**DOI:** 10. 16783/j. cnki, nwnuz 2020, 02, 007

# Gorenstein n-平坦模

## 张翠萍, 薛秀霞

(西北师范大学 数学与统计学院,甘肃 兰州 730070)

摘要:设R 是右n-凝聚环、引入 Gorenstein n-平坦模的概念,给出这类模的一些等价刻画,证明了如果 Gorenstein n-平坦模关于扩张封闭,则任意左R-模都有 Gorenstein n-平坦覆盖.

关键词: Gorenstein n-平坦模; 余挠对; (预)覆盖; (预)包络

中图分类号: O 153. 3 文献标志码: A 文章编号: 1001-988 X (2020)02-0029-05

# Gorenstein *n*-flat modules

ZHANG Cui-ping, XUE Xiu-xia

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

**Abstract:** Let R be a right n-coherent ring. The notion of Gorenstein n-flat modules is introduced, and some equivalent characterizations of the class of Gorenstein n-flat left R-modules are presented. It is proved that all left modules have Gorenstein n-flat covers if the class of Gorenstein n-flat left R-modules is closed under extensions.

**Key words:** Gorenstein *n*-flat modules; cotorsion pairs; (pre)covers; (pre)envelopes

#### 0 引言

自从 Enochs 等[-3]引入和研究了 Gorenstein平坦模(关于 Gorenstein-平坦模的更多研究见文献[4-7])以来,许多学者对这类模做了各种推广,例如 Bravo 等[-3]引入了 Gorenstein AC-平坦模的概念,Estrada 等[-9]定义并研究了 Gorenstein B-平坦模,其中 B 是右 R-模类.

2004年,Enochs 等[10]证明了右凝聚环上的Gorenstein-平坦左 R-模和它的右正交类构成了完全遗传余挠对,进而得到每个左 R-模都有Gorenstein-平坦覆盖; 2012年,Yang 等[11]证明了如果 Gorenstein-平坦模关于扩张封闭,则这类模与它的右正交类构成了完全遗传余挠对; 2018年 Šaroch 等[12]证明了在任意环上 Gorenstein-平坦模对扩张封闭,从而任意环上 Gorenstein-平坦模

与它的右正交类构成了完全遗传余挠对.

2002 年,Lee 等 $[^{13}]$ 引入了右 n-凝聚环、n-平坦模及 n-FP-内射模,并证明了右 n-凝聚环的许多性质类似于右凝聚环的性质.

受以上思想启发,文中引入了 Gorenstein n-平坦模的概念并研究了这类模的同调性质. 文中首先给出 Gorenstein n-平坦模的一些等价刻画,然后证明 Gorenstein n-平坦模类关于直和项和正向极限封闭,进一步证明 Gorenstein n-平坦模类及其右正交类形成完全遗传余挠对.

#### 1 预备知识

定义  $1^{[13]}$  设 n 是正整数或 $\infty$ , R 是环. 称 R 是右 n-凝聚环,如果投射维数小于等于 n-1 的任意自由右 R-模的所有有限生成子模是有限表示的.

收稿日期: 2019-07-15; 修改稿收到日期: 2019-11-14 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11361051)

作者简介: 张翠萍 (1974—), 女, 甘肃武威人, 副教授, 博士, 硕士研究生导师. 主要研究方向为环的同调代数.

E-mail: zhangcp@nwnu edu cn

定义  $2^{[13]}$  设 n 是正整数,F 是左 R-模. 称 F 是 n-平坦模,如果对所有投射维数小于等于有 n 的有限表示右 R-模 N,有  $Tor_1^R(N,F)=0$ .

引理 1 设 R 是右 n-凝聚环,N 是投射维数 小于等于有 n 的有限表示右 R-模,则对任意 n-平 坦左 R-模 F,有  $Tor_i^R(N,F)=0$ ,其中整数  $i \ge 1$ .

