DOI:10.16783/j.cnki.nwnuz.2014.04.001

Gorenstein *fp*-投射模和 Gorenstein *fp*-内射模

刘仲奎，陈文静
（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘要：研究了 Gorenstein 投射模和 Ding 内射模的两种特殊情形，分别称为 Gorenstein fp-投射模和 Gorenstein fp-内射模，并讨论了这两类模的同调性质.

关键词：Gorenstein fp-投射模；Gorenstein fp-内射模；同调
中图分类号：O 153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1001-988X(2014)04-0001-05

Gorenstein fp-projective and Gorenstein fp-injective modules

LIU Zhong-kui，CHEN Wen-jing
(College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，Gansu，China)

Abstract: Two particular cases of Gorenstein projective and Ding injective modules are investigated, respectively called Gorenstein fp-projective and Gorenstein fp-injective modules, and the homological properties of two classes of modules are discussed.

Key words: Gorenstein fp-projective module; Gorenstein fp-injective module; homology

1969 年，作为投射维数的推广，Auslander 和 Bridger[1] 在双侧 Noether 环上定义了 G-维数为零的模. 1993 年，Enochs 等[2] 引入了 Gorenstein 平坦模的概念. 1995 年，Enochs 和 Jenda[3] 引入了 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的概念. 2004 年，Holm[4] 引入了投射可解类和内射可解类的概念，证明了 Gorenstein 投射模是投射可解类，Gorenstein 内射模是内射可解类. 近年来，众多学者对这些模类进行了研究[5-7]，其中 Ding 等[8-9] 研究了强 Gorenstein 平坦模和 Gorenstein FP-内射模，这两种模类具有类似于 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的性质. Gillespie[10] 称这两种模为 Ding 投射和 Ding 内射模. 2013 年，Yang 等[11] 继续研究了 Ding 投射和 Ding 内射模.

2000 年，Garkusha 等[12] 引入了 fp-投射模、fp-内射模和 fp-平坦模的概念，并研究了这些模类的性质. 实际上，fp-投射模、fp-内射模和 fp-平坦模分别是投射模、FP-内射模和平坦模的推广. 2011 年，Mao[13] 继续研究了这三种模，并得到了这些模与一些环的等价刻画.

本文研究 Gorenstein 投射模和 Ding 内射模，分别称为 Gorenstein fp-投射模和 Gorenstein fp-内射模. 众所周知，Ding 投射模是介于投射模与 Gorenstein 投射模之间的一种模类，而本文中引入的 Gorenstein fp-投射模是介于投射模与 Gorenstein 投射模之间的一种新模类. 同样地，Ding 内射模是介于内射模与 Gorenstein 内射模之间的一种模类，而本文中引入的 Gorenstein fp-内射模是介于内射模与 Ding 内射模之间的一种新模类. 本文证明了在 Artin 环上 Gorenstein 投射模类与 Gorenstein fp-投射模类是相同的，在凝聚环上 Ding 内射模类与 Gorenstein fp-内射模类是相同的，证明了 Gorenstein fp-投射模类是投射可解类，Gorenstein fp-内射模类是内射可解类，并讨论了 Gorenstein fp-投射模类和 Gorenstein fp-内射模类的稳定性.

收稿日期：2013-11-28；**修改稿收到日期**：2014-05-08
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11261050)
作者简介：刘仲奎（1963—），男，甘肃通渭人，教授，博士，博士研究生导师. 主要研究方向为同调代数和环理论.
E-mail：liuzk@nwnu.edu.cn；chenwenjing1003@163.com

1 预备知识

除非特别申明，本文环 R 是具有单位元的结合环，所有涉及的模均是酉模，其它未作解释的标记和概念参见文献[14].

称左 R-模 M 是 Gorenstein 投射模[3]，如果存在一个投射左 R-模的正合列

$$P = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(P_0 \to P^0)$，并且对任意投射左 R-模 F，$\mathrm{Hom}_R(P,F)$ 是正合的.

称左 R-模 M 是 Gorenstein 内射模[3]，如果存在一个内射左 R-模的正合列

$$I = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(I_0 \to I^0)$，并且对任意内射左 R-模 H，$\mathrm{Hom}_R(H,I)$ 是正合的.

