第 19 卷 第 1 期 广州大学学报(自然科学版) Vol. 19 No. 1
2020 年 2 月 Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition) Feb. 2020

文章编号:1671-4229(2020)01-0061-05

星与星的联图点可区别 I-全染色和点可区别 VI-全染色

康慧君,陈祥恩*

(西北师范大学 数学与统计学院,甘肃兰州 730070)

摘 要:文章讨论 $S_m \vee S_n$ 的联图点可区别 I(VI)-全染色,确定了当 $3 \leqslant m \leqslant n \leqslant n+2$ 时,它们的点可区别 I-全色数及点可区别 VI-全色数,也说明了 VDITC 猜想和 VDVITC 猜想对这类图是成立的.

关键词:I-全染色;点可区别 I-全染色;点可区别 VI-全染色;点可区别 I-全色数;星与星的联图

中图分类号:O 157.5 文献标志码:A

1 准备工作

图的点可区别正常边染色的研究见文献[1-7],图的点可区别一般边染色的研究见文献[8-9],图的点可区别正常全染色的研究见文献[10-13],图的点可区别 I-全染色和点可区别 VI-全染色的研究见文献[14-19].本文讨论 S_m 与 S_n 的联图($3 \leqslant m \leqslant n \leqslant n+2$)的点可区别 I-和 VI-全染色.

图 G 的一个使用了 k 种颜色的一般全染色(k-一般全染色)是指一个映射 f: $V \vee E \rightarrow \{1,2\cdots,k\}$.

图 G 的 I-全染色,就是指对于这个图 G 的一个一般全染色 f,$\forall u,v \in V$,有 $f(u) \neq f(v)$,$\forall e_1,e_2 \in E$,一旦 e_1 与 e_2 相邻,就有 $f(e_1) \neq f(e_2)$.

图 G 的 VI-全染色,就是指对于图 G 的一个一般全染色 f,$\forall e_1,e_2 \in E$,一旦 e_1 与 e_2 相邻,就有 $f(e_1) \neq f(e_2)$.

对图 G 的任意一个 I-全染色或者 VI-全染色 f,$\forall x \in V$,记 $C(x) = \{f(xv) \mid xv \in E(G)\} \cup \{f(x)\}$.为在 f 下点 x 的色集合,显然有 $|C(u)| \leqslant d_G(u)+1$. $\bar{C}(x)$ 表示 $\{1,2,\cdots,k\} \backslash C(x)$.

设 f 为图 G 的 k-点可区别 I-全染色,若 $\forall u,v \in V(G)$,$u \neq v$,有 $C(u) \neq C(v)$,称 f 为图 G 的 k-点可区别 I-全染色,记为 k-VDITC,称为图 G 的点可区别 I-全色数,记为 $\chi_{vt}^{i}(G)$,即 $\chi_{vt}^{i}(G) = \min\{k \mid G$ 有 k-$VDVITC\}$.

同理,设 f 为 G 的 k-点可区别 VI-全染色,若 $\forall u,v \in V(G)$,$u \neq v$,$C(u) \neq C(v)$,称 f 为图 G 的 k-点可区别 VI-全染色,记为 k-VDVITC,称为图 G 的点可区别 VI-全色数,记为 $\chi_{vt}^{vi}(G)$,即 $\chi_{vt}^{vi}(G) = \min\{k \mid G$ 有 k-$VDVITC\}$.

设 $G(V_1,E_1)$ 与 $H(V_2,E_2)$,且 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$,$E_1 \cap E_2 = \varnothing$,称图 $G \vee H$ 为 G 与 H 的联,如果 $V(G \vee H) = V_1 \cup V_2$,$E(G \vee H) = E_1 \cup E_2 \cup \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}$.

对于一个简单图 G,用 n_i 表示度是 i 的顶点的个数,$\delta \leqslant i \leqslant \Delta$,假设

$$\xi(G) = \min\{l \mid \binom{l}{i} + \binom{l}{i+1} + \binom{l}{i+2} + \cdots + \binom{l}{i+s} + \binom{l}{i+s+1} \geqslant n_i + n_{i+1} + n_{i+2} + \cdots + n_{i+s}, \delta \leqslant i \leqslant i+s \leqslant \Delta, s \geqslant 0\}.$$

猜想 1[14] (VDITC 猜想) $\chi_{vt}^{i}(G) = \xi(G)$ 或 $\xi(G)+1$.