证明 因为 R 是右 n-凝聚环,所以存在正合序列

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

其中  $P_i$  是有限生成投射模,从而由维数转移理论 易得结论. Arr

定义  $3^{[14]}$  设 X 是左 R-模的类. 称 X 是投射可解的,如果 X 满足以下条件:

- (1) X包含所有投射左 R-模;
- (2) 对任意左 R-模的短正合列  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ ,若  $A'' \in X$ ,则  $A \in X$  当且仅当  $A' \in X$ .

对偶地,可以定义内射可解模类.

设 X 是左 R-模的类,M 是左 R-模. 称同态 f:  $X \rightarrow M$  是 X-预覆盖,如果  $X \in X$  且对任意的  $X' \in X$ ,同态  $Hom_R(X', f)$ :  $Hom_R(X', X) \rightarrow Hom_R(X', M)$  是满同态. 称 X-预覆盖  $f: X \rightarrow M$  是 X-覆盖,如果任意自同态  $g: X \rightarrow X$  满足 fg = f,则 g 是同构.

对偶地,可定义 X-预包络和包络.

用  $X^{\perp}$  表示 X 的右正交类,用 $^{\perp}X$  表示 X 的左正交类,则

 $X^{\perp} = \{Y \in R - \not \in | \operatorname{Ext}_{R}^{1}(X, Y) = 0, \forall X \in X \},$   $^{\perp}X = \{Y \in R - \not \in | \operatorname{Ext}_{R}^{1}(Y, X) = 0, \forall X \in X \}.$ 

称左 R-模类的对子(A,B)是余挠对,如果  $A^{\perp}$  = B,且 $^{\perp}$  B = A. 称余挠对(A,B)是完备的,如果 对任意左 R-模 X,存在短正合列  $0 \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$  和短正合列  $0 \rightarrow B' \rightarrow A' \rightarrow X \rightarrow 0$ ,其中 A , $A' \in A$  且 B , $B' \in B$ . 称余挠对(A,B)是完全的,如果任意模都存在 A-覆盖和 B-包络.

定义 4 称余挠对(A,B)是遗传的,如果下列等价说法中的其中一个成立:

- (1) A 是可解模类,即 A 关于满同态的核封闭,
- (2) B是余可解模类,即 B 关于单同态的余 核封闭;
- (3) 对任意的  $A \in A, B \in B$  及任意的整数  $i \geqslant 1$ ,有  $\operatorname{Ext}_R^i(A,B) = 0$ .

### 2 Gorenstein n-平坦模

定义 5 称左 R-模M 是 Gorenstein n-平坦模,如果存在 n-平坦模的正合序列

$$\cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots$$

使得  $M \cong \operatorname{Im}(F_0 \to F^0)$ 且对任意投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模 N,有  $N \otimes_R$ -正合.

显然,n-平坦模是 Gorenstein n-平坦模,Gorenstein n-平坦模关于直和封闭.

记 F 为 n-平坦模,GF 为 Gorenstein n-平坦模,文中的环均指右 n-凝聚环.

命题 1 设 R 是环,M 是左 R-模,则下列结论等价:

- (1) M 是 Gorenstein n-平坦模;
- (2)对任意投射维数小于等于 n 的有限表示 右 R-模 N,有
  - (i)  $Tor_i^R(N,M) = 0$ , 其中整数  $i \ge 1$ ;
- (ii) 存在左 R-模的正合序列  $0 \rightarrow M \rightarrow F^0 \rightarrow F^1$   $\rightarrow F^2 \rightarrow \cdots$ ,使得  $N \bigotimes_R$ -正合,其中  $F^i$  是 n-平坦模:
- (3) 存在左 R-模的短正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow G$  →0, 其中 F 是 n-平坦模, G 是 Gorenstein n-平坦模.

证明  $(1) \Longrightarrow (2)$ . 由 Gorenstein n-平坦模的定义和引理 1 可得.

