云南大学学报（自然科学版），2020, 42(2):213~219 DOI: 10.7540/j.ynu.20190233
Journal of Yunnan University: Natural Sciences Edition

具有交错扩散和保护区域的 Ivlev 型捕食模型的共存解

蔺娜娜，张丽娜**
(西北师范大学 数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 主要研究一个食饵具有保护区域的 Ivlev 型捕食模型的平衡态问题. 应用特征值理论和分歧理论讨论共存态的存在性. 结果表明, 交错扩散有助于物种的共存.

关键词: 捕食模型; 保护区域; 交错扩散; 共存态
中图分类号: O175.26 **文献标志码:** A **文章编号:** 0258−7971(2020)02−0213−07

本文讨论如下具有保护区域的 Ivlev 型捕食交错扩散模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(\lambda-u) - b(x)v(1-\mathrm{e}^{-ru}), (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ v_t = \Delta v + v[\mu - v + c(1-\mathrm{e}^{-ru})],\ \ (x,t)\in\Omega\backslash\overline{\Omega}_0\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0,\ \ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0,\ \ (x,t)\in\partial\left(\Omega\backslash\overline{\Omega}_0\right)\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \ x\in\Omega,\ \ v(x,0) = v_0(x),\ \ x\in\Omega\backslash\overline{\Omega}_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中边界光滑的有界区域, Ω_0 是 Ω 的边界光滑的子集; ν 是边界上的单位外法向量; λ, r, c 是正常数, μ 是常数; ρ, b 在 $\Omega\backslash\overline{\Omega}_0$ 内为正常数在 Ω_0 内为零; u, v 分别表示食饵和捕食者种群的密度函数; r 表示捕食者捕获食饵的能力; λ, μ 分别是 u 和 v 的内禀增长率; $b(x)$ 是捕食率.

模型 (1) 中, $1-\mathrm{e}^{-ru}$ 为 Ivlev 型功能反应函数, 最早由文献 [1] 提出, 此功能反应函数对无脊椎动物广泛适用. $k\Delta[\rho(x)vu]$ 为交错扩散项, 此类交错扩散项由 Shigesada 等在文献 [2] 中提出, 用来描述生物界中的种群分离现象. 本文中我们假设 k 为正常数, 这表示食饵向捕食者密度减少的方向流动, 生态上描述的是食饵躲避捕食者以逃避被捕食的情形. 目前, 对带 Ivlev 反应项的捕食模型的研究多集中于常微分模型[3-4]以及含有一般扩散的弱耦合反应扩散模型[5-6]. 据我们所知, 对强耦合的反应扩散模型 (1) 的研究结果相对较少.

模型 (1) 中, Ω_0 表示一个食饵能够自由进出的保护区域. 捕食者不能进入 Ω_0 而只能在 Ω_0 以外捕食食饵. Du 等在文献 [7-9] 中分别研究了保护区域对 Lotka-Volterra 型捕食模型、Leslie 型捕食模型、Holling II 型捕食模型的影响. 然而, 据我们所知, 具有保护区域的 Ivlev 型交错扩散捕食模型尚未得到研究.

因此, 本文中我们关注保护区域和交错扩散对模型 (1) 的影响. 特别地, 我们关注系统 (1) 的稳态正解的存在性, 生物上这表示 2 个物种的共存. 令 $\Omega_1 = \Omega\backslash\overline{\Omega}_0$, $U = (1+k\rho(x)v)u$, 则模型 (1) 的平衡态问题可以表述为

收稿日期: 2019-04-26; 接受日期: 2019-07-19; 网络出版日期: 2019-11-29
基金项目: 国家自然科学基金 (11761063).
作者简介: 蔺娜娜 (1995−), 女, 甘肃人, 硕士生, 主要从事偏微分方程理论及应用方面的研究. E-mail: 280376279@qq.com.
** 通信作者: 张丽娜 (1981−), 女, 河南人, 博士, 副教授, 主要从事偏微分方程理论及应用方面的研究. E-mail: linazhang@nwnu.edu.cn.