猜想 2[14] (VDVITC 猜想) $\chi_{vt}^{vi}(G) = \xi(G)$ 或 $\xi(G)+1$.

引理 1[14] 对于任意图 G,如果存在两个 Δ(最大度)顶点,则 $\chi_{vt}^{i}(G) \geqslant \Delta+1$.

引理 2[14] $\chi_{vt}^{i}(G) \geqslant \xi(G)$.

引理 3[14] 若图 G 只有一个最大度顶点,且 $\chi_{vt}^{i}(G) = \Delta$,则 $\chi_{vt}^{vi}(G) = \chi_{vt}^{i}(G) = \Delta(G)$.

引理 4[14] 如果存在正整数 r,$\delta \leqslant r \leqslant \Delta$,且 G 没有度为 r 的顶点,则

$$\xi(G) = \min\{l \mid \binom{l}{i} + \binom{l}{i+1} + \binom{l}{i+2} + \cdots + \binom{l}{i+s} + \binom{l}{i+s+1} \geqslant n_i + n_{i+1} + n_{i+2} + \cdots +$$

作者简介:康慧君(1995—),女,硕士研究生. E-mail:3151918121@qq.com

* 通信作者. E-mail:chenxe@nwnu.edu.cn

n_{i+s}, $\delta \leqslant i \leqslant i+s \leqslant r-1$, $s \geqslant 0$; 或

$r+1 \leqslant i \leqslant i+s \leqslant \Delta$, $s \geqslant 0\}$.

引理5[14] 如果对于图G的任意两个不同的顶点u和v, $d_G(u) \neq d_G(v)+1$, $d_G(v) \neq d_G(u)+1$, 则$\xi(G)=\min\{l \mid \binom{l}{i}+\binom{l}{i+1} \geqslant n_i, \delta \leqslant i \leqslant \Delta\}$.

命题1 $\xi(G) \leqslant \chi_{vt}^{vi}(G) \leqslant \chi_{vt}^{i}(G)$.

假设$p \in \mathbf{Z}$, 而q为正整数, 用$(p)_q$表示$\{1,2,\cdots,q\}$中的模q同余于p的那个数, 即$(p)_q \in \{1,2,\cdots,q\}$且$(p)_q \equiv p(\bmod q)$.

关于星与星的联图, 有如下定义:

$V(S_m \vee S_n)=\{u_1,\cdots,u_{m+1},v_1,\cdots,v_{n+1}\}$, $E(S_m \vee S_n)=\{u_1u_2,u_1u_3,\cdots,u_1u_m,u_1u_{m+1},v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,\cdots,v_1v_{n+1}\} \cup \{u_iv_j \mid i=1,2,\cdots,m+1; j=1,2,\cdots,n+1\}$.

$d(u_i)=n+2$, $i=2,3,\cdots,m+1$, 度为$n+2$的点有m个;

$d(u_1)=m+n+1$, $d(v_1)=m+n+1$, 度为$m+n+1$的点有2个;

$d(v_j)=m+2$, $j=2,3,\cdots,n+1$, 度为$m+2$的点有n个.

2 主要结果

定理1 设$S_m \vee S_n$是星S_m和星S_n的联, $3 \leqslant m \leqslant n \leqslant n+2$, 且$n=m$, $n=m+1$, 则$\chi_{vt}^{i}(S_m \vee S_n)=m+n+2$.

证明 因为$\Delta(S_m \vee S_n)=m+n+1$, $n_\Delta \geqslant 2$由引理1可知, $\chi_{vt}^{i}(S_m \vee S_n) \geqslant m+n+2$.

则需要给出$S_m \vee S_n$的一个$(m+n+2)$的点可区别I-全染色f.

分如下两种情况考虑:

情况1 $m=n$.

第一步: 给连接u_i与v_j的边进行染色, 令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{n+2}$, $f(u_iv_j) \in \{1,2,\cdots,n+2\}$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$.

第二步: 给两个星的边进行染色, 令

$f(u_iu_j)=\alpha_{j-1}$, $i=1$, $j=2,3,\cdots,m+1$, $f(v_iv_j)=\alpha_{j-1}$, $i=1$, $j=2,3,\cdots,n+1$, 其中, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是字母颜色.

