3.

[14] LIU Y F. Time-Dependent Global Attractor for the Nonclassical Diffusion Equations [J]. Appl Anal, 2015, 94(7): 1439-1449.

[15] LIONS J L. Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires [M]. Paris: Dunod, 1969: 275-287.

（责任编辑：赵立芹）