$$\begin{cases} \Delta U + \dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\left(\lambda - \dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\right) - b(x)v\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{rU}{1+k\rho(x)v}}\right) = 0, x \in \Omega, \\ \Delta v + v\left[\mu - v + c\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{rU}{1+kv}}\right)\right] = 0,\ \ x \in \Omega_1, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \nu} = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ \ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0,\ \ \ x \in \partial\Omega_1, \end{cases} \tag{2}$$

其中,

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_0, \\ 0, x \in \Omega_0, \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} \beta, x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_0, \\ 0, x \in \Omega_0, \end{cases} \tag{3}$$

这里 β 是一个正常数, 易见 (u,v) 是系统 (1) 的正稳态解当且仅当 (U,v) 是系统 (2) 的正解. 所以下面只研究系统 (2).

本文第 1 节运用分歧理论证明系统 (2) 从半平凡解曲线产生的分歧正解的存在性. 第 2 节研究共存区域对交错扩散系数 k 和保护区域 Ω_0 的依赖性.

1 共存解的存在性

首先我们介绍下述引理 1, 此引理在证明共存解的存在性时起重要作用.

引理 1 设 $\mu > 0$, N 是正整数, 对任意给定的 r, k 和 Ω_0, 存在唯一的 $\lambda^*(\mu) \in (0, \beta r\mu)$, 使得 $\lambda_1^N\left(\dfrac{rb(x)\mu - \lambda^*}{1+k\rho(x)\mu}, \Omega\right) = 0$. 此外, $\lambda^*(\mu)$ 关于 μ 连续、严格单调递增, 并且 $\lim\limits_{\mu\to 0}\lambda^*(\mu) = 0$, $\lim\limits_{\mu\to\infty}\lambda^*(\mu) \leqslant \lambda_1^D(\Omega_0)$, 其中 $\lambda_1^D(\Omega_0)$ 是 $-\Delta$ 算子在区域 $\overline{\Omega}_0$ 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的主特征值.

证明 由于特征值 $\lambda_1^N(q,\Omega)$ 关于 q 连续且严格单调递增, 而函数 $q(x) = \dfrac{rb(x)\mu - \lambda}{1+k\rho(x)\mu}$ 关于 λ 连续且严格单调递减, 所以函数

$$\lambda \to \lambda_1^N\left(\frac{rb(x)\mu - \lambda}{1+k\rho(x)\mu}, \Omega\right) : (0,\infty) \to \mathrm{R}$$

连续且严格单调递减. 又由于 $\lambda_1^N(0,\Omega) = 0$, 所以

$$\lambda_1^N\left(\frac{rb(x)\mu}{1+k\rho(x)\mu}, \Omega\right) > 0, \quad \lambda_1^N\left(\frac{rb(x)\mu - \beta r\mu}{1+k\rho(x)\mu}, \Omega\right) < 0.$$

由连续函数的介值定理知, 对任意的 $\mu > 0$ 存在唯一的 $\lambda^* = \lambda^*(\mu) \in (0, \beta r\mu)$, 使得 $\lambda_1^N\left(\dfrac{rb(x)\mu - \lambda^*}{1+k\rho(x)\mu}, \Omega\right) = 0$. 又由于函数

$$\mu \to \lambda_1^N\left(\frac{rb(x)\mu - \lambda}{1+k\rho(x)\mu}, \Omega\right) : (0,\infty) \to \mathrm{R}$$

连续且严格单调递增, 所以 $\lambda^*(\mu)$ 关于 μ 连续且严格单调递增, 并且 $\lim\limits_{\mu\to 0}\lambda^*(\mu) = 0$.