第三步: 给点染色, 令

$f(u_i)=\alpha_1$, $i=2,3,\cdots,m+1$, $f(u_1)=\alpha_2$, $f(v_j)=\alpha_3$, $j=2,3,\cdots,n+1$, $f(v_1)=\alpha_4$.

对S_m和S_n的点进行染色时不要用$\{1,2,\cdots,n+2\}$中的颜色, 只用字母颜色染就够了, 且S_m中用两种字母颜色, u_i, $i=2,3,\cdots,m+1$只用一种颜色染, 对S_n用同样的办法进行染色.

上述染色是I-全染色, 并且在此染色下有:

$C(u_1)=\{1,2,\cdots,n,n+1\}$;

$C(u_2)=\{2,3,\cdots,n,n+1,n+2\}$;

$C(u_3)=\{3,\cdots,n,n+1,n+2,1\}$;

$C(u_4)=\{4,\cdots,n,n+1,n+2,1,2\}$;

$\vdots$

$C(u_{m+1})=\{m+1,m+2,\cdots,n,n+1,n+2,1,\cdots,m-1\}$.

$C(v_1)=\{1,2,\cdots,m,m+1\}$;

$C(v_2)=\{2,\cdots,m,m+1,m+2\}$;

$\vdots$

$C(v_{n+1})=\{n+1,n+2,1,\cdots,n-3\}$.

容易验证f是I-全染色, 接下来证明f是点可区别的.

事实1: $C(u_1)$, $C(u_2)$, $\cdots C(u_{m+1})$是互不相同的色集合.

事实2: $C(v_1)$, $C(v_2)$, $\cdots C(v_{n+1})$是互不相同的色集合.

证明 每个$C(u_i)$都包含除了$i-1$的所有数字颜色, $i=1,2,\cdots,m+1$, 因为起始点i是不同的, 因此, $C(u_1)$, $C(u_2)$, $\cdots C(u_{m+1})$是互不相同的.

因为$m=n$, 所以字母颜色$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$刚好可以给两边星的边染色, 关联边用数字颜色, S_m和S_n的顶点至少用四种颜色染色, 由此可见, $m+n+2$个点的色集合彼此不相同, 从而得知上述I-全染色是点可区别的.

当$m=n=3$时, $S_m \vee S_n$有2个7度(最大度)的点, 由引理1知, $\chi_{vt}^{i}(S_3 \vee S_3) \geqslant 8$, 只需给出$(S_3 \vee S_3)$的一个8点可区别I-全染色$f$, 令

$f(u_iv_j)=i+j-1$, $i=1,2,3,4$, $j=1,2,3,4$;

$f(u_1v_j)=j$, $j=1,2,3,4$; $f(u_2v_j)=j+1$, $j=1,2,3,4$;

$f(u_3v_j)=j+2$, $j=1,2,3,4$; $f(u_4v_j)=j+3$, $j=1,2,3,4$;

$f(u_1)=1$, $f(u_i)=2$, $i=2,3,4$; $f(v_1)=3$, $f(v_j)=4$, $j=2,3,4$;

$f(u_1u_2)=6$; $f(u_1u_3)=7$; $f(u_1u_4)=8$; $f(v_1v_2)=6$; $f(v_1v_3)=7$; $f(v_1v_4)=8$.

上述染色是I-全染色, 并且在此染色下有

$\overline{C(u_1)}=\{5\}$,$\overline{C(u_2)}=\{1,7,8\}$,$\overline{C(u_3)}=\{1,2,8\}$,$\overline{C(u_4)}=\{1,2,3\}$,由此可见色集合彼此不相同,从而得知上述 I-全染色是点可区别的.

情况 2 $n=m+1$.

第一步: 给连接 u_i 与 v_j 的边进行染色,令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{n+2}$,$f(u_iv_j)\in\{1,2,\cdots,n+2\}$,$1\leqslant i\leqslant m+1$,$1\leqslant j\leqslant n+1$.

第二步: 给两个星的边进行染色,令

$f(u_1u_i)=\alpha_{i-1}$,$i\in\{2,3,\cdots,m+1\}$; $f(v_1v_j)=\alpha_{j-1}$,$j\in\{2,3,\cdots,m+1\}$;

当 $j=n+1$ 时,$f(v_1v_{n+1})=n-1$.