称左 R-模 M 是 FP-内射模[15]，如果对任意有限表示左 R-模 P，$\mathrm{Ext}_R^1(P,M)=0$.

称左 R-模 M 是 Gorenstein FP-内射模[9]（或 Ding 内射模[10]），如果存在一个内射左 R-模的正合列

$$I = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(I_0 \to I^0)$，并且对任意 FP-内射左 R-模 Q，$\mathrm{Hom}_R(Q,I)$ 是正合的.

称左 R-模 N 是 fp-平坦模[12]，如果对任意有限表示右 R-模的单同态 $K \to L$，$K \otimes_R N \to L \otimes_R N$ 是单同态. 称左 R-模 M 是 fp-内射模[12]，如果对任意有限表示左 R-模的单同态 $K \to L$，$\mathrm{Hom}_R(L,M) \to \mathrm{Hom}_R(K,M)$ 是满同态. 对偶地，可定义 fp-投射模.

2 Gorenstein fp-投射模和 Gorenstein fp-内射模

定义 1 设 M 是左 R-模. 称 M 是 Gorenstein fp-内射模，如果存在一个内射左 R-模的正合列

$$I = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(I_0 \to I^0)$，并且对任意 fp-内射左 R-模 Q，$\mathrm{Hom}_R(Q,I)$ 是正合的. 此时，称正合列 I 为 M 的 fp-完全内射分解.

对偶地，称左 R-模 M 是 Gorenstein fp-投射模，如果存在一个投射左 R-模的正合列

$$P = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(P_0 \to P^0)$，并且对任意 fp-投射左 R-模 H，$\mathrm{Hom}_R(P,H)$ 是正合的. 此时，称正合列 P 为 M 的 fp-完全投射分解.

注 1 由定义 1 可得，Gorenstein fp-内射（Gorenstein fp-投射）模是 Gorenstein 内射（Gorenstein 投射）模. 进一步，Gorenstein fp-内射模是 Ding 内射模.

注 2 fp-完全内射（投射）分解的直积（直和）仍为 fp-完全内射（投射）分解，因此，Gorenstein fp-内射（Gorenstein fp-投射）模关于直积（直和）封闭.

注 3 若 $L = \cdots \to L_1 \to L_0 \to L^0 \to L^1 \to \cdots$ 是 fp-完全内射（投射）分解，则由对称性可知，L 的所有核、上核、像都是 Gorenstein fp-内射（Gorenstein fp-投射）模.

引理 1 M 是 Gorenstein fp-内射模当且仅当存在一个内射 R-模的正合列

$$I = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I_{-1} \to I_{-2} \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(I_0 \to I_{-1})$，并且对任意 fp-内射 R-模 Q 和任意 $i \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{Ext}_R^1(Q,L_i)=0$，其中 $L_i \cong \mathrm{Im}(I_i \to I_{i-1})$.

引理 2 设 M 是 Gorenstein fp-内射模，Q 是 fp-内射模，则对任意 $i \geqslant 1$，$\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)=0$.

证明 因为 M 是 Gorenstein fp-内射模，所以存在一个内射 R-模的正合列

$$I = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(I_0 \to I^0)$，并且对任意 fp-内射 R-模 Q，$\mathrm{Hom}_R(Q,I)$ 是正合的. 由引理 1 得，$\mathrm{Ext}_R^1(Q,M)=0$. 下证 $i \geqslant 2$ 的情形. 令 $L^i \cong \mathrm{Im}(I^i \to I^{i+1})$，则有一簇 R-模短正合列

$$X_0 = 0 \to M \to I^0 \to L^0 \to 0,$$
$$X_1 = 0 \to L^0 \to I^1 \to L^1 \to 0,$$
$$\vdots$$
$$X_j = 0 \to L^{j-1} \to I^j \to L^j \to 0,$$
$$\vdots$$

由引理 1，$\mathrm{Ext}_R^1(Q,L^j)=0$. 由 X_0 得，$\mathrm{Ext}_R^{i+1}(Q,M) \cong \mathrm{Ext}_R^i(Q,L^0)$，故 $\mathrm{Ext}_R^2(Q,M)=0$. 由 X_1 得，$\mathrm{Ext}_R^{i+1}(Q,L^0) \cong \mathrm{Ext}_R^i(Q,L^1)$，故 $\mathrm{Ext}_R^2(Q,L^0)=0$，于是 $\mathrm{Ext}_R^3(Q,M)=0$. 继续同样的方法，引理得证. 】

引理 3 设 M 是 R-模，Q 是 fp-内射 R-模. 如果对任意正整数 i 有 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)=0$，那么对于 M 的任意内射分解 I，$\mathrm{Hom}_R(Q,I)$ 是正合的.