最后, 证明 $\lim\limits_{\mu\to\infty}\lambda^*(\mu) \leqslant \lambda_1^D(\Omega_0)$. 由特征值的极小性知,

$$\lambda_1^N\left(\frac{rb(x)\mu - \lambda^*}{1+k\rho(x)\mu}, \Omega\right) = \inf_{\phi\in H^1(\Omega)} \int_\Omega \left(|\nabla\phi|^2 + \frac{rb(x)\mu - \lambda^*}{1+k\rho(x)\mu}\phi^2\right)\mathrm{d}x = 0, \tag{4}$$

其中 $\int_\Omega \phi^2 \mathrm{d}x = 1$. 令 ϕ_1 满足

$$-\Delta\phi_1 = \lambda_1^D(\Omega_0)\phi_1,\ \ x \in \Omega_0,\ \ \phi_1 = 0,\ \ x \in \partial\Omega_0.$$

并按如下方式进行延拓

$$\tilde{\phi}_1 \equiv \phi_1,\ \ x \in \Omega_0,\ \ \tilde{\phi}_1 \equiv 0,\ \ x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_0.$$

在 (4) 式中取 $\phi = \tilde{\phi}_1$, 有

$$0 \leqslant \int_\Omega \left(\left|\nabla\tilde{\phi}_1\right|^2 + \frac{rb(x)\mu - \lambda^*}{1+k\rho(x)\mu}\tilde{\phi}_1^2\right)\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0}\left(|\nabla\phi_1|^2 - \lambda^*\phi_1{}^2\right)\mathrm{d}x = \lambda_1^D(\Omega_0) - \lambda^*(\mu).$$

从而对任意的 $\mu > 0$, 有 $\lambda^*(\mu) \leqslant \lambda_1^D(\Omega_0)$. 由 $\lambda^*(\mu)$ 关于 μ 连续且严格单调递增知, $\lim\limits_{\mu\to\infty}\lambda^*(\mu) \leqslant \lambda_1^D(\Omega_0)$. 证毕.

下面以 λ 为分歧参数, 应用局部分歧理论[10], 讨论系统 (2) 的 2 个半平凡解曲线

$$\Gamma_U = \{(\lambda; U, v) = (\lambda; \lambda, 0) : \lambda > 0\}, \quad \Gamma_v = \{(\lambda; U, v) = (\lambda; 0, \mu) : \lambda > 0, \mu > 0\}.$$

对任意的 $p > N$, 记

$$X_1 = \left\{(\phi,\psi) : \phi \in W^{2,p}(\Omega), \psi \in W^{2,p}(\Omega_1), \partial_\nu\phi|_{\partial\Omega} = \partial_\nu\psi|_{\partial\Omega_1} = 0\right\}, \quad X_2 = L^p(\Omega)\times L^p(\Omega_1).$$

定义

$$\phi_* = (-\Delta + \lambda_*)_\Omega^{-1}\left[\lambda_*{}^2 k\rho(x) + b(x)\left(\mathrm{e}^{-r\lambda_*} - 1\right)\right], \tag{5}$$

其中 $\lambda_* = -\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{c+\mu}{c}, \mu \in (-c, 0)$. 令 ϕ^* 为特征值问题

$$-\Delta\phi^* + \frac{-\lambda^* + rb(x)\mu}{1+k\rho(x)\mu}\phi^* = 0, \ \ x \in \Omega, \ \ \partial_\nu\phi^* = 0, \ \ x \in \partial\Omega \tag{6}$$

的正的主特征函数,

$$\psi^* = (-\Delta + \mu)_{\Omega_1}^{-1}\left(\frac{cr\mu\phi^*}{1+k\mu}\right).$$

首先我们讨论局部分支解曲线的存在性, 有以下结论成立.

定理 1　(1) $(\lambda_*; \lambda_*, 0)$ 是 Γ_U 上唯一的分歧点, 且在 $(\lambda_*; \lambda_*, 0)$ 的邻域内存在系统 (2) 的正解曲线

$$\Gamma_* = \left\{(\lambda; U, v) = \left(\lambda(s); \lambda + s\left(\phi_* + \hat{U}(s)\right), s(1+\hat{v}(s))\right) : s \in \left(0, \hat{\delta}\right)\right\},$$

其中 $\hat{\delta} > 0$ 充分小, $\lambda(s)$, $\hat{U}(s)$, $\hat{v}(s)$ 为 C^1 曲线, 且满足 $\lambda(0) = \lambda_*$, $\hat{U}(0) = \hat{v}(0) = 0$, $\int_{\Omega_1}\hat{v}(s)\mathrm{d}x = 0$.