- (2)  $\Longrightarrow$  (1). 取 M 的平坦分解易得结论.
- (1) **二** (3). 显然.
- (3)  $\Longrightarrow$  (2). 设 N 是投射维数小于等于n 的有限表示右R-模, $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$  是左 R-模的短正合列,其中F是n-平坦模,G是Gorenstein n-平坦模,因为G是Gorenstein n-平坦模,由(1)  $\Longrightarrow$  (2) 可得 $Tor_i^R(N,G)$  = 0  $(i <math>\geqslant$  1). 由长正合列引理

 $\operatorname{Tor}_{i+1}^R(N,G) \to \operatorname{Tor}_i^R(N,M) \to \operatorname{Tor}_i^R(N,F)$  和引理 1 可得  $\operatorname{Tor}_i^R(N,M) = 0 \ (i \geqslant 1)$ ,并且有  $0 \to N \otimes M \to N \otimes F \to N \otimes G \to 0$  正合.

另一方面,因为 G 是 Gorenstein n-平坦模, 所以存在正合列

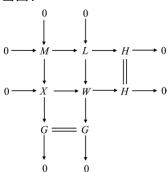
$$0 \rightarrow G \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow F^2 \rightarrow \cdots$$

使得  $N \otimes_{\mathbb{R}}$ -正合,其中  $F^i$  是 n-平坦模 $(i \geqslant 0)$ . 从而有正合序列

$$0 \to M \to F \to F^0 \to F^1 \to F^2 \to \cdots,$$
 使得  $N \bigotimes_R$ -正合.

命题 2 设  $0 \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow H \rightarrow 0$  是左 R-模的短正合列. 如果  $H \in F^n$ ,  $M \in GF^n$ , 那么  $L \in GF^n$ .

证明 因为  $M \in GF^n$ ,所以存在左 R-模的短正合列  $0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow G \rightarrow 0$ ,其中  $X \in F^n$ , $G \in GF^n$ .考虑以下推出图:



因为 H , $X \in F^n$  ,所以  $W \in F^n$  ,故由第二列及命题 1 知  $L \in GF^n$  .

引理 2 设 R 是环,则以下结论等价:

- (1) Gorenstein n-平坦模类关于扩张封闭;
- (2) Gorenstein n-平坦模类是投射可解类;
- (3) 对任意左 R-模的短正合列  $0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ , $G_1$ , $G_0$  是 Gorenstein n-平坦模. 如果对任意投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模 N,有  $Tor_1^R(N,M)=0$ ,那么 M 是 Gorenstein n-平坦模.

证明 (2) => (1). 显然.

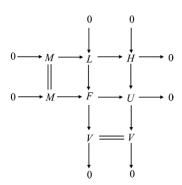
(1)  $\Longrightarrow$  (2). 只需证  $GF^{n}$  关于满同态的核封闭. 假设存在短正合列

$$0 \to M \to L \to H \to 0,$$

其中  $L, H \in GF^n$ ,下证  $M \in GF^n$ . 因为  $L \in GF^n$ , 所以存在短正合列

$$0 \to L \to F \to V \to 0,$$

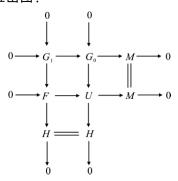
其中  $F \in F^n$ ,  $V \in GF^n$ . 考虑以下推出图:



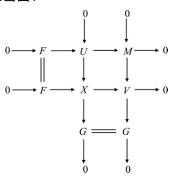
因为  $GF^n$  关于扩张封闭,所以  $U \in GF^n$ . 由推出图的第二行及命题 1 可得  $M \in GF^n$ .

$$(1)$$
  $\Longrightarrow$   $(3)$ . 设  $0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  是左  $R$ -

模的短正合列,其中  $G_1$ ,  $G_0 \in GF^n$ . 因此存在短正合列  $0 \rightarrow G_1 \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow 0$ ,其中  $F \in F^n$ ,  $H \in GF^n$ . 考虑以下推出图:

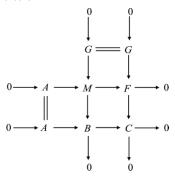


因为 $G_0$ , $H \in GF^n$ ,故 $U \in GF^n$ .因此存在短正合列 $0 \rightarrow U \rightarrow X \rightarrow G \rightarrow 0$ ,其中 $X \in F^n$ , $G \in GF^n$ .故可得以下推出图:



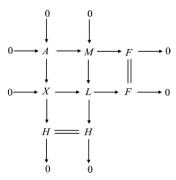
下证  $V \in F^n$ . 考虑推出图的第三列  $0 \rightarrow M \rightarrow V$   $\rightarrow G \rightarrow 0$ . 因为  $G \in GF^n$ ,并且对任意投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模 N,有  $Tor_1^R(N,M) = 0$ ,所以有  $Tor_1^R(N,V) = 0$ . 故  $V \in F^n$ ,因此  $M \in GF^n$ .

(3)  $\Longrightarrow$  (1). 假设存在短正合列  $0 \to A \to B$   $\to C \to 0$ ,其中 A ,  $C \in GF^n$ . 下证  $B \in GF^n$ . 因为 A ,  $C \in GF^n$  , 所以  $Tor_1^R(N,A) = 0$  ,  $Tor_1^R(N,C) = 0$  , 故  $Tor_1^R(N,B) = 0$ . 又因为  $C \in GF^n$  , 所以存在短正合列  $0 \to G \to F \to C \to 0$  , 其中  $F \in F^n$  ,  $G \in GF^n$  . 考虑以下拉回图:



Journal of Northwest Normal University (Natural Science)

因为  $A \in GF^n$ ,所以存在短正合列  $0 \rightarrow A \rightarrow X$   $\rightarrow H \rightarrow 0$ ,其中  $X \in F^n$ , $H \in GF^n$ ,于是有以下推出图:



因为  $X, F \in F^n$ ,所以  $L \in F^n$ . 在推出图的第二列  $0 \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow H \rightarrow 0$  中,因为  $H \in GF^n$ ,所以  $M \in GF^n$ . 在正合列  $0 \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow 0$  中,因为 G, $M \in GF^n$ , $Tor_1^R(N,B) = 0$ ,所以由(3)可得  $B \in GF^n$ .

推论 1 若 Gorenstein *n*-平坦模关于扩张封闭,则 Gorenstein *n*-平坦模关于直和项封闭.

证明 由引理 2 和文献[14]命题 1, 4 即可证明 结论. 】

引理 3 若 Gorenstein n-平坦模关于扩张封闭,则 Gorenstein n-平坦模关于正向极限封闭.

证明 由文献  $\begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$  命题  $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$  3 可知,只需证 Gorenstein n-平坦模关于良序集上的正向极限封闭 即可. 设 $(M_a)_{a < \lambda}$ 是 Gorenstein n-平坦模在良序集上的正向系统. 若  $\lambda = n < \omega$ ,则 $\lim_a = M_{n-1}$ .

设  $\lambda = \omega$ . 下证  $\varinjlim M_n$  ( $n < \omega$ ) 是 Gorenstein n-平坦模. 因为  $M_0$  是 Gorenstein n-平坦模,所以存在正合列

$$A(0): 0 \rightarrow M_0 \rightarrow F_0^0 \rightarrow F_0^1 \rightarrow F_0^2 \rightarrow \cdots,$$
  
其中  $F_0^i$  是  $n$ -平坦模 $(i \geqslant 0)$ ,使得对任意投射维数  
小于等于  $n$  的有限表示右  $R$ -模  $N$ ,有  $N \bigotimes_R$ -正合,  
且对任意整数  $i \geqslant 0$ , $K_0^i = \operatorname{Ker}(F_0^i \rightarrow F_0^{i+1})$  是  
Gorenstein  $n$ -平坦模 $(K_0^0 = M_0)$ .