证明 不妨设 $I = 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots$. 于是可得形如引理 2 中的一簇 R-模的短正合列 X_j，其中

$j\in\mathbb{N}$. 由 X_0 可得，$\mathrm{Ext}_R^{i+1}(Q,M)\cong\mathrm{Ext}_R^i(Q,L^0)$，故 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,L^0)=0$. 由 X_1 可得，$\mathrm{Ext}_R^{i+1}(Q,L^0)\cong\mathrm{Ext}_R^i(Q,L^1)$，故 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,L^1)=0$. 继续同样的方法. 特别地，对任意 $j\in\mathbb{N}$，$\mathrm{Ext}_R^1(Q,L^j)=0$，故 $\mathrm{Hom}_R(Q,X_j)$是正合的. 将这一簇短正合列接起来可得长正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(Q,M)\to\mathrm{Hom}_R(Q,I^0)\to\mathrm{Hom}_R(Q,I^1)\to\cdots$$

因此 $\mathrm{Hom}_R(Q,I)$是正合的. 】

命题 1 设 M 是 R-模，则 M 是 Gorenstein fp-内射模当且仅当存在短正合列 $0\to N\to I\to M\to 0$，其中 I 是内射模，N 是 Gorenstein fp-内射模.

证明 必要性. 由定义 1 及注 3 易得.

充分性. 因为 N 是 Gorenstein fp-内射模，所以存在内射 R-模的正合列

$$E=\cdots\to I_1\to I_0\to I^0\to I^1\to\cdots,$$

使得 $N\cong\mathrm{Im}(I_0\to I^0)$，并且对任意 fp-内射模 Q，$\mathrm{Hom}_R(Q,E)$是正合的. 于是得 R-模的正合列 $X=\cdots\to I_1\to I_0\to N\to 0$ 且 $\mathrm{Hom}_R(Q,X)$是正合的. 由引理 1 可得，$0\to\mathrm{Hom}_R(Q,N)\to\mathrm{Hom}_R(Q,I)\to\mathrm{Hom}_R(Q,M)\to 0$ 是正合的，于是得 R-模的正合列 $Y=\cdots\to I_1\to I_0\to I\to M\to 0$ 且 $\mathrm{Hom}_R(Q,Y)$是正合的. 于是由引理 2 可得，$\mathrm{Ext}_R^i(Q,N)=0$. 因为 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,I)\to\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(Q,N)$是正合的，$I$ 是内射的，所以 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)=0$. 由引理 3，对于 M 的任意内射分解 Z，$\mathrm{Hom}_R(Q,Z)$是正合的. 不妨设 $Z=0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots$. 将 Y 和 Z 接起来可得内射 R-模的正合列

$$F=\cdots\to I_1\to I_0\to I\to E^0\to E^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(I\to E^0)$，并且 $\mathrm{Hom}_R(Q,F)$是正合的. 因此，M 是 Gorenstein fp-内射模. 】

引理 4 设 M 是内射 R-模，则 M 是 Gorenstein fp-内射的.

定义 2 设 A 是一个 R-模类. 称 A 是投射可解的，如果 A 包含投射模所在的类，并且对任意的短正合列 $0\to X'\to X\to X''\to 0$，有 $X'',X\in A$ 当且仅当 $X'\in A$. 称 A 是内射可解的，如果 A 包含内射模所在的类，并且对任意的短正合列 $0\to X'\to X\to X''\to 0$，有 $X',X\in A$ 当且仅当 $X''\in A$.

引理 5 设 $0\to M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\to 0$ 是 R-模短正合列. 如果 M'和 M''是 Gorenstein fp-内射模，那么 M 是 Gorenstein fp-内射模.