(2) $(\lambda^*; 0, \mu)$ 是 Γ_v 上唯一的分歧点, 且在 $(\lambda^*; 0, \mu)$ 的邻域内存在系统 (2) 的正解曲线

$$\Gamma^* = \left\{(\lambda; U, v) = \left(\lambda(s); s\left(\phi^* + \tilde{U}(s)\right), \mu + s(\psi^* + \tilde{v}(s))\right) : s \in \left(0, \tilde{\delta}\right)\right\},$$

其中 $\tilde{\delta} > 0$ 充分小, $\lambda(s)$, $\tilde{U}(s)$, $\tilde{v}(s)$ 为 C^1 曲线, 且满足 $\lambda(0) = \lambda^*$, $\tilde{U}(0) = \tilde{v}(0) = 0$, $\int_\Omega \tilde{U}(s)\phi^*\mathrm{d}x = 0$. 这里 λ^* 由 $\lambda_1^N\left(\dfrac{rb(x)\mu - \lambda^*}{1+k\rho(x)\mu}, \Omega\right) = 0$ 确定.

证明　(1) 令 $z = U - \lambda$ 并且定义映射 $F : \mathbf{R}\times X_1 \to X_2$:

$$F(\lambda; z, v) = \begin{pmatrix} \Delta z + \dfrac{z+\lambda}{1+k\rho(x)v}\left(\lambda - \dfrac{z+\lambda}{1+k\rho(x)v}\right) - b(x)v\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r(z+\lambda)}{1+k\rho(x)v}}\right) \\ \Delta v + v\left[\mu - v + c\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r(z+\lambda)}{1+kv}}\right)\right] \end{pmatrix}. \tag{7}$$

F 在 $(\lambda; 0, 0)$ 处的 Fréchet 导算子为

$$F_{(z,v)}(\lambda; 0, 0)[\phi, \psi] = \begin{pmatrix} \Delta\phi - \lambda\phi + \lambda^2 k\rho(x)\psi + b(x)\left(\mathrm{e}^{-r\lambda} - 1\right)\psi \\ \Delta\psi + \left[\mu + c\left(1 - \mathrm{e}^{-r\lambda}\right)\right]\psi \end{pmatrix}.$$

根据 Krein-Rutman 定理[11] 知, 当且仅当 $\lambda = \lambda_*$ 时, $F_{(z,v)}(\lambda; 0, 0)[\phi, \psi] = (0, 0)$ 有一个解 $\psi > 0$. 因此, $(\lambda_*; 0, 0)$ 是 Γ_U 上唯一的分歧点且 $\mathrm{Ker}F_{(z,v)}(\lambda_*; 0, 0) = \mathrm{span}\{(\phi_*, 1)\}$. 故 $\dim\mathrm{Ker}F_{(z,v)}(\lambda_*; 0, 0) = 1$. 由 Fredholm 二择一定理[12] 知,

$$\mathrm{Range}F_{(z,v)}(\lambda_*; 0, 0) = \left\{(\phi, \psi) \in X_2 : \int_{\Omega_1}\psi\mathrm{d}x = 0\right\}.$$

所以, $\mathrm{codim}\,\mathrm{Range}F_{(z,v)}(\lambda_*; 0, 0) = 1$. 此外,

$$F_{\lambda(z,v)}(\lambda_*; 0, 0)[\phi_*, 1] = \begin{pmatrix} -\phi_* + 2k\rho(x)\lambda_* - rb(x)\mathrm{e}^{-r\lambda_*} \\ cr\mathrm{e}^{-r\lambda_*} \end{pmatrix} \notin \mathrm{Range}F_{(z,v)}(\lambda_*; 0, 0).$$

因此, 由局部分支定理得到结论 (1).