考虑同态  $M_0 \rightarrow F_0^0$  和同态  $M_0 \rightarrow M_1$  的如下推出图:

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow F_0^0 \longrightarrow K_0^1 \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

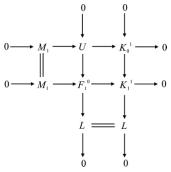
$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow U \longrightarrow K_0^1 \longrightarrow 0$$

因为  $M_1$  和  $K_0^1$  是 Gorenstein n-平坦模,所以 U 是 Gorenstein n-平坦模,于是存在短正合列

$$0 \to U \to F_1^0 \to L \to 0,$$

其中  $F_1^{\circ}$  是 n-平坦模, L 是 Gorenstein n-平坦模.

考虑如下推出图:



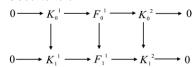
因为 L 和  $K_0^1$  是 Gorenstein n-平坦模,所以  $K_1^1$  是 Gorenstein n-平坦模,于是由  $M_0 \rightarrow M_1$  同态 可诱导出下列同态:

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow F_0^0 \longrightarrow K_0^1 \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

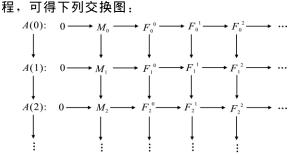
$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow F_0^0 \longrightarrow K_1^1 \longrightarrow 0$$

同理可得交换图:



其中  $F_1^1$  是 n-平坦模, $K_1^2$  是 Gorenstein n-平坦模. 继续上述过程,得到正合列

$$A(1): 0 \to M_1 \to F_1^0 \to F_1^1 \to F_1^2 \to \cdots,$$
  
其中  $F_1^i$  是  $n$ -平坦模, $K_1^i$ =  $\mathrm{Ker}(F_1^i \to F_1^{i+1})(i \geqslant 0)$   
是 Gorenstein  $n$ -平坦模 $(K_1^0 = M_1)$ ,并且存在由 $M_0 \to M_1$  诱导的同态  $A(0) \to A(1)$ .继续这个过



上述交换图中的每一行都是正合的,并且对任意整数  $i \ge 0$ , $j \ge 0$ , $F_j^i$  是 n—平坦模, $K_j^i = \mathrm{Ker}(F_j^i \to F_j^{i+1})$ 是 Gorenstein n—平坦模.设 N 是投射维数小于等于 n 的有限表示右 R-模,则由命题 1 可得  $N \bigotimes_R A(n)$  正合  $(n=0,1,2,\cdots)$ .用 lim 作用上述交换图,得到正合列

$$\underset{\lim F_n^1 \to \lim F_n^2 \to \cdots}{\underline{\lim}} A(n) : 0 \to \underset{\lim F_n^1 \to \cdots}{\underline{\lim}} F_n^0 \to \cdots$$

由文献[16]定理1知, n-平坦模关于正向极限

封闭,故 $\lim F_n^i$  是 n-平坦模( $i \ge 0$ ).

因为  $N \otimes_R \varinjlim A(n) = \varinjlim (N \otimes_R A(n))$ ,所以  $N \otimes_R \varinjlim A(n)$  正合. 又因为对任意的  $i \geqslant 1$ ,有  $Tor_i^R(N, \varinjlim M_n) = \varinjlim Tor_i^R(N, M_n) = 0$ ,故由命题 1 可得 $\varinjlim M_n$  是 Gorenstein n-平坦模.

下面给模  $M_{\scriptscriptstyle 0}$  ,  $M_{\scriptscriptstyle 1}$  ,  $M_{\scriptscriptstyle 2}$  ,  $\cdots$  ,  $M_{\scriptscriptstyle \omega}$  ,  $M_{\scriptscriptstyle \omega+1}$  ,  $\cdots$  重新编号,使得  $M_{\scriptscriptstyle \omega}=\varinjlim M_{\scriptscriptstyle n}$  且  $M_{\scriptscriptstyle \omega+1}$  是  $M_{\scriptscriptstyle \omega}$  的后一项. 因此可以假设系统是连续的,即  $M_{\scriptscriptstyle \beta}=\varinjlim M_{\scriptscriptstyle \alpha}$  ,如果  $\beta$  是有限序数且  $\beta$ < $\lambda$  ,利用超限归纳法可证明  $\varinjlim M_{\scriptscriptstyle \alpha}$  ( $\alpha$ < $\lambda$ ) 是 Gorenstein n—平坦模.