证明 因为 M' 和 M'' 是 Gorenstein fp-内射模，所以存在 R-模的正合列

$$X=\cdots\to E_1\xrightarrow{b_1}E_0\xrightarrow{b_0}M'\to 0,$$

$$Y=\cdots\to I_1\xrightarrow{d_1}I_0\xrightarrow{d_0}M''\to 0,$$

其中每个 E_i 和 I_i 是内射的，并且对任意 fp-内射 R-模 Q，$\mathrm{Hom}_R(Q,X)$和 $\mathrm{Hom}_R(Q,Y)$是正合的. 考虑下图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & E_0 & \xrightarrow{i} & I=E_0\oplus I_0 & \xrightarrow{\pi} & I_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow b_0 & & \downarrow c_0 & & \downarrow d_0 & & \\
0 & \to & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

其中 $i:E_0\to I$ 是标准内射，$\pi:I\to I_0$ 是标准投射. 由引理 1，$\mathrm{Ext}_R^1(Q,M')=0$. 因为内射模是 fp-内射的，所以 $\mathrm{Hom}_R(I_0,M)\to\mathrm{Hom}_R(I_0,M'')\to 0$ 是正合的. 于是存在 R-模同态 $e:I_0\to M$，使得 $d_0=ge$. 令 $h=fb_0$，定义 $c_0:I\to M$，即对任意的$(x,y)\in E_0\oplus I_0$, $c_0((x,y))=h(x)+e(y)$. 显然 c_0 是 R-模同态且上图交换. 继续同样的方法则有正合列

$$U=\cdots\to E_1\oplus I_1\to E_0\oplus I_0\to M\to 0$$

且 $\mathrm{Hom}_R(Q,U)$是正合的. 因为 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,M')\to\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)\to\mathrm{Ext}_R^i(Q,M'')$是正合的，由引理 2，$\mathrm{Ext}_R^i(Q,M')=0$，$\mathrm{Ext}_R^i(Q,M'')=0$，所以 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)=0$. 由引理 3，对于 M 的任意内射分解 Z，$\mathrm{Hom}_R(Q,Z)$是正合的. 不妨设

$$Z=0\to M\to A^0\to A^1\to\cdots,$$

将 U 和 Z 接起来可得内射 R-模的正合列

$$E=\cdots\to E_1\oplus I_1\to E_0\oplus I_0\to A^0\to A^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(E_0\oplus I_0\to A^0)$，并且 $\mathrm{Hom}_R(Q,E)$是正合的. 】

定理 1 Gorenstein fp-内射模是内射可解类.

证明 由引理 4 得内射模是 Gorenstein fp-内射模，所以 Gorenstein fp-内射模类包含内射模类. 考虑短正合列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$，其中 M'是 Gorenstein fp-内射模. 如果 M''是 Gorenstein fp-内射模，那么由引理 5，M 是 Gorenstein fp-内射模. 设 M 是 Gorenstein fp-内射模，由命题 1，存在 R-模的短正合列 $0\to N\to I\to M\to 0$，其中 I 是内射模，N 是 Gorenstein fp-内射模.

考虑 $I\to M$ 和 $M'\to M$ 的拉回：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & M'' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 N 和 M' 是 Gorenstein fp-内射模，所以由引理5，A 是 Gorenstein fp-内射模．于是由命题1，M''是 Gorenstein fp-内射模． 】

推论1 Gorenstein fp-内射模关于直和项封闭．

证明 由注1及定理1知，类似于文献[4]中命题1.4的证明． 】

定理2 设 $0\to M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}L\to 0$ 是 R-模的短正合列．若 N 和 L 是 Gorenstein fp-内射模，则 M 是 Gorenstein fp-内射模当且仅当对任意 fp-内射模 Q，$\mathrm{Ext}_R^1(Q,M)=0$．

证明 必要性．由引理2，结论显然．

充分性．因为 N 和 L 是 Gorenstein fp-内射模，所以存在 R-模的正合列

$$X=\cdots\to E_1\to E_0\to N\to 0,$$
$$Y=\cdots\to I_1\to I_0\to L\to 0,$$

其中每个 E_i 和 I_i 是内射的，并且 $\mathrm{Hom}_R(Q,X)$和 $\mathrm{Hom}_R(Q,Y)$是正合的．因此，由 $g:N\to L$ 可开拓出一个复形的链映射 $\alpha:X\to Y$．设 Z 是链映射 $\alpha:X\to Y$ 的映射锥，$Z=\cdots\to I_1\oplus E_0\to I_0\oplus N\to L\to 0$，因为 X 和 Y 是正合的，所以 $\alpha:X\to Y$ 是拟同构，进而 Z 是正合的．又因为 $\mathrm{Hom}_R(Q,X)$，$\mathrm{Hom}_R(Q,Y)$是正合的，所以 $\mathrm{Hom}_R(Q,Z)$是正合的．