(2) 定义映射 $G:\mathbf{R}\times X_1\to X_2$:

$$G(\lambda;U,v)=\begin{pmatrix}\Delta U+\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\left(\lambda-\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\right)-b(x)v\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{rU}{1+k\rho(x)v}}\right)\\ \Delta v+v\left[\mu-v+c\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{rU}{1+kv}}\right)\right]\end{pmatrix}. \tag{8}$$

G 在 $(\lambda;0,\mu)$ 处的 Fréchet 导算子为

$$G_{(U,v)}(\lambda;0,\mu)[\phi,\psi]=\begin{pmatrix}\Delta\phi+\dfrac{\lambda-rb(x)\mu}{1+k\rho(x)\mu}\phi\\ \Delta\psi-\mu\psi+\dfrac{cr\mu}{1+k\mu}\phi\end{pmatrix}.$$

根据 Krein-Rutman 定理[11] 知, 当且仅当 $\lambda=\lambda^*$ 时, $G_{(U,v)}(\lambda;0,\mu)[\phi,\psi]=(0,0)$ 有一个解 $\phi>0$. 因此, $(\lambda^*;0,\mu)$ 是 Γ_v 上唯一的分歧点且 $\mathrm{Ker}G_{(U,v)}(\lambda^*;0,\mu)=\mathrm{span}\{(\phi^*,\psi^*)\}$. 故 $\dim\mathrm{Ker}G_{(U,v)}(\lambda^*;0,\mu)=1$. 此外, 得到

$$\mathrm{Range}G_{(U,v)}(\lambda^*;0,\mu)=\left\{(\phi,\psi)\in X_2:\int_\Omega\phi\phi^*\mathrm{d}x=0\right\}.$$

由上式可以推出

$$G_{\lambda(U,v)}(\lambda^*;0,\mu)[\phi^*,\psi^*]=\begin{pmatrix}\dfrac{\phi^*}{1+k\rho(x)\mu}\\ 0\end{pmatrix}\notin\mathrm{Range}G_{(U,v)}(\lambda^*;0,\mu).$$

因此, 由局部分歧定理得到结论 (2). 证毕.

局部分支定理仅给出了分支点附近分支正解曲线的刻画, 当分支正解曲线远离分支点时需要进行全局分支结构的分析[12]. 为此, 我们需要得到正稳态解的一个先验估计.

引理 2 设 (U,v) 是系统 (2) 的任意正解, 则

$$0<U(x)\leqslant\lambda[1+k(\mu+c)],\ x\in\overline{\Omega},\quad 0<v(x)\leqslant\mu+c\left(1-\mathrm{e}^{-r\lambda}\right),\ x\in\overline{\Omega}_1.$$

当 $\mu\geqslant0$ 时, 对任意的 $x\in\overline{\Omega}_1$ 有 $v(x)>\mu$.

证明 令 $U(x_0)=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}U(x)$, 由最大值原理得

$$\frac{U(x_0)}{1+k\rho(x_0)v(x_0)}\left(\lambda-\frac{U(x_0)}{1+k\rho(x_0)v(x_0)}\right)-b(x_0)v(x_0)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{rU(x_0)}{1+k\rho(x_0)v(x_0)}}\right)\geqslant0,$$

即

$$U(x_0)\leqslant\lambda(1+k\rho(x_0)v(x_0))\leqslant\lambda\left(1+k\max_{x\in\overline{\Omega}_1}v(x)\right). \tag{9}$$

令 $v(x_1)=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}_1}v(x)$, 则系统 (2) 的第 2 个方程满足

$$v(x_1)\left[\mu-v(x_1)+c\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{rU(x_1)}{1+kv(x_1)}}\right)\right]\geqslant0.$$

从而,

$$v(x_1)\leqslant\mu+c\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{rU(x_1)}{1+kv(x_1)}}\right). \tag{10}$$