第三步: 给两边的点染色,令

$f(u_i)=\alpha_1$,$i=2,3,\cdots,m+1$,$f(u_1)=\alpha_2$,

$f(v_j)=\alpha_3$,$j=2,3,\cdots,n+1$,$f(v_1)=\alpha_4$;

只用字母颜色染色,且只需四种字母颜色染色就够了.

上述染色是 I-全染色,并且在此染色下有:

$C(u_1)=\{1,2,\cdots,n,n+1\}$,缺数字颜色 $n+2$;

$C(u_2)=\{2,3,\cdots,n,n+1,n+2\}$,缺数字颜色 1;

$C(u_3)=\{3,\cdots,n,n+1,n+2,1\}$,缺数字颜色 2;

⋮

$C(u_{m+1})=\{m+1,m+2,\cdots,n,n+1,n+2,1,\cdots,m-1\}$,缺数字颜色 m.

$C(v_1)=\{1,2,\cdots,m,m+1\}$,缺颜色 $m+2$,$m+3$,即 $n+1$,$n+2$;

$C(v_2)=\{2,\cdots,m,m+1,m+2\}$,缺颜色 1,$m+3$;

⋮

$C(v_{n+1})=\{n+1,n+2,1,\cdots,n-3\}$,缺颜色 n,$n-1$.

对于顶点 u_1 和 v_1 进行染色,共包含 $2m+2$ 种颜色,其中 $C(u_1)\neq C(v_1)$.

对于 $m+n-1$ 个顶点 $u_2,u_3,\cdots,u_{m+1}$ 和 $v_2,v_3\cdots,v_{n+1}$,使得 $|C(u_i)|=m+4$,$i=2,3,\cdots,m+1$,$|C(v_j)|=m+4$,$j=2,3,\cdots,n$,根据事实 1 和事实 2,$C(u_1)$,$C(u_2)$,$\cdots C(u_{m+1})$ 和 $C(v_1)$,$C(v_2)$,$\cdots C(v_n)$ 是互不相同的,可区别的.

对于顶点 v_{n+1},色集合包含 $m+2$ 种颜色,$C(v_1)$,$C(v_{n+1})$ 包含的颜色不同,因此,色集合 $C(v_1)\neq C(v_{n+1})$,并且,$C(u_1)$ 包含颜色 1,但 $C(v_{n+1})$ 不包含颜色 1,所以 $C(u_1)\neq C(v_{n+1})$,由此可见,$C(u_1)\neq C(v_{n+1})\neq C(v_1)$.

由此可见,$m+n+2$ 个点的色集合彼此互不相同,从而得知上述 I-全染色是点可区别的.

当 $n=4$,$m=3$ 时,$S_3\vee S_4$ 有 2 个 8 度(最大度)的点,由引理 1,$\chi_{vt}^{i}(S_3\vee S_4)=\Delta+1$,则 $\chi_{vt}^{vi}(S_3\vee S_4)=\chi_{vt}^{i}(S_3\vee S_4)=\Delta(S_3\vee S_4)=9$.

假如 $S_3\vee S_4$ 存在 9-点可区别全染色,使用的颜色为 1,2,…,9. 只需给出一个 9-点可区别 I-全染色即可,令

$f(u_iv_j)=i+j-1$,$i=1,2,3,4$,$j=1,2,3,4,5$;

$f(u_1)=1$,$f(u_i)=2$,$i=2,3,4$; $f(v_1)=3$,$f(v_j)=4$,$j=2,3,4,5$; $f(u_1u_2)=7$; $f(u_1u_3)=8$; $f(u_1u_4)=9$; $f(v_1v_2)=6$; $f(v_1v_3)=7$; $f(v_1v_4)=8$; $f(v_1v_5)=9$.

由此可见,上述染色是 I-全染色,并且 9 个点的色集合彼此互不相同,从而是点可区别的.

定理 2 设 $S_m\vee S_n$ 是星 S_m 与星 S_n 的联,$3\leqslant m\leqslant n\leqslant n+2$,且 $n=m+2$,则

$$m+n+2\leqslant\chi_{vt}^{vi}(S_m\vee S_n)\leqslant\chi_{vt}^{i}(S_m\vee S_n)\leqslant m+n+3.$$

证明 因为 $\Delta S_m\vee S_n=m+n+1$,$m+n+2\leqslant\chi_{vt}^{i}(S_m\vee S_n)\leqslant m+n+3$,只需给出 $S_m\vee S_n$ 的一个 $(m+n+3)$-点可区别 I-全染色 f.