考虑交换图：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & I_1\oplus E_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0=V \\
\cdots \arrow[r] & I_1\oplus E_0 \arrow[r] \arrow[d] & I_0\oplus N \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0=Z \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, equal] & L \arrow[r] & 0=U
\end{tikzcd}$$

其中 $K=\mathrm{Ker}(I_0\oplus N\to L)$，故 $0\to V\to Z\to U\to 0$ 是复形的短正合列．因为 Z 和 U 是正合的，所以 V 是正合的．又因为 $\mathrm{Hom}_R(Q,Z)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(Q,U)$是正合的，所以 $\mathrm{Hom}_R(Q,V)$是正合的．另一方面，存在 R-模同态 $h:M\to K$，使得下图是交换的：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & I_0\oplus N \arrow[r] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $i:N\to I_0\oplus N$ 是标准内射．由五引理可知，h 是单同态，由蛇引理可得，$\mathrm{Ker}1_L\to\mathrm{Coker}h\to\mathrm{Coker}i\to\mathrm{Coker}1_L$ 是正合的，因此 $\mathrm{Coker}h\cong\mathrm{Coker}i$．因为 $\mathrm{Coker}i=(I_0\oplus N)/N\cong I_0$，所以有 R-模的短正合列 $0\to M\to K\to I_0\to 0$，其中 I_0 是内射模，由已知条件可得 $\mathrm{Ext}_R^1(I_0,M)=0$，于是 $K\cong M\oplus I_0$．因为 N 和 L 是 Gorenstein fp-内射模，$\mathrm{Ext}_R^1(Q,M)=0$，所以由引理2并通过维数转移可得，对任意的正整数 i，$\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)=0$．因为 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,K)\cong\mathrm{Ext}_R^i(Q,M\oplus I_0)\cong\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)\oplus\mathrm{Ext}_R^i(Q,I_0)=0$，所以由引理3可得，对于 K 的任意内射分解 W，$\mathrm{Hom}_R(Q,W)$是正合的．不妨设

$$W=0\to K\to K^0\to K^1\to\cdots,$$

将 V 和 W 接起来可得内射 R-模的正合列

$$I=\cdots\to I_2\oplus E_1\to I_1\oplus E_0\to K^0\to K^1\to\cdots$$

故 K 是 Gorenstein fp-内射模．于是由推论1可得，M 是 Gorenstein fp-内射模． 】

定理3 设 M 是 R-模，则 M 是 Gorenstein fp-内射模当且仅当存在 Gorenstein fp-内射模的正合列

$$G=\cdots\to G_1\to G_0\to G^0\to G^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(G_0\to G^0)$，并且对任意 fp-内射模 Q，$\mathrm{Hom}_R(Q,G)$是正合的．

证明 必要性．由定义1及引理4易得．

充分性．由引理2，对于任意的正整数 j，$\mathrm{Ext}_R^j(Q,G^i)=0$，于是可得 $\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)=0$．由引理3，对于 M 的任意内射分解 X，$\mathrm{Hom}_R(Q,X)$是正合的，不妨设

$$X=0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots.$$

另一方面，令 $A_i\cong\mathrm{Im}(G_i\to G_{i-1})$．因为 G_0 是 Gorenstein fp-内射模，所以由命题1，存在 R-模的短正合列 $0\to B\to E_0\to G_0\to 0$，其中 E_0 是内射模，B 是 Gorenstein fp-内射模．

考虑 $E_0\to G_0$ 和 $A_1\to G_0$ 的拉回：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & B \arrow[r, equal] \arrow[d] & B \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^1(Q,A_1)=0$，$\mathrm{Ext}_R^1(Q,B)=0$，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(Q,H)=0$，于是上图各行各列经 $\mathrm{Hom}_R(Q,-)$ 作用后仍是正合的.