把 (9) 式代入 (10) 式得 $v(x_1)\leqslant\mu+c\left(1-\mathrm{e}^{-r\lambda}\right)$. 所以, 对任意的 $x\in\overline{\Omega}_1$, 有 $v(x)\leqslant\mu+c\left(1-\mathrm{e}^{-r\lambda}\right)$. 因此, 对任意的 $x\in\overline{\Omega}$, 有 $0<U(x)\leqslant\lambda\left[1+k\left(\mu+c\left(1-\mathrm{e}^{-r\lambda}\right)\right)\right]\leqslant\lambda[1+k(\mu+c)]$. 另一方面,

$$-\Delta v=v\left[\mu-v+c\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{rU}{1+kv}}\right)\right]>v(\mu-v),\ x\in\Omega_1,\ \partial_\nu v=0\ \ x\in\partial\Omega_1.$$

由比较原理得, 如果 $\mu\geqslant0$ 时, 则当 $x\in\overline{\Omega}_1$ 时, $v(x)>\mu$. 证毕.

类似于文献 [13] 定理 2.2 的证明过程, 通过标准的全局分支的讨论, 可以得到如下定理 2, 证明过程略.

定理 2　(1) 若 $\mu \geqslant 0$, 则当 $\lambda > \lambda^*(\mu)$ 时, 系统 (2) 至少存在一个正解.

(2) 若 $\mu < 0$, 则当 $\lambda > \lambda_*(\mu)$ 时, 系统 (2) 至少存在一个正解.

2　交错扩散和保护区域对共存解的影响

本小节考察共存区域对交错扩散系数 k 和保护区域 Ω_0 的依赖. 下面用 $\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)$ 代替前文中的 $\lambda^*(\mu)$, 以便强调 λ^* 对 k 和 Ω_0 的依赖. 定义

$$\lambda^*_\infty(k,\Omega_0)=\lim_{\mu\to\infty}\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)\leqslant\lambda_1^D(\Omega_0).$$

定理 3　(1) 设 $\mu > 0$, 则 $\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)$ 关于 k 严格单调递减.

(2) 令 $\Theta'=\left\{\phi\in H^1(\Omega):\int_{\Omega_0}\phi^2\mathrm{d}x>0\right\}$. 对任意的 $k>0$, 有

$$\lambda^*_\infty(k,\Omega_0)=\inf_{\phi\in\Theta'}\frac{\int_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x+\frac{r\beta}{k}\int_{\Omega\backslash\Omega_0}\phi^2\mathrm{d}x}{\int_{\Omega_0}\phi^2\mathrm{d}x}\leqslant\frac{r\beta|\Omega\backslash\Omega_0|}{k|\Omega_0|}.$$

证明　固定 $\mu>0$ 和 Ω_0, 注意 $\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)$ 满足

$$\lambda_1^N\left(\frac{rb(x)\mu-\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)}{1+k\rho(x)\mu},\Omega\right)=0. \tag{11}$$

由假设 (3) 知,

$$\frac{rb(x)\mu-\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)}{1+k\rho(x)\mu}=\begin{cases}\dfrac{r\beta\mu-\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)}{1+k\mu}, & x\in\Omega\backslash\Omega_0,\\ -\lambda^*(\mu,k,\Omega_0), & x\in\Omega_0.\end{cases} \tag{12}$$

由 $\lambda_1^N(q,\Omega)$ 关于 q 连续且严格单调递增的性质以及 $\lambda_1^N(0,\Omega)=0$, 得 $r\beta\mu-\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)>0$. 对任意满足 (11) 式的 k_1,k_2 (不妨设 $k_2>k_1$), 有

$$\frac{r\beta\mu-\lambda^*(\mu,k_1,\Omega_0)}{1+k_2\mu}<\frac{r\beta\mu-\lambda^*(\mu,k_1,\Omega_0)}{1+k_1\mu},$$

所以,

$$\lambda_1^N\left(\frac{rb(x)\mu-\lambda^*(\mu,k_1,\Omega_0)}{1+k_2\rho(x)\mu},\Omega\right)<\lambda_1^N\left(\frac{rb(x)\mu-\lambda^*(\mu,k_1,\Omega_0)}{1+k_1\rho(x)\mu},\Omega\right)=\lambda_1^N\left(\frac{rb(x)\mu-\lambda^*(\mu,k_2,\Omega_0)}{1+k_2\rho(x)\mu},\Omega\right).$$

因此, 若 $k_2>k_1$, 则 $\lambda^*(\mu,k_1,\Omega_0)>\lambda^*(\mu,k_2,\Omega_0)$. 这表明 $\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)$ 关于 k 严格单调递减.