第一步: 给连接 u_i 与 v_j 的边进行染色,令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{n+2}$,$f(u_iv_j)\in\{1,2,\cdots,n+2\}$,$1\leqslant i\leqslant m+1$,$1\leqslant j\leqslant n+1$.

第二步: 给两个星的边进行染色,令

$f(u_1u_i)=\alpha_{i-1}$,$i\in\{2,3,\cdots,m+1\}$;

$f(v_1v_j)=\alpha_{j-1}$,$j\in\{2,3,\cdots,m+1\}$,

因为 $n=m+2$,所以 S_n 中的边有两条不能用字母颜色进行染色,必须用数字颜色来染色.

第三步: 给点染色,令

$f(u_i)=\alpha_1$,$i=2,3,\cdots,m+1$,$f(u_1)=\alpha_2$,

$f(v_j)=\alpha_3$,$j=2,3,\cdots,n+1$,$f(v_1)=\alpha_4$.

上述染色是 I-全染色,并且在此染色下有:

$C(u_1)=\{1,2,\cdots,n,n+1\}$,缺数字颜色 $n+2$;

$C(u_2)=\{2,3,\cdots,n,n+1,n+2\}$,缺数字颜色 1;

$C(u_3)=\{3,\cdots,n,n+1,n+2,1\}$,缺数字颜色 2;

⋮

$C(u_{m+1})=\{m+1,m+2,\cdots,n,n+1,n+2,1,\cdots,m-1\}$,缺数字颜色 m;

$C(v_1)=\{1,2,\cdots,m,m+1\}$,缺数字颜色 $m+$

$2,m+3,m+4$ 即 $n,n+1,n+2$;

$C(v_2)=\{2,\cdots,m,m+1,m+2\}$,缺数字颜色 $1,m+3,m+4$ 即 $1,n+1,n+2$;

⋮

$C(v_n)=\{n,n+1,n+2,1,2,\cdots,n-4\}$,缺数字颜色 $n-1,n-2,n-3$;

$C(v_{n+1})=\{n+1,n+2,1,\cdots,n-3\}$,缺数字颜色 $n,n-1,n-2$;

用上述染色给 $n=m+2$ 的星进行染色,则发现 S_n 中的两条边 v_1v_n 和 v_1v_{n+1},v_1v_{n+1} 可以用数字颜色 n 进行正常染色,v_1v_n 无法正常染色.

当 $m=3,n=5$ 时,$\chi_{vt}^{i}(S_3\vee S_5)\geqslant m+n+2=10$.

假如 $S_3\vee S_5$ 存在 10 – 点可区别 I-全染色,用上述方法给 $S_3\vee S_5$ 染色,令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{n+2}$,$f(u_iv_j)\in\{1,2,\cdots,7\}$,$1\leqslant i\leqslant 4$,$1\leqslant j\leqslant 6$;

由于

$f(v_1u_i)=\{1,2,3,4\}$,$i=1,2,3,4$;$f(v_5u_i)=\{5,6,7,1\}$,$i=1,2,3,4$;

$f(v_6u_i)=\{6,7,1,2\}$,$i=1,2,3,4$; $\overline{f(v_6u_i)}=\{3,4,5\}$,$i=1,2,3,4$;

$\overline{f(v_1u_i)}=\{5,6,7\}$,$i=1,2,3,4$; $\overline{f(v_5u_i)}=\{2,3,4\}$,$i=1,2,3,4$.

可以看出,$f(v_1u_i)$ 和 $f(v_5u_i)$ 的补集的色集合没有相同的颜色数,从而 S_5 当中的边 v_1v_5 不能正常染色,而边 v_1v_6 可以用相同的颜色数 5 正常染色.

所以,对于 $n=m+2$ 的情形,不存在 10 – 点可区别 I-全染色.

故 $\chi_{vt}^{i}(S_3\vee S_5)\geqslant 11$,下面给出 $S_3\vee S_5$ 的一个 11 – VDITC f,令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{n+2}$,$f(u_iv_j)\in\{1,2,\cdots,7\}$,$1\leqslant i\leqslant 4$,$1\leqslant j\leqslant 6$.