考虑 $H\to A_1$ 和 $G_1\to A_1$ 的拉回：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & L \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^1(Q,A_2)=0$ 和 $\mathrm{Ext}_R^1(Q,B)=0$，所以上图各行各列经 $\mathrm{Hom}_R(Q,-)$ 作用后仍是正合的. 在 R-模的短正合列 $0\to B\to L\to G_1\to 0$ 中，因为 B 和 G_1 是 Gorenstein fp-内射模，所以由引理 5，L 是 Gorenstein fp-内射模. 因此有正合列

$$G^*=\cdots\to G_2\to L\to H\to 0$$

且 $\mathrm{Hom}_R(Q,G^*)$ 是正合的. 继续同样的方法，可得 R-模的正合列

$$Y=\cdots\to E_1\to E_0\to M\to 0,$$

其中每个 E_i 是内射模，并且 $\mathrm{Hom}_R(Q,Y)$ 是正合的. 将 X 和 Y 接起来可得内射 R-模的正合列

$$E^*=\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(E_0\to E^0)$，并且 $\mathrm{Hom}_R(Q,G^*)$ 是正合的. 故 M 是 Gorenstein fp-内射模. 】

注 4　对偶地，Gorenstein fp-投射模也具有类似于以上 Gorenstein fp-内射模的性质.

命题 2　在左凝聚环上 Gorenstein fp-内射左 R-模类与 Ding 内射左 R-模类是相同的.

证明　由注 1，Gorenstein fp-内射左 R-模是 Ding 内射左 R-模. 因为 R 是左凝聚环，所以由文献[12]中定理 2.4，任意 fp-内射左 R-模是 FP-内射的. 因此，Ding 内射左 R-模是 Gorenstein fp-内射的. 】

命题 3　在左 Artin 环上 Gorenstein fp-投射左 R-模类与 Gorenstein 投射左 R-模类是相同的.

证明　由注 1，Gorenstein fp-投射左 R-模是 Gorenstein 投射左 R-模. 因为 P 是左 Artin 环，所以由文献[16]中练习 22.7，任意 fp-投射左 R-模是投射的. 因此，Gorenstein 投射左 R-模是 Gorenstein fp-投射的. 】

参考文献：

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. *Stable Module Theory*[M]. Providence Rbode Island: American Mathematical Society, 1969.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein flat modules[J]. *Journal of Nanjing University Math Biquarterly*, 1993, **10**(1): 1-9.

[3] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. *Math Z*, 1995, **220**(4): 611-633.

[4] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. *Journal Pure and Applied Algebra*, 2004, **189**(1): 167-193.

[5] ENOCHS E E, IACOB A, JENDA O M G. Closure under transfinite extensions[J]. *Illinois J Math*, 2007, **51**(2): 561-569.

[6] LIU Z, YANG X. Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. *J Aust Math Soc*, 2009, **87**(3): 395-407.

[7] BENNIS D, MAHDOU N. Global Gorenstein dimensions[J]. *Proc Amer Math Soc*, 2010, **138**(2): 461-465.

[8] DING N, LI Y, MAO L. Strongly Gorenstein flat modules[J]. *J Aust Math Soc*, 2009, **86**(3): 323-338.

[9] DING N, MAO L. Gorenstein *FP*-injective and Gorenstein flat modules[J]. *J Algebra Appl*, 2008, **7**(4): 491-506.

[10] GILLESPIE J. Model structures on modules over Ding-Chen rings[J]. *Homology Appl*, 2010, **12**(1): 61-73.

[11] YANG G, LIU Z, LIANG L. Ding projective and Ding injective modules[J]. *Colloq Algebra*, 2013, **20**(4): 601-612.

[12] GARKUSHA G A, GENERALO A I. Duality for categories of finitely presented modules[J]. *St Pet Math*, 2000, **11**(6): 1051-1061.

[13] MAO L. Remark on *fp*-injective and *fp*-flat modules[J]. *J Arab Sci Eng*, 2011, **36**(6): 1013-1022.

[14] ROTMAN J J. *An Introduction to Homological Algebra*[M]. New York: Academic Press, 1979.

[15] STENSTROM B. Coherent rings and *FP*-injective modules[J]. *J Lond Math Soc*, 1970, **2**(6): 323-329.

[16] FAITH C. *Algebra: Ring Theory*[M]. Berlin: Springer, 1976.

（责任编辑　马宇鸿）