下面证明结论 (2) 成立. 对任意的 $\mu\geqslant 0$, 令 ϕ_μ 是

$$-\Delta\phi_\mu+\frac{rb(x)\mu-\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)}{1+k\rho(x)\mu}\phi_\mu=0,\ x\in\Omega,\ \partial_\nu\phi_\mu=0,\ x\in\partial\Omega,\ \int_\Omega\phi_\mu^2\mathrm{d}x=1 \tag{13}$$

的唯一正解. 在 (13) 式两边同乘 ϕ_μ 后在 Ω 上积分, 并结合引理 1 得

$$\int_\Omega\left|\nabla\phi_\mu\right|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)-rb(x)\mu}{1+k\rho(x)\mu}\phi_\mu^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)\phi_\mu^2dx\leqslant\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)\leqslant\lambda_1^D(\Omega_0),$$

所以, $\left\{\phi_\mu\right\}_{\mu\geqslant 0}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中有界. 从而存在一列 $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ 满足 $\lim\limits_{i\to\infty}\mu_i=\infty$, 使得 $\phi_{\mu_i}\to\phi_\infty$ 于 $H^1(\Omega)$ 中, $\phi_{\mu_i}\to\phi_\infty$ 于 $L^2(\Omega)$ 中, 其中 ϕ_∞ 为 $H^1(\Omega)$ 中的非负函数且满足 $\int_\Omega\phi_\infty^2\mathrm{d}x=1$. 由 (13) 式得, 对任意的 $\psi\in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega\left(\nabla\phi_{\mu_i}\nabla\psi+\frac{rb(x)\mu_i-\lambda^*(\mu_i,k,\Omega_0)}{1+k\rho(x)\mu_i}\phi_{\mu_i}\psi\right)\mathrm{d}x=0.$$

上式令 $i\to\infty$, 有

$$\int_\Omega\nabla\phi_\infty\nabla\psi\mathrm{d}x+\frac{r\beta}{k}\int_{\Omega\backslash\Omega_0}\phi_\infty\psi\mathrm{d}x-\lambda^*_\infty(k,\Omega_0)\int_{\Omega_0}\phi_\infty\psi\mathrm{d}x=0,$$

其中 $\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)=\lim\limits_{\mu\to\infty}\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)$. 从而 ϕ_∞ 是问题

$$-\Delta\phi_\infty+\frac{r\beta}{k}\chi_{\Omega\setminus\Omega_0}\phi_\infty-\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)\chi_{\Omega_0}\phi_\infty=0,\ \ x\in\Omega,\ \ \partial_\nu\phi_\infty=0,\ \ x\in\partial\Omega$$

的一个弱解. 由于在 $\overline{\Omega}$ 上 $\phi_\infty\geqslant 0$ 且 $\int_\Omega\phi_\infty^2\mathrm{d}x=1$, 所以由强最大值原理知, 在 $\overline{\Omega}$ 上 $\phi_\infty>0$. 这就意味着 $\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)$ 是特征值问题

$$-\Delta\phi+\frac{r\beta}{k}\chi_{\Omega\setminus\Omega_0}\phi=\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)\chi_{\Omega_0}\phi,\ \ x\in\Omega,\ \ \partial_\nu\phi=0,\ \ x\in\partial\Omega$$

的主特征值. 由主特征值的变分不等式得

$$\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)=\inf_{\phi\in\Theta'}\frac{\int_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x+\dfrac{r\beta}{k}\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\phi^2\mathrm{d}x}{\int_{\Omega_0}\phi^2\mathrm{d}x}. \tag{14}$$

在 (14) 式中取 $\phi\equiv 1$ 于 $\overline{\Omega}$, 得 $\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)\leqslant\dfrac{r\beta|\Omega\setminus\Omega_0|}{k|\Omega_0|}$. 证毕.