继续取模长为 $n+2$,则字母颜色为 α_1、α_2、α_3、α_4,点 u_i 与 v_j 染其关联边的颜色,其中关联边用数字颜色染色,顶点用四种数字颜色染色,并且相邻点着不同色,S_3 内部的联边 u_1u_2、u_1u_3、u_1u_4 分别用 α_1、α_2、α_3 进行染色,S_5 内部的联边 v_1v_2、v_1v_3、v_1v_4、v_1v_5、v_1v_6 分别用 α_1、α_2、α_3、α_4、α_5 进行染色.

最终得到的上述全染色是 I-全染色,并且在此染色下有:

$C(u_1)=\{1,2,3,4,5,6,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$;$C(u_2)=\{2,3,4,5,6,7,\alpha_1\}$;

$C(u_3)=\{3,4,5,6,7,1,\alpha_2\}$;$C(u_4)=\{4,5,6,7,1,2,\alpha_3\}$;

$C(v_1)=\{1,2,3,4,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$;$C(v_2)=\{2,3,4,5,\alpha_1\}$;

$C(v_3)=\{3,4,5,6,\alpha_2\}$;$C(v_4)=\{4,5,6,7,\alpha_3\}$;

$C(v_5)=\{5,6,7,1,\alpha_4\}$;$C(v_6)=\{6,7,1,2,5\}$.

由此可见,10 个点的色集合彼此不相同,从而得知上述 I-全染色是点可区别的.

当 $n=m+2$ 时,$\chi_{vt}^{i}(S_m\vee S_n)\geqslant\zeta(S_m\vee S_n)+1=m+n+3$,现在只需证明 $S_m\vee S_n$ 有一个$(m+n+3)$ – VDITC f. 令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{n+2}$,$f(u_iv_j)\in\{1,2,\cdots,n+2\}$,$1\leqslant i\leqslant m+1$,$1\leqslant j\leqslant n+1$;

$f(u_1u_i)=\alpha_{i-1}$,$i=2,3,\cdots,m+1$,$f(v_1v_j)=\alpha_{j-1}$,$j\neq 1,n+1$;

$f(v_1v_{n+1})=n$,$j=n+1$.

最终得到的上述全染色是 I-全染色,并且在此染色下有:

$C(u_1)=\{1,2,\cdots,n+1,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$,$i=1$;

$C(u_i)=\{i,i+1,i+2,\cdots,(i+n)_{n+2},\alpha_{i-1}\}$,$i=2,\cdots,m+1$;

$C(v_1)=\{1,2,\cdots,m+1,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}\}$,$j=1$;

$C(v_j)=\{j,j+1,j+2,\cdots,(j+m)_{n+2},\alpha_{j-1}\}$,$j=1,2,\cdots,n$;

$C(v_{n+1})=\{n+1,n+2,1,2,\cdots,n-3,n\}$,$j=n+1$.

由此可以发现 $2n+4$ 个点的色集合彼此不相同,从而上述 I-全染色是点可区别的.

根据命题 1,上述定理显然是成立的,可以看出 VDITC 猜想以及 VDVITC 猜想对 $S_m\vee S_n(3\leqslant m\leqslant n\leqslant n+2)$ 是成立的.

当 $m=n,n=m+1$ 时,$\chi_{vt}^{i}(S_m\vee S_n)=\chi_{vt}^{vi}(S_m\vee S_n)=\zeta(S_m\vee S_n)$,

当 $n=m+2$ 时,$\zeta(S_m\vee S_n)\leqslant\chi_{vt}^{vi}(S_m\vee S_n)\leqslant\chi_{vt}^{i}(S_m\vee S_n)\leqslant\zeta(S_m\vee S_n)+1$.

3 讨 论

本文研究了 $S_m\vee S_n(3\leqslant m\leqslant n\leqslant n+2)$ 的点可区别 I – 全染色和点可区别 VI – 全染色,通过本文的讨论,可以看出 VDITC 猜想及 VDVITC 猜想对

$S_m \vee S_n(3 \leqslant m \leqslant n \leqslant n+2)$ 是成立的，分类讨论结果如下:

当 $m=n$，$n=m+1$ 时，$\chi_{vt}^{i}(S_m \vee S_n)=\chi_{vt}^{vi}(S_m \vee S_n)=\zeta(S_m \vee S_n)$；

当 $n=m+2$ 时，$\zeta(S_m \vee S_n) \leqslant \chi_{vt}^{vi}(S_m \vee S_n) \leqslant \chi_{vt}^{i}(S_m \vee S_n) \leqslant \zeta(S_m \vee S_n)+1$.