引理 4 任意环上的 Gorenstein *n*-平坦模类是 Kaplansky 类.

证明 由文献[17]命题 2.1 知,n-平坦模关于纯子模和纯商模封闭,又因为 n-平坦模关于正向极限封闭,类似于文献[15]命题 2.6 的证明可得,任意环上的 Gorenstein n-平坦模类是 Kaplansky类.

定理 1 若 Gorenstein n-平坦模类关于扩张封闭,则( $GF^n$ ,( $GF^n$ ) $^{\perp}$ )是完全遗传余挠对.

证明 由引理 3、引理 4 和文献[15]定理 2. 9 得( $GF^n$ ,( $GF^n$ ) $^{\perp}$ )是完全余挠对. 由引理 2 知 Gorenstein n-平坦模类是投射可解类,从而得到 ( $GF^n$ ,( $GF^n$ ) $^{\perp}$ )是遗传的.

推论 2 若 Gorenstein n-平坦模类关于扩张封闭,则任意模都有  $GF^n$ -覆盖.

推论 3 若 Gorenstein n-平坦模类关于扩张封闭,则任意模都有 $(GF^n)^{\perp}$ -包络.

#### 参考文献:

- [1] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS
  B. Gorenstein flat modules [J]. Nanjing Daxue
  Xuebao Shuxue Bannian Kan, 1993, 10: 1.
- [2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein flat preenvelopes and resolvents [J]. Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan, 1995, 12: 1.
- [3] ENOCHS E E, Xu J. Gorenstein flat covers of modules over Gorenstein rings [J]. J Algrbra, 1996, 181(1): 288.
- [4] MAO L X, DING N Q. Gorenstein FP-injective and

- Gorenstein flat modules[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2008, 7(4): 491.
- [5] SONG W L, HUANG Z Y. Gorenstein flatness and injectivity over Gorenstein rings[J]. Sci China Ser A, 2008, 51(2): 215.
- [6] LIU Z K, YANG X Y. Gorenstein projective, injective and flat modules [J]. J Aust Math Soc, 2009, 87: 395.
- [7] GILLESPIE J. Model structured on modules over Ding-Chen rings[J]. Homology, Homotopy Appl, 2010, 12(1): 61.
- [8] BRAVO D, ESTRADA S, IACOB A. FP n-injective and FP n-flat covers and envelopes, and Gorenstein AC-flat covers[J]. Algebra Colloquium, 2018, 25(2): 319.
- [9] ESTRADA S, IACOB A, PÉRES M A. Model structures and relative Gorenstein flat modules. Arxiv: 1709. 00658, 2017.
- [10] ENOCHS E E, JENDA O M G, LÖPEZ-RAMOS J A. The existence of Gorenstein flat covers[J]. *Math Scand*, 2004, **94**(1): 46.
- [11] YANG G, LIU Z K. Gorenstein flat covers over GF-closed rings [J]. Commun Algebra, 2012, 40(5): 1632.
- [12] ŠAROCH J, ŠTOVÍĈEK J. Singular compactness and definability for Σ-cotorsion and Gorenstein modules. 2018, ArXiv: 1804. 09080, 2018.
- [13] LEE S B. *n*-coherent rings [J]. *Comm Algebra*, 2002, **30**(3): 1119.
- [14] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. *J Pure Appl Algebra*, 2004, **189**(1-3): 167.
- [15] ENOCHS E E, LÓPEZ-RAMOS J A. Kaplansky classes[J]. Rend Semin Mat Univ Padova, 2002,: 107: 67.
- [16] SELVARAJ C, UDHAYAKUMAR R. Derived functors of Hom relative to *n*-flat covers [J]. Vietnam J Math, 2015, 43: 571.
- [17] YANG X Y, LIU Z K. n-flat and n-FP-injective modules [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2011, 61(2): 359.

(责任编辑 马宇鸿)