注 1 定理 3 中结论 (1) 表明共存区域随着交错扩散系数 k 的增大而扩大, 因而交错扩散有利于物种的共存. 结论 (2) 表明当 $k\to\infty$ 或者 Ω_0 扩大到整个 Ω 时, 食饵的临界增长率 $\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)\to 0$. 由 λ^* 关于 μ 连续且严格单调递增知 $\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)\to 0$. 即当 $k\to\infty$ 或者 Ω_0 扩大到整个 Ω 时, 对任意的 $\lambda>0,\mu>0$, 2 个物种都能共存. 生态上, 这意味着如果食饵躲避捕食者的能力很强, 或者在系统中将食饵完全保护起来, 食饵和捕食者总会共存.

参考文献:

[1] Ivlev V S. Experimental ecology of the feeding of fishes[M]. New York: Yale University Press, 1961.

[2] Shigesada N, Kawasaki K, Teramoto E. Spatial segregation of interacting species[J]. Journal of Theoretical Biology, 1979, 79(1): 83-99. DOI: 10.1016/0022-5193(79)90258-3.

[3] Kooij R E, Zegeling A. A predator-prey model with Ivlev's functional response[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 198(2): 473-489. DOI: 10.1006/jmaa.1996.0093.

[4] Sugie J. Two-parameter bifurcation in a predator-prey system of Ivlev type[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1998, 217(2): 349-371. DOI: 10.1006/jmaa.1997.5700.

[5] Garvie M R, Trenchea C. Finite element approximation of spatially extended predator-prey interactions with the Holling type II functional response[J]. Numerische Mathematik, 2007, 107(4): 641-667. DOI: 10.1007/s00211-007-0106-x.

[6] Wang W M, Zhang L, Wang H L, et al. Pattern formation of a predator-prey syetem with Ivlev-type functional response[J]. Ecological Modelling, 2010, 221(2): 131-140. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2009.09.011.

[7] Du Y H, Liang X. A diffusive competition model with a protection zone[J]. Journal of Differential Equations, 2008, 244(1): 61-86. DOI: 10.1016/j.jde.2007.10.005.

[8] Du Y H, Peng R, Wang M X. Effect of a protection zone in the diffusive Leslie predator-prey model[J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(10): 3 932-3 956. DOI: 10.1016/j.jde.2008.11.007.

[9] Du Y H, Shi J P. A diffusive predator-prey model with a protection zone[J]. Journal of Differential Equations, 2006, 229(1): 63-91. DOI: 10.1016/j.jde.2006.01.013.

[10] Crandall M G, Rabinowitz P H. Bifurcation from simple eigenvalues[J]. Journal of Functional Analysis, 1971, 8(2): 321-340. DOI: 10.1016/0022-1236(71)90015-2.

[11] 叶其孝, 李正元, 王明新, 等. 反应扩散方程引论 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2011.
Ye Q X, Li Z Y, Wang M X, et al. Introduction to reaction-diffusion equations[M]. 2nd Edition. Beijing: Science Press, 2011.

[12] 李方方, 贾云锋. 具有 Holling-III 型反应项的捕食-食饵系统的分歧分析 [J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2016, 38(1): 11-17.
Li F F, Jia Y F. Bifurcation analysis on a predator-prey system with Holling-III functional response[J]. Journal of Yunnan University: Natural Sciences Edition, 2016, 38(1): 11-17.

[13] Oeda K. Effect of cross-diffusion on the stationary problem of a prey-predator model with a protection zone[J]. Journal of Differential Equations, 2011, 250(10): 3 988-4 009. DOI: 10.1016/j.jde.2011.01.026.

Coexistence solutions of a Ivlev-type predator-prey model with cross-diffusion and a protection zone

LIN Na-na，ZHANG Li-na**
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: We are concerned with the stationary problem of a Ivlev-type predator-prey model with cross-diffusion and a protection zone. The existence of coexistence states is discussed by using the eigenvalue theory and bifurcation theory. As a result, it is shown that the cross-diffusion is beneficial for species coexistence.

Key words: predator-prey model; protection zone; cross-diffusion; coexistence state