今后将继续对 $n \geqslant m+3$ 的 $S_m \vee S_n$ 的点可区别 I－全染色和点可区别 VI－全染色做进一步的研究.

参考文献:

[1] Burris A C, Schelp R H. Vertex-distinguish proper edge-colorings [J]. Journal of Graph Theory, 1997, 26: 73-82.

[2] Bazgan C, Harket-Benhamdine A, Li H, et al. On the vertex-distinguish proper edge-colorings of graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1999, 75: 288-301.

[3] Hararry F, Plantholt M. The point-distingshing chromatic index [M]. New York: Wiley Interscience, 1985: 147-162.

[4] Horňák M, Zagaglia S N. On the point-distinguishing chromatic index of complete bipartite graphs [J]. Ars Combinatoria, 2006, 80: 75-85.

[5] Horňák M, Soták R. The fifth jump of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. Ars Combinatoria, 1996, 42: 233-242.

[6] Horňák M, SotáK R. Localization jumps of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$ [J]. Discussmath Graph Theory, 1997, 17: 243-251.

[7] Horňák M, Zagalia S N. On the point-distinguishing chromatic index of $K_{m,n}$ [J]. Ars Combinatoria, 2006, 80: 75-85.

[8] Chen X E, Gao Y P, Yao B. Not necessarily proper total colorings which are adjacent vertex distinguishing [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2013, 90(11): 2298-2307.

[9] 陈祥恩. 图的可区别染色引论 [M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2015.

[10] Chen X E. Point-distinguishing chromatic index of the union of paths [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2014, 64(3): 629-640.

[11] 辛小恩, 陈祥恩. m 个点不交的 C_4 的并的点可区别全染色 [J]. 山东大学学报(理学版), 2010, 45(10): 35-40.

[12] 辛小青, 陈祥恩. $P_m \vee C_n$ 及 $C_m \vee C_n$ 的点可区别全染色 [J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(5): 182-186.

[13] 刘广军, 陈劲松. 联图 $C_m \vee F_n$ 的点可区别全染色 [J]. 周口师范学院学报, 2012, 29(5): 15-17.

[14] Chen X E, Li Z P. Vertex-distinguish I-total colorings of graphs [J]. Utilitas Mathematica, 2014, 95: 319-327.

[15] 陈祥恩, 苗婷婷, 王治文. 两条路的联图的点可区别 I-全染色 [J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(4): 30-33.

[16] Zhang Z F, Qiu P X, Xu B G, et al. Vertex-distinguish total colorings of graphs [J]. Ars Combinatoria, 2008, 87: 33-45.

[17] Chen X E, Ma Y R. Vertex-distinguish total colorings of $2C_n$ [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2013, 28(3): 323-330.

[18] 苗婷婷, 王治文, 陈祥恩. $C_m \vee C_n$, $C_m \vee W_n$, $C_m \vee F_n$ 的点可区别 I-全染色和点可区别 VI-全染色 [J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2017, 56(6): 870-875.

[19] 苗婷婷, 王治文, 陈祥恩. 圈与路联图点可区别 I-全染色和点可区别 VI-全染色 [J]. 大连理工大学学报, 2017, 57(4): 430-435.

Vertex-distinguishing I- and VI-total colorings of the join of stars

KANG Hui-jun, CHEN Xiang-en

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: This paper will discuss the vertex-distinguishing I-total coloring and vertex-distinguishing VI-total coloring of star and star linkage graphs, and determine the vertex-distinguishing I-panchromatic number and the vertex-distinguishing VI- panchromatic number of star and star $(3 \leqslant m \leqslant n \leqslant n+2)$ linkage graphs by case, which also shows that VDITC conjecture and VDVITC conjecture are valid for such graphs.

Key words: I-total coloring; vertex-distinguishing I-total coloring; vertex-distinguishing VI-total coloring; vertex-distinguishing I-total chromatic number; the join of stars

【责任编辑: 孙